

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Κατά τη διαδικασία της δειγματοληψίας ενός συνεχούς σήματος $x(t)$ προκύπτει το διακριτό σήμα $x[n]$. Σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε τη σχέση ανάμεσα στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier, $X[k]$, του $x[n]$ και τον συνεχή μετασχηματισμό Fourier, $X(f)$, του αρχικού συνεχούς σήματος $x(t)$. Αρχικά ωστε να μαθαύμαστε τις βασικές σχέσεις των μετασχηματισμών καθώς και κάποια χαρακτηριστικά σήματα που ωστε να χρειαστούν στη συνέχεια.

1.1 Μετασχηματισμοί

1.1.1 Συνεχής μετασχηματισμός Fourier συνεχούς σήματος (CFT-C)

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{CFT}-\mathcal{C}} X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad (1.1)$$

$$X(f) \xrightarrow{\mathcal{ICFT}-\mathcal{C}} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \quad (1.2)$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{CFT}-\mathcal{C}} X_1(f) * X_2(f) \quad (1.3)$$

$$X_1(f) \cdot X_2(f) \xrightarrow{\mathcal{ICFT}-\mathcal{C}} x_1(t) * x_2(t) \quad (1.4)$$

Η μεταβλητή f (Hz) είναι η αναλογική συχνότητα. Η αντίστοιχη αναλογική κυκλική συχνότητα είναι $\Omega = 2\pi f$ (rad/sec).

1.1.2 Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος (CFT-D)

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{CFT}-\mathcal{D}} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1.5)$$

$$X(\omega) \xrightarrow{\mathcal{ICFT}-\mathcal{D}} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (1.6)$$

Η μεταβλητή ω (rad) είναι η ψηφιακή κυκλική συχνότητα. Ο μετασχηματισμός $X(\omega)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π και συνεπώς αρκεί να γνωρίζουμε την $X(\omega)$ στο διάστημα $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

1.1.3 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) διακριτού σήματος διάρκειας N δειγμάτων

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.7)$$

$$X[k] \xrightarrow{\mathcal{IDFT}} x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N} nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.8)$$

Το σήμα $x[n]$, διάρκειας N δειγμάτων έχει συνεχή μετασχηματισμό Fourier, $X(\omega)$,

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{CFT}-\mathcal{D}} X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1.9)$$

Συγκρίνοντας τις (1.7) και (1.9) διαπιστώνουμε ότι

$$X[k] = X(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}. \quad (1.10)$$

Άρα, ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος πεπερασμένης διάρκειας είναι ακολουθία δειγμάτων του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier του, στις ψηφιακές κυκλικές συχνότητες $0, \frac{2\pi}{N}, 2\frac{2\pi}{N}, \dots, (N-1)\frac{2\pi}{N}$.

1.2 Χρήσιμα σήματα

1.2.1 Παλμοσειρά δειγματοληψίας

$$S_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \quad (1.11)$$

όπου Δt η περίοδος δειγματοληψίας.

$$S_{\Delta t}(t) \xrightarrow{\mathcal{CFT}-\mathcal{C}} \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n\frac{1}{\Delta t}) = F_s S_{F_s}(f), \quad (1.12)$$

όπου $F_s = \frac{1}{\Delta t}$ είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.

1.2.2 Παράθυρο

$$W_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad (1.13)$$

όπου T είναι η χρονική διάρκεια του παραθύρου.

$$W_T(t) \xrightarrow{\mathcal{CFT}-\mathcal{C}} T \operatorname{sinc}(Tf) \quad (1.14)$$

όπου

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}. \quad (1.15)$$

Σημειώνεται ότι αν $x = m \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\operatorname{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{\pi m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Ένα παράθυρο από $t = 0^-$ έως $t = T^-$ (συνολική διάρκεια T) θα συμβολίζεται ως $W_{0,T}(t)$. Ουσιαστικά το $W_{0,T}(t)$ προκύπτει με χρονική μετατόπιση του $W_T(t)$

κατά $T/2$. Άρα

$$W_{0,T}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1.17)$$

$$W_{0,T}(t) = W_T(t - T/2) \xrightarrow{\mathcal{CFT}-\mathcal{C}} T \operatorname{sinc}(Tf)e^{-j2\pi fT/2}. \quad (1.18)$$

1.3 Δειγματοληψία

Έστω ένα συνεχές σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(f)$, για το οποίο δεν κάνουμε καμία υπόθεση χρονοπερατότητας ή ζωνοπερατότητας. Το σήμα υφίσταται δειγματοληψία με περίοδο δειγματοληψίας Δt και λαμβάνονται N δείγματα στις χρονικές στιγμές $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N-1)\Delta t$. Με αυτήν τη διαδικασία προκύπτει το διακριτό σήμα $x[n] = x(n\Delta t)$ με $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Το παραπάνω σενάριο δειγματοληψίας περιγράφεται μαθηματικά με δύο διαδικασίες. Αρχικά, το σήμα $x(t)$ πολλαπλασιάζεται με μία συνάρτηση παράθυρο $W_{0,N\Delta t}(t)$, χρονικής διάρκειας $N\Delta t$, οπότε προκύπτει το συνεχές σήμα

$$x_w(t) = x(t) \cdot W_{0,N\Delta t}(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t < N\Delta t \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1.19)$$

Στη συνέχεια, η δειγματοληψία του $x_w(t)$, με περίοδο δειγματοληψίας Δt περιγράφεται ως το γινόμενο του $x_w(t)$ με την παλμοσειρά δειγματοληψίας $S_{\Delta t}(t)$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} x_{sw}(t) &= x_w(t) \cdot S_{\Delta t}(t) = [x(t) \cdot W_{0,N\Delta t}(t)] \cdot S_{\Delta t}(t) = x(t) \cdot [W_{0,N\Delta t}(t) \cdot S_{\Delta t}(t)] \\ &= x(t) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n\Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \delta(t - n\Delta t). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Το σήμα $x_{sw}(t)$, αν και συνεχές στη διατύπωσή του, είναι κατ' ουσίαν διακριτό, και αποτελείται από τα δείγματα $x(0), x(\Delta t), \dots, x((N-1)\Delta t)$ του αρχικού σήματος $x(t)$. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier του $x_{sw}(t)$ θα είναι

$$X_{sw}(f) = \mathcal{F}\{x_{sw}(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \cdot W_{0,N\Delta t}(t) \cdot S_{\Delta t}(t)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{F}\{x(t)\} * \mathcal{F}\{W_{0,N\Delta t}(t)\} * \mathcal{F}\{S_{\Delta t}(t)\} \\
&\stackrel{(1.12),(1.18)}{=} X(f) * \left[N\Delta t \operatorname{sinc}(N\Delta t f) e^{-j2\pi f N\Delta t / 2} \right] * [F_s S_{F_s}(f)] \\
&\stackrel{(F_s = \frac{1}{\Delta t})}{=} X(f) * \left[N \operatorname{sinc}(N\Delta t f) e^{-j2\pi f N\Delta t / 2} \right] * S_{F_s}(f)
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Ταυτόχρονα, με βάση την (1.20), έχουμε

$$\begin{aligned}
X_{sw}(f) &= \mathcal{F}\{x_{sw}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\delta(t - n\Delta t)\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\delta(t - n\Delta t) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f \Delta t n}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Υποθέτοντας ότι η αναλογική συχνότητα f είναι ακέραιο πολλαπλάσιο ενός συγχρονικού διαστήματος Δf , δηλαδή $f = k\Delta f$, η (1.22) γράφεται ως

$$X_{sw}(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(N\Delta f \Delta t)kn} \tag{1.23}$$

και αν θεωρήσουμε

$$N\Delta f \Delta t = 1 \tag{1.24}$$

τότε προκύπτει ότι

$$X_{sw}(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X[k]. \tag{1.25}$$

Με την επιλογή (1.24), το δεξί μέρος της (1.23) πήρε τη μορφή διακριτού μετασχηματισμού Fourier. Ακόμη, η (1.24) δηλώνει πως όταν λαμβάνονται N δείγματα, με περίοδο δειγματοληψίας Δt , ο διακριτός μετασχηματισμός $X[k]$ είναι στην ουσία μία ακολουθία δειγμάτων του φάσματος $X_{sw}(f)$, υπολογισμένων στις συχνότητες $0, \Delta f, 2\Delta f, \dots, (N-1)\Delta f$, όπου

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}. \tag{1.26}$$

Τελικά από τις (1.21) και (1.25) προκύπτει

$$X[k] = \left\{ X(f) * \underbrace{\left[N \operatorname{sinc}(N\Delta t f) e^{-j\pi f N \Delta t} \right]}_{L(f)} * \underbrace{S_{F_s}(f)}_{A(f)} \right\}_{f=k\Delta f} \quad (1.27)$$

Συνεπώς, ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x[n]$ ($n = 0, 1, \dots, N - 1$) δεν αποτελείται από δείγματα του φάσματος $X(f)$ του αρχικού αναλογικού σήματος, όπως θα ήταν επιθυμητό, αλλά του φάσματος $X(f) * L(f) * A(f)$. Η (1.27) γράφεται αναλυτικότερα ως

$$\begin{aligned} X[k] &= \left\{ X(f) * \left[N \operatorname{sinc}(N\Delta t f) e^{-j\pi f N \Delta t} \right] * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_s) \right] \right\}_{f=k\Delta f} \\ &= \left[N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f' - nF_s) \operatorname{sinc}(N\Delta t f') e^{-j\pi f' N \Delta t} df' \right]_{f=k\Delta f} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Κλείνοντας, θα πρέπει να σημειωθούν οι σχέσεις απεικόνισης του δείκτη k του διακριτού μετασχηματισμού Fourier $X[k]$, στην ψηφιακή κυκλική συχνότητα ω_k του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier, $X(\omega)$ του $x[n]$ και, τελικά, στην αναλογική κυκλική συχνότητα Ω_k του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier, $X(\Omega)$ του συνεχούς σήματος $x_{sw}(t)$. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$k \xrightarrow{N} \omega_k = \frac{2\pi}{N} k \xrightarrow{\Delta t} \Omega_k = \frac{\omega_k}{\Delta t} = \frac{2\pi}{N\Delta t} k \quad (1.29)$$

και αντιστρόφως

$$\Omega_k \xrightarrow{\Delta t} \omega_k = \Omega_k \Delta t \xrightarrow{N} k = \frac{N\omega_k}{2\pi} = \frac{N\Delta t \Omega_k}{2\pi}. \quad (1.30)$$

Οι (1.29) και (1.30) έχουν νόημα με τη προϋπόθεση ότι $0 \leq k \leq N - 1$. Ακόμη, ισχύει $\omega = \Omega \Delta t$ με την προϋπόθεση ότι $0 \leq \omega \leq 2\pi$, πράγμα που φανερώνει ότι η ψηφιακή κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi$ αντιστοιχεί στην αναλογική κυκλική συχνότητα $\Omega = 2\pi F_s$.

1.3.1 Φασματική επικάλυψη και διαρροή

Με βάση τη σχέση (1.27), θα εξετάσουμε την επίδραση των παραγόντων $A(f)$ και $L(f)$ στο αρχικό αναλογικό φάσμα $X(f)$. Για λόγους καλύτερης κατανόησης θα θεωρήσουμε ότι κάθε ένας από τους δύο παράγοντες επιδρά μεμονωμένα στο $X(f)$.

Η επίδραση του παράγοντα $A(f)$ (Φασματική επικάλυψη)

Έχουμε

$$\begin{aligned} X(f) * A(f) &= X(f) * S_{F_s}(f) = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - f' - nF_s) df' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF_s). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Άρα, το φάσμα $X(f) * A(f)$ είναι περιοδικό με περίοδο F_s και προκύπτει ως το άθροισμα περιοδικών επαναλήψεων του φάσματος $X(f)$, μετατοπισμένων στη συχνότητα κατά ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας F_s .

Αν το σήμα $x(t)$ είναι ζωνοπερατό, τότε $\text{supp}(X(f)) = [-F_{\max}, F_{\max}]$ με $F_{\max} < \infty$. Στην περίπτωση που $F_s > 2F_{\max}$ (συνθήκη Nyquist), οι περιοδικές επαναλήψεις του $X(f)$ δεν επικαλύπτονται. Αντιθέτως, αν $F_s < 2F_{\max}$, τότε οι περιοδικές επαναλήψεις του $X(f)$ εμφανίζουν επικάλυψη (aliasing).

Αν το σήμα $x(t)$ δεν είναι ζωνοπερατό, τότε $\text{supp}(X(f)) = (-\infty, \infty)$. Σε αυτήν την περίπτωση η συνθήκη Nyquist δεν μπορεί να ικανοποιηθεί και οι περιοδικές επαναλήψεις του $X(f)$ επικαλύπτονται. Ο βαθμός επικάλυψης μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας δειγματοληψίας $F_s = 1/\Delta t$. Στην πράξη κανένα σήμα $x(t)$ δεν είναι ζωνοπερατό, οπότε, κατά τη διαδικασία της δειγματοληψίας, θα εμφανίζεται πάντοτε φασματικής επικάλυψης. Άρα, η μόνη συνταγή για τον περιορισμό της επικάλυψης είναι η αύξηση της F_s .

Η φασματική επικάλυψη που περιγράφεται παραπάνω είναι προϊόν της δειγματοληψίας του αρχικού σήματος $x(t)$. Για τον λόγο αυτό, η συγκεκριμένη φασματική επικάλυψη θα χαρακτηρίζεται ως πρωτογενής. Αν όμως λάβουμε υπόψη ότι το αρχικό σήμα $x(t)$ πολλαπλασιάζεται με το χρονικό παράθυρο $W_{0,N\Delta t}(t)$ το σήμα που προκύπτει $x_w(t) = x(t) \cdot W_{0,N\Delta t}(t)$ είναι χρονοπερατό και άρα μη ζωνοπερατό. Συνεπώς, κατά τη δειγματοληψία του $x_w(t)$, θα προκύψει οπωσδήποτε

φασματική επικάλυψη, την οποία θα χαρακτηρίζουμε ως δευτερογενή.

Σημειώνεται ότι ο διαχωρισμός της φασματικής επικάλυψης σε πρωτογενή και δευτερογενή δεν είναι δόκιμος, αλλά υιοθετήθηκε για την κατανόηση των μηχανισμών που την παράγουν. Εν κατακλείδι, αν το αρχικό σήμα $x(t)$ είναι ζωνοπερατό, τότε είναι δυνατό να αποφευχθεί η πρωτογενής φασματική επικάλυψη επιλέγοντας $F_s > 2F_{\max}$. Παρόλα αυτά, κατά τη δειγματοληψία του $x(t)$ θα προκύπτει πάντοτε φασματική επικάλυψη λόγω της παρουσίας της δευτερογενούς.

Η επίδραση του παράγοντα $L(f)$ (Φασματική διαρροή)

Έχουμε

$$\begin{aligned} X(f) * L(f) &= X(f) * \left[N \operatorname{sinc}(N\Delta t f) e^{-j\pi f N\Delta t} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f') \left[N \operatorname{sinc}(N\Delta t f') e^{-j\pi f' N\Delta t} \right] df'. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ας υποθέσουμε ότι το αναλογικό σήμα είναι αρμονικό της μορφής $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ με συχνότητα f_0 , άρα $X(f) = \delta(f - f_0)$. Εφαρμόζοντας την (1.32) προκύπτει

$$\begin{aligned} X(f) * L(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f' - f_0) \left[N \operatorname{sinc}(N\Delta t f') e^{-j\pi f' N\Delta t} \right] df' \\ &= N \operatorname{sinc}(N\Delta t(f - f_0)) \underbrace{e^{-j\pi(f-f_0)N\Delta t}}_{\text{παράγοντας φάσης}}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

Από την (1.33), συμπεραίνουμε ότι η $X(f) * L(f)$ εμφανίζει συχνοτικό περιεχόμενο όχι μόνο στη συχνότητα f_0 του $x(t)$, αλλά και γύρω από αυτήν. Μπορούμε να πούμε ότι με την εφαρμογή του παράγοντα $L(f)$, εμφανίζεται διαρροή (leakage) του φασματικού περιεχομένου εκατέρωθεν της αρχικής συχνότητας f_0 . Η διαρροή αυτή περιγράφεται από τη συνάρτηση $\operatorname{sinc}(N\Delta t(f - f_0))$ και γίνεται εντονότερη όσο ο κύριος λοβός της συνάρτησης είναι ευρύτερος. Ο ρυθμιστικός παράγοντας του εύρους του κύριου λοβού της $\operatorname{sinc}(N\Delta t(f - f_0))$, περί την f_0 , είναι το γινόμενο $N\Delta t$. Αυξάνοντας το γινόμενο $N\Delta t$ ο κύριος λοβός στενεύει και η φασματική διαρροή μειώνεται. Μάλιστα, στην ιδανική περίπτωση που $N\Delta t \rightarrow \infty$, προκύπτει $N \operatorname{sinc}(N\Delta t(f - f_0)) \rightarrow \delta(f - f_0) = X(f)$, δηλαδή εξάλειψη της φασματικής διαρροής. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η καταστολή της φασματικής διαρροής αυξάνοντας το Δt , δηλαδή την περίοδο δειγματοληψίας, είναι ουσιαστικά

μία λανθασμένη επιλογή, επειδή η αύξηση του Δt οδηγεί σε μεγαλύτερη φασματική επικάλυψη. Συνεπώς, το φαινόμενο της φασματικής διαρροής περιορίζεται αυξάνοντας το πλήθος των δειγμάτων N .

Στην ανάλυση που προηγήθηκε, εξετάστηκε η περίπτωση ενός αναλογικού σήματος με μία μόνο φασματική συνιστώσα. Προφανώς, το φαινόμενο της φασματικής διαρροής υφίσταται για οποιοδήποτε φάσμα $X(f)$, αφού όλα εμφανίζεται για κάθε συνιστώσα του.

1.3.1.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1. Έστω το σήμα $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, το οποίο έχει μετασχηματισμό Fourier $X(f) = \delta(f - f_0)$. Το σήμα υφίσταται δειγματοληψία με συχνότητα F_s και λαμβάνονται N δείγματα τις χρονικές στιγμές $0, \Delta t, \dots, (N-1)\Delta t$, ($\Delta t = 1/F_s$). Έτσι προκύπτει το διακριτό σήμα $x[n]$, με διακριτό μετασχηματισμό Fourier (1.28)

$$\begin{aligned} X[k] &= \left[N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f' - nF_s) \operatorname{sinc}(N\Delta t f') e^{-j\pi f' N\Delta t} df' \right]_{f=k\Delta f} \\ &= \left[N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0 - f' - nF_s) \operatorname{sinc}(N\Delta t f') e^{-j\pi f' N\Delta t} df' \right]_{f=k\Delta f} \\ &= N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k\Delta f - f_0 - f' - nF_s) \operatorname{sinc}(N\Delta t f') e^{-j\pi f' N\Delta t} df' \\ &= N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(N\Delta t(k\Delta f - f_0 - nF_s)) e^{-j\pi(k\Delta f - f_0 - nF_s)N\Delta t} \end{aligned} \quad (1.34)$$

όπου $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$. Από την (1.34) συμπεραίνουμε ότι ο $X[k]$ δε δίνει δείγματα της $X(f) = \delta(f - f_0)$, αλλά ενός φάσματος που έχει υποστεί εν γένει την επιδραση της επικάλυψης και της διαρροής.

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι η συχνότητα δειγματοληψίας έχει επιλεγεί έτσι ώστε να μην προκύπτει πρωτογενής επικάλυψη στο φάσμα ($F_s > 2f_0$)¹. Ακόμη, υποθέτουμε ότι η συνολική χρονική διάρκεια της δειγματοληψίας, $T = N\Delta t$, είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου $T_0 = 1/f_0$ του σήματος $x(t)$, δηλαδή

$$N\Delta t = \nu/f_0 \quad (\nu \in \mathbb{N}_+) \quad (1.35)$$

¹Στην περίπτωση που εξετάζουμε, αρκεί $F_s > f_0$, γιατί το σήμα $x(t)$ έχει μη μηδενικό φασματικό περιεχόμενο μόνο στον θετικό ημιάξονα των αναλογικών συχνοτήτων.

Με βάση τη συνθήκη $F_s > 2f_0 \Rightarrow \Delta t < 1/(2f_0)$ συμπεραίνουμε ότι

$$0 < \nu < N/2. \quad (1.36)$$

Ως αποτέλεσμα, το όρισμα της sinc στην (1.34) γράφεται ως

$$N\Delta t(k\Delta f - f_0 - nF_s) = N\Delta t(k/(N\Delta t) - f_0 - n/\Delta t) = k - \nu - nN \in \mathbb{Z}. \quad (1.37)$$

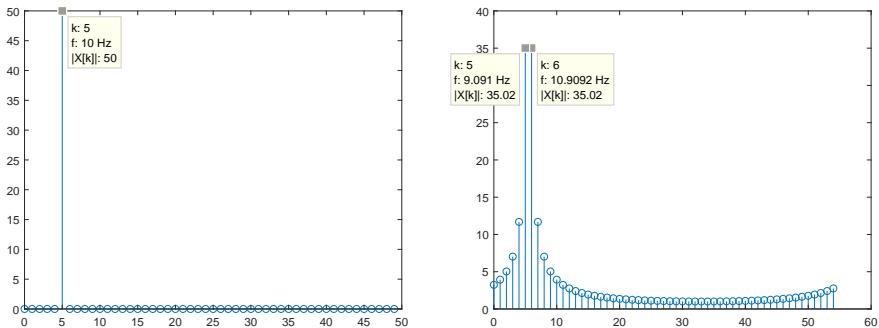
Δεδομένου ότι $0 \leq k \leq N - 1$, $0 < \nu < N/2$ και $n \in \mathbb{Z}$, ο ακέραιος $k - \nu - nN$ είναι ίσος με μηδέν μόνο όταν $n = 0$ και $k = \nu$. Συνεπώς, με βάση την ιδιότητα (1.16) της sinc, από την (1.34) προκύπτει ότι

$$X[k] = \begin{cases} N, & k = \nu \\ 0, & k \neq \nu \end{cases} \quad (1.38)$$

Αυτό σημαίνει πως, στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο διαχριτός μετασχηματισμός $X[k]$ έχει μόνο έναν μη μηδενικό όρο στη θέση $k = \nu$, η οποία αντιστοιχεί στην αναλογική συχνότητα $\nu\Delta f = f_0$. Με άλλα λόγια ο διαχριτός μετασχηματισμός ανέδειξε με ακρίβεια τη μόνη υπάρχουσα φασματική συνιστώσα του αναλογικού σήματος $x(t)$ και μάλιστα στη σωστή συχνότητα f_0 . Θα πρέπει να προσεχθεί ότι αυτή η επιτυχία δε σημαίνει ότι εξαλείφθηκαν η φασματική διαρροή και η δευτερογενής φασματική επικάλυψη, οι οποίες αποτυπώνονται με την παρουσία του απειρανθρόίσματος των συναρτήσεων sinc στην (1.34). Απλώς, με τη συγκεκριμένη επιλογή του συνολικού χρόνου δειγματοληψίας (ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου του σήματος) οι όροι του διαχριτού μετασχηματισμού $X[k]$, για $k \neq \nu$, υπολογίζονται στα σημεία μηδενισμού των sinc. Συνεπώς, η επιτυχία αυτή είναι αποτέλεσμα συγκυρίας και δε δηλώνει απουσία φασματικής διαρροής και φασματικής επικάλυψης.

Στη συνέχεια παρατίθεται κώδικας Matlab για τον υπολογισμό του διαχριτού μετασχηματισμού Fourier του σήματος $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, όπου $f_0 = 10\text{Hz}$. Επιλέγουμε συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 100\text{ Hz}$ και λαμβάνουμε $N = 50$ δείγματα, ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $t = 0$.

```
f0=10; Fs=100; N=50;
n=[0:1:N-1];
Dt=1/Fs;
t=n*D;
x=exp(j*2*pi*f0*t);
X=fft(x);
stem(n,abs(X));
```



Σχήμα 1.1: $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, $f_0 = 10\text{Hz}$, $F_s = 100\text{Hz}$.

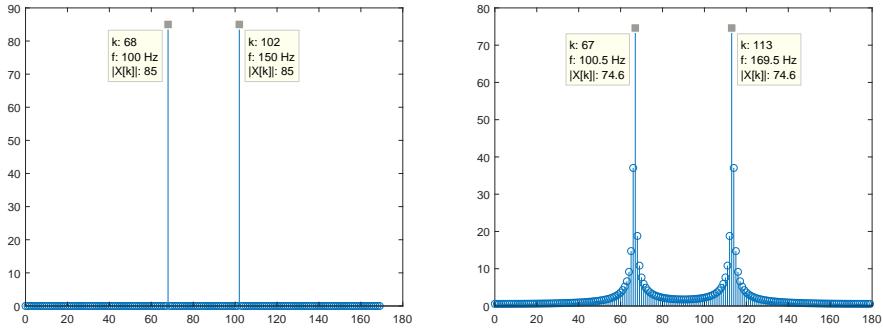
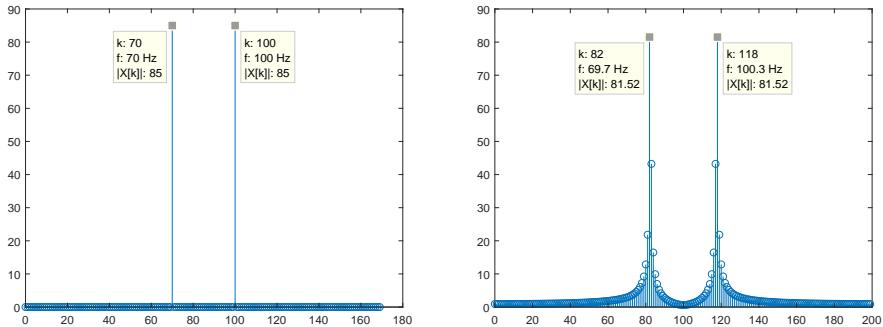
Το πλάτος του διακριτού μετασχηματισμού $|X[k]|$ φαίνεται στο σχήμα 1.1α'. Παρατηρούμε ότι προέκυψε μόνο ένας μη μηδενικός όρος του μετασχηματισμού για $k = 5$. Δεδομένου ότι $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{F_s}{N} = 2\text{Hz}$, ο δείκτης $k = 5$ αντιστοιχεί στην αναλογική συχνότητα $k\Delta f = 10\text{Hz} = f_0$. Συνεπώς, η φασματική διαφρονή και η φασματική επικάλυψη, αν και υπάρχουν, δεν αποκαλύπτονται από τον διακριτό μετασχηματισμό $X[k]$ γιατί, όπως αναλύθηκε προηγουμένως, έχουμε $N\Delta t = N/F_s = 0.5\text{sec}$ και $T_0 = 1/f_0 = 0.1\text{sec}$, οπότε η συνολική διάρκεια δειγματοληψίας $N\Delta t$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο ($\nu = 5$) της περιόδου του σήματος $x(t)$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι αντί για $N = 50$ παίρνουμε $N = 55$ δείγματα. Σε αυτήν την περίπτωση το πλάτος του διακριτού μετασχηματισμού Fourier φαίνεται στο σχήμα 1.1β'. Παρατηρούμε ότι αντί για έναν μόνο μη μηδενικό όρο, στην αναλογική συχνότητα f_0 , ο διακριτός μετασχηματισμός είναι μη μηδενικός για κάθε k . Συνεπώς, η φασματική διαφρονή και η επικάλυψη αποκαλύπτονται, καθώς δεν ικανοποιείται η συνθήκη $N\Delta t/T_0 \in \mathbb{N}$. Μάλιστα δεν υπάρχει όρος του $X(k)$ που να είναι δείγμα του αναλογικού φάσματος στη συχνότητα f_0 του σήματος $x(t)$, καθώς $\Delta f = F_s/N = 100/55\text{Hz}$ και $k = f_0/\Delta f = 55/10 \notin \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.2. Έστω το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, το οποίο έχει συνεχή μετασχηματισμό Fourier $X(f) = \frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0)$. Το σήμα υφίσταται δειγματοληψία με συχνότητα F_s και λαμβάνονται N δείγματα. Θεωρούμε ότι $f_0 = 100\text{Hz}$ και εφαρμόζουμε διάφορες τιμές της συχνότητας δειγματοληψίας F_s και του πλήθους δειγμάτων N .

Περιπτώσεις:

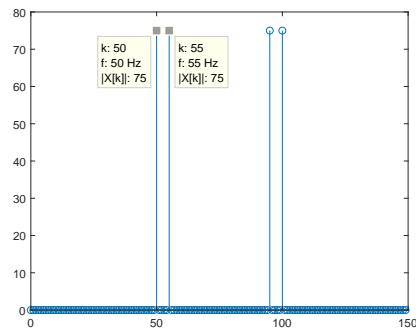
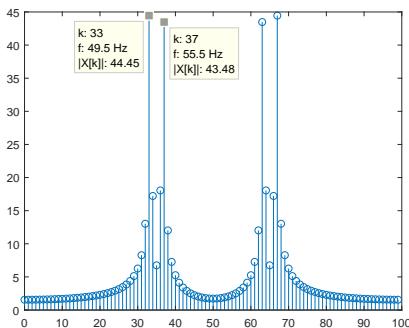
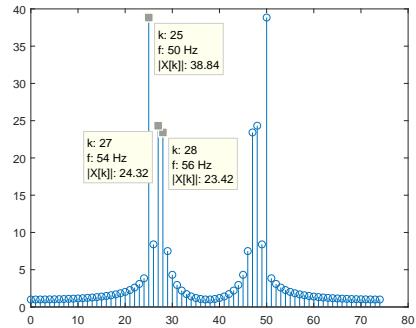
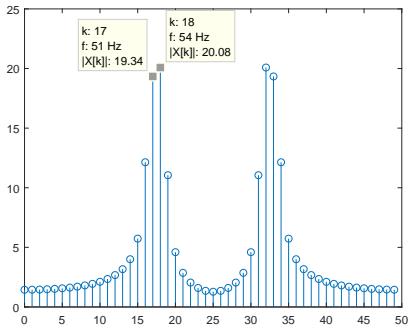
- $F_s = 250\text{Hz}$, $N = 170$. Δεν υπάρχει πρωτογενής φασματική επικάλυψη καθώς $F_s > 2f_0$. Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier δεν μπορεί να αποκαλύ-

(α') $|X[k]|$ για $F_s = 250\text{Hz}$, $N = 170$. (β') $|X[k]|$ για $F_s = 270\text{Hz}$, $N = 180$.(γ') $|X[k]|$ για $F_s = 170\text{Hz}$, $N = 170$. (δ') $|X[k]|$ για $F_s = 170\text{Hz}$, $N = 200$.

Σχήμα 1.2: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 100\text{Hz}$.

ψει τη φασματική διαφροή και την δευτερογενή επικάλυψη, επειδή $Nf_0/F_s = (170 \cdot 100)/250 = 68 \in \mathbb{N}$. Αντιθέτως, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2α', η πραγματική συχνότητα του σήματος $f_0 = 100\text{Hz}$ καθώς και η συμμετρική της $F_s - f_0 = 150\text{Hz}$ αναδεικνύονται.

- $F_s = 270\text{Hz}$, $N = 180$. Δεν υπάρχει πρωτογενής επικάλυψη καθώς $F_s > 2f_0$. Η φασματική διαφροή και η δευτερογενής επικάλυψη αποκαλύπτονται από τον διαχριτό μετασχηματισμός Fourier, επειδή $Nf_0/F_s = (180 \cdot 100)/270 = 200/3 \notin \mathbb{N}$. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2β', λόγω της φασματικής διαφροής και της δευτερογενούς επικάλυψης, αντί για την πραγματική συχνότητα του σήματος $f_0 = 100\text{Hz}$ αναδεικνύεται μία παρακείμενη, η $f = 100.5\text{Hz}$, καθώς και η συμμετρική της, $F_s - f = 169.5\text{Hz}$.



Σχήμα 1.3: $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$, $f_1 = 50\text{Hz}$ και $f_2 = 55\text{Hz}$, $F_s = 150\text{Hz}$.

- $F_s = 170\text{Hz}$, $N = 170$. Υπάρχει πρωτογενής φασματική επικάλυψη καθώς $F_s < 2f_0$. Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier δεν μπορεί να αποκαλύψει τη φασματική διαρροή και τη δευτερογενή επικάλυψη, επειδή $Nf_0/F_s = (170 \cdot 100)/170 = 100 \in \mathbb{N}$. Λόγω της πρωτογενούς επικάλυψης, στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier αναδεικνύονται η συχνότητα $f = 70\text{Hz}$, καθώς και η συμμετρική της $F_s - f = 100\text{Hz}$ (σχήμα 1.2γ').
- $F_s = 170\text{Hz}$, $N = 200$. Υπάρχει πρωτογενής φασματική επικάλυψη καθώς $F_s < 2f_0$. Η φασματική διαρροή και η φασματική επικάλυψη (πρωτογενής και δευτερογενής) αποκαλύπτονται, επειδή $Nf_0/F_s = (200 \cdot 100)/170 = 20/17 \notin \mathbb{N}$ (σχήμα 1.2δ').

Παράδειγμα 1.3. Έστω το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$, με $f_1 = 50\text{Hz}$ και

$f_2 = 55\text{Hz}$. Το σήμα υφίσταται δειγματοληψία με συχνότητα $F_s = 150\text{Hz}$, οπότε δεν υπάρχει πρωτογενής φασματική επικάλυψη, και λαμβάνονται N δειγματα. Θα εξετάσουμε την επίδραση του πλήθους των δειγμάτων στην ικανότητα του διακριτού μετασχηματισμού Fourier να εκτιμήσει και να διαχωρίσει τις δύο κοντινές συχνότητες f_1 και f_2 .

Περιπτώσεις:

- $N = 50$. (Σ χήμα 1.3α') Η φασματική διαρροή και η δευτερογενής επικάλυψη είναι έντονες, σε βαθμό που να μην είναι βέβαιη η διάκριση δύο ξεχωριστών συχνοτήτων. Σημειώνεται ότι $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} = 3\text{Hz}$, $Nf_1/F_s \notin \mathbb{N}$ και $Nf_2/F_s \notin \mathbb{N}$.
- $N = 75$. (Σ χήμα 1.3β') Η συχνότητα f_1 διακρίνεται ξεκάθαρα καθώς $Nf_1/F_s \in \mathbb{N}$. Αποκαλύπτεται η φασματική διαρροή και η δευτερογενής επικάλυψη περί τη συχνότητα f_2 ($Nf_2/F_s \notin \mathbb{N}$). Οι δύο συχνότητες του αναλογικού σήματος διαχωρίζονται ικανοποιητικά καθώς $\Delta f = 2\text{Hz}$.
- $N = 100$. (Σ χήμα 1.3γ') Αν και $Nf_1/F_s \notin \mathbb{N}$, $Nf_2/F_s \notin \mathbb{N}$ (εκδήλωση φασματικής διαρροής και δευτερογενούς επικάλυψης) η ύπαρξη των δύο κύριων φασματικών όρων ίδιου πλάτους αναδεικνύεται, καθώς $\Delta f = 1.5\text{Hz}$.
- $N = 150$. (Σ χήμα 1.3δ') $Nf_1/F_s \in \mathbb{N}$ και $Nf_2/F_s \in \mathbb{N}$ οπότε η φασματική διαρροή και η δευτερογενής επικάλυψη δεν αποκαλύπτονται. Η ύπαρξη των δύο κύριων φασματικών όρων ίδιου πλάτους αναδεικνύεται ξεκάθαρα ($\Delta f = 1\text{Hz}$).