ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

<u>ΟΡΙΣΜΟΙ</u>:

Οι <u>Εξισώσεις Διαφορών</u> (ε.δ.) είναι εξισώσεις που περιέχουν διακριτές αλλαγές και διαφορές των αγνώστων συναρτήσεων

Εμφανίζονται σε μαθηματικά μοντέλα, όπου η μεταβλητή παίρνει μόνο ένα διακριτό σύνολο τιμών.

$F(k,y_k,y_{k+1},\ldots,y_{k+r})=0$, $r\in N$, $k=0,1,2,\ldots$ και F δοσμένη συνάρτηση

π.χ. $y_{k+1}-2y_k=0$

<u>Λύση</u> μιας ε.δ. είναι μια ακολουθία y_k που την επαληθεύει για $k=0,1,2,\ldots$

π.χ. η $y_k=2^k$ είναι λύση της $y_{k+1}-2y_k=0$, $k=0,1,2,\ldots$

<u>Τάξη</u> μιας ε.δ. λέγεται η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου δείκτη των y_k

π.χ. η $y_{k+1}-2y_k=0$ είναι $1^{ης}$ τάξης ενώ η $y_{k+2}-3y_{k+1}+2y_k=0$ είναι $2^{ης}$ τάξης

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ:

Αρχικές συνθήκες μιας ε.δ. (τάξης r) είναι r δοσμένες τιμές της y_k σε r διαδοχικές διαφορετικές τιμές του k

π.χ. $y_0=1$, $y_1=2$ αρχικές συνθήκες της $y_{k+2}-3y_{k+1}+2y_k=0$

Συνοριακές συνθήκες μιας ε.δ. είναι δοσμένες τιμές της y_k σε μη-διαδοχικές τιμές του k

π.χ. $y_0=1$, $y_{15}=2$ συνοριακές συνθήκες της $y_{k+2}-3y_{k+1}+2y_k=0$

Εξισώσεις διαφορών συναντάμε αρκετά συχνά σε εφαρμογές.

Διάφορες μέθοδοι προσεγγιστικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων περιλαμβάνουν αντικατάσταση των διαφορικών εξισώσεων με εξισώσεις διαφορών (π.χ. στη μετεωρολογία) .

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 1ης ΤΑΞΗΣ

Η γραμμική εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$y_{k+1}-q_k y_k=r_k, \quad k=0,1,2,\ldots$$

όπου q_k, r_k είναι δοσμένες ακολουθίες και $q_k \neq 0$, έχει γενική λύση

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} q_i\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1}\left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q_i\right) r_n \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Η γραμμική εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης

$$y_{k+1}-qy_k=0, \quad k=0,1,2,\dots$$

έχει γενική λύση

$$y_k=\left(\prod_{i=0}^{k-1} q\right)y_0+\sum_{n=0}^{k-1}\left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q\right)0=q^k y_0 \qquad k=0,1,2,\dots$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

$$y_{k+2}+p_k y_{k+1}+q_k y_k=r_k,$$

όπου p_k, q_k, r_k είναι δοσμένες ακολουθίες και $q_k \neq 0$

Η <u>γενική της λύση</u> είναι το <u>άθροισμα</u>

Α) της <u>γενικής λύσης της ομογενούς</u> γραμ. εξίσ. διαφορών και

Β) <u>μίας μερικής λύσης της μη ομογενούς</u> γραμ. εξίσ. διαφορών

$$y_k = y_k^o + y_k^\mu = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} + y_k^\mu$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ Ε.Δ. 2ης ΤΑΞΗΣ

Θεωρούμε τη γραμ. ε.δ. 2ης τάξης

$$\alpha_2 y_{k+2}+\alpha_1 y_{k+1}+\alpha_0 y_k=0$$

όπου α_2, α_1, α_0 είναι πραγματικές σταθερές και $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_0 \neq 0$,

Αν λ_1 και λ_2 είναι οι ρίζες της <u>χαρακτηριστικής εξίσωσης</u>

$$\alpha_2 \lambda^2+\alpha_1 \lambda+\alpha_0=0$$

τότε η <u>γενική λύση</u> της ε.δ. δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις (όπου c1, c2 είναι αυθαίρετες σταθερές και k=0,1,2,...):

1) $y_k = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k$ αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2) $y_k = c_1 \lambda_1^k + c_2 k \lambda_1^k$ αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$ και $\lambda_1 = \lambda_2$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ Ε.Δ. $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

3) $y_k = c_1 r^k \cos k\theta + c_2 r^k \sin k\theta$ αν λ_1, λ_2 συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

δηλαδή $\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm i\beta$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{r}, \quad \sin\theta = \frac{\beta}{r}$$

$$\theta = \tau o\xi\varepsilon\phi \frac{\beta}{\alpha}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΛΥΣΕΩΝ

Η γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}$ διαπιστώνεται από την ορίζουσα Casorati

$$C_k = \begin{vmatrix} y_k^{(1)} & y_k^{(2)} \\ y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} \end{vmatrix}$$

Αν είναι $C_k \neq 0$ $\forall$ k=0,1,2,… οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Επειδή $C_k = q_0 q_1 \ldots q_{k-1} C_0$ για k=0,1,2,… όπου $q_k \neq 0$ $\forall$ k=0,1,2,…

ο έλεγχος της γραμμ. ανεξαρτησίας μπορεί να γίνει με χρήση της C_0

δηλαδή της ορίζουσας Casorati (C_k) όπου k=0

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΡΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Για να εφαρμοσθεί αυτή η μέθοδος στη γραμ. ε.δ. 2ης τάξης

$$\alpha_2 y_{k+2}+\alpha_1 y_{k+1}+\alpha_0 y_k=r_k$$

πρέπει:

Α) α_2, α_1, α_0 είναι σταθερές και $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_0 \neq 0$,

Β) η r_k να έχει ειδική μορφή

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

i) αν $r_k = P(k) \cdot \beta^{\kappa}$

όπου: P(k) πολυώνυμο βαθμού m

β σταθερά $\neq 0$

τότε:

η μερική λύση είναι η $\boxed{y_k^{\mu} = k^{\nu} Q(k) \beta^{k}}$

όπου: Q(k) <u>προσδιοριστέο</u> πολυώνυμο βαθμού m

ν είναι η πολλαπλότητα της ρίζας β της χαρ. εξ. $\alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$

δηλαδή ν=0 αν β δεν είναι ρίζα της χαρ. εξ.

ν=1 αν β είναι απλή ρίζα της χαρ. εξ.

ν=2 αν β είναι διπλή ρίζα της χαρ. εξ.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

ii) αν $r_k=\beta^{\kappa}[P_1(k)\cos k\gamma+ P_2(k)\sin k\gamma]$

όπου: $P_1(k)$ πολυώνυμο βαθμού m_1

$P_2(k)$ πολυώνυμο βαθμού m_2

β, γ σταθερές $\neq 0$

τότε:

η μερική λύση είναι η $\boxed{y_k^{\mu} = k^{\nu}\beta^{k}[Q_1(k)\cos k\gamma + Q_2(k)\sin k\gamma]}$

όπου: $Q_1(k)$, $Q_2(k)$ <u>προσδιοριστέα</u> πολυώνυμο βαθμού $m=\max\{m_1,m_2\}$

ν είναι η πολλαπλότητα της ρίζας $\beta\cdot e^{i\gamma}$ της χαρ. εξ. $\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0=0$

$\beta\cdot e^{i\gamma}=\beta(\cos\gamma+i\cdot\sin\gamma)$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

iii) αν $r_k = r_k^{(1)} + r_k^{(2)} + \ldots + r_k^{(n_0)}$

όπου: $r_k^{(i)}$ είναι της μορφής (i) ή (ii)

τότε: χωρίζουμε την αρχική μη-ομογενή ε.δ. $\alpha_2 y_{k+2}+\alpha_1 y_{k+1}+\alpha_0 y_k=r_k$ στις

$$\alpha_2 y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = r_k^{(1)} \;--->\; y_k^{\mu_1}$$

$$\alpha_2 y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = r_k^{(2)} \;--->\; y_k^{\mu_2}$$

....

$$\alpha_2 y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = r_k^{(n_0)} \;--->\; y_k^{\mu_{n0}}$$

και το άθροισμα των μερικών λύσεων

$$\boxed{y_k^{\mu} = y_k^{\mu_1} + y_k^{\mu_2} + \ldots + y_k^{\mu_{n0}}}$$

είναι μια μερική λύση της αρχικής μη-ομογενής ε.δ.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Μία σταθερά c λέμε ότι είναι <u>τιμή ισορροπίας</u> της ε.δ.

$$y_{k+2}+py_{k+1}+qy_k=r \qquad (1)$$

όπου p, q, r είναι σταθερές και $q\neq 0$

αν η $y_k=c$, $k=0,1,2,\ldots$ είναι λύση της.

Συνεπώς:

Η τιμή $c=r/(1+p+q)$, $1+p+q \neq 0$ είναι τιμή ισορροπίας της (1)

Η τιμή c=0 είναι τιμή ισορροπίας της αντίστοιχης ομογενούς ε.δ.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

- Η τιμή ισορροπίας είναι ευσταθής (ασυμπτωτικά) αν κάθε λύση της (1) τείνει στην c, όταν $k \to \infty$,

  δηλαδή $\lim_{k\to\infty} y_k = c$

- Κάθε λύση της (1) τείνει στην c, όταν κάθε λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y_{k+2}+py_{k+1}+qy_k=0 \quad (2)$$

  όπου p, q είναι σταθερές και $q \neq 0$

  τείνει στο 0, όταν $k \to \infty$,

  δηλαδή $\lim_{k\to\infty} y_k^o = \mathbf{0}$

  $[y_k = y_k^o + y_k^\mu \Rightarrow y_k = y_k^o + c]$

- Αυτό συμβαίνει όταν οι ρίζες λ_1 και λ_2 της χαρακτ. εξ. έχουν απόλυτες τιμές (ή μέτρο στην περίπτωση των μιγαδικών) < 1, δηλαδή $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|<1$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

- Κριτήριο ευστάθειας:

  Η τιμή ισορροπίας c της (1) ή c=0 της (2) είναι (ασυμπτωτικά) ευσταθής $\Leftrightarrow$

  $|p|<q+1<2$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Έστω λ_1 και λ_2 οι ρίζες της χαρακτ. εξ. της (2)

Α) αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\quad y_k^o = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k$

- αν $|\lambda_1|<1$ και $|\lambda_2|<1 \Rightarrow$ ευστάθεια (ασυμπτωτική) της τιμής ισορροπίας c
- αν $|\lambda_1|>1$ ή $|\lambda_2|>1 \Rightarrow$ αστάθεια της τιμής ισορροπίας c
- αν ($|\lambda_1|=1$ και $|\lambda_2|\leq 1$) ή ($|\lambda_1| \leq 1$ και $|\lambda_2|=1$) $\Rightarrow$ ευστάθεια (όχι ασυμπτωτική) της τιμής ισορροπίας c

Β) αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$ και $\lambda_1=\lambda_2$ $\quad y_k^o = c_1\lambda_1^k + c_2 k\lambda_1^k$

- αν $|\lambda_1|= |\lambda_2|<1 \Rightarrow$ ευστάθεια (ασυμπτωτική) της τιμής ισορροπίας c
- αν $|\lambda_1|=|\lambda_2|\geq 1 \Rightarrow$ αστάθεια της τιμής ισορροπίας c

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Γ) αν λ_1, λ_2 συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, $\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm i\beta$

$$y_k^o = c_1 r^k \cos k\theta + c_2 r^k \sin k\theta$$

- αν $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} < 1$ $\Rightarrow$ ευστάθεια (ασυμπτωτική) της τιμής ισορροπίας c
- αν $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} > 1$ $\Rightarrow$ αστάθεια της τιμής ισορροπίας c
- αν $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$ $\Rightarrow$ ευστάθεια (μη ασυμπτωτική) της τιμής ισορροπίας c

Μη-ασυμπτωτική ευστάθεια σημαίνει ότι έχουμε ευστάθεια, με τις λύσεις που ξεκινάνε από περιοχή της τιμής ισορροπίας να παραμένουν στην περιοχή της όταν $k\to\infty$, χωρίς όμως να τείνουν στην τιμή ισορροπίας.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΗΣ n≥3

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ Ε.Δ.

Θεωρούμε την ομογενή γραμ. ε.δ. τάξης n≥3

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0$$

όπου α_n, α_{n-1},…, α_1, α_0 είναι πραγματικές σταθερές και $\alpha_n \neq 0$, $\alpha_0 \neq 0$,

Αν λ_i (i=1,..,n) είναι οι n ρίζες της <u>χαρακτηριστικής εξίσωσης</u>

$$\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

τότε οι ρίζες της ομογενούς ε.δ. είναι:

1) λ_i^k αν η ρίζα $\lambda_i \in \Re$ είναι απλή

2) $\lambda_i^k, \quad k\lambda_i^k, \quad k^2 \lambda_i^k, \ldots, \quad k^{m-1} \lambda_i^k$ αν η ρίζα $\lambda_i \in \Re$ είναι πολλαπλότητας m≤n

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΗΣ n≥3

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ Ε.Δ.

3) $r^k \cos k\theta, \quad r^k \sin k\theta$ αν $\lambda_i \,\&\, \overline{\lambda_i}$ =α±iβ συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

$$\mathrm{r} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{r}, \quad \sin\theta = \frac{\beta}{r}, \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

4) $r^k \cos k\theta, \quad kr^k \cos k\theta, \quad \ldots, \quad k^{\nu-1} r^k \cos k\theta,$

$r^k \sin k\theta, \quad kr^k \sin k\theta, \quad \ldots, \quad k^{\nu-1} r^k \sin k\theta$

αν $\lambda_i \,\&\, \overline{\lambda_i}$ =α±iβ συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί με πολλαπλότητα ν<n

Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογ. ε.δ.
Ο γραμμικός τους συνδυασμός δίνει τη γενική λύση της ομογ. ε.δ. με σταθερούς συντελεστές

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΗΣ n≥3

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΛΥΣΕΩΝ

Η <u>γραμμική ανεξαρτησία</u> των λύσεων $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots, y_k^{(n)}$ διαπιστώνεται από την <u>ορίζουσα Casorati</u>

$$C(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots, y_k^{(n)}) = \begin{vmatrix} y_k^{(1)} & y_k^{(2)} & \cdots & y_k^{(n)} \\ y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} & \cdots & y_{k+1}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{k+n-1}^{(1)} & y_{k+n-1}^{(2)} & \cdots & y_{k+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Αν είναι $C \neq 0$ $\forall$ k=0,1,2,… οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ

Τα γραμμικά συστήματα εξισώσεων διαφορών 2ης τάξης είναι της μορφής

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= a_{11}x_k + a_{12}y_k + r_k \\ y_{k+1} &= a_{21}x_k + a_{22}y_k + \tau_k \end{aligned}\right\} \text{--------->} \quad \text{μη-ομογενές}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= a_{11}x_k + a_{12}y_k \\ y_{k+1} &= a_{21}x_k + a_{22}y_k \end{aligned}\right\} \text{--------->} \quad \text{ομογενές}$$

όπου α_{ij}, i,j=1,2 $\in \Re$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ

Μεθοδολογία επίλυσης:

1) Αποφασίζω αν θα εργασθώ πρώτα ως προς x_k (ή y_k) και <u>θέτω κ+1 αντί για κ</u> στην αντίστοιχη εξίσωση του συστήματος, δηλαδή στην x_{k+1}=…. (ή στην y_{k+1}=…)

2) Μετασχηματίζω το σύστημα έτσι ώστε να προκύψει μία ε.δ., <u>μόνο</u> ως προς x_k (ή y_k)

3) Λύνω την ε.δ. που προέκυψε ως προς x_k (ή y_k)

4) Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος, υπολογίζω και την άλλη μεταβλητή y_k (ή x_k)

ΠΡΩΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Μη-γραμμική ε.δ. πρώτης τάξης: $x_{n+1}=f(x_n)$ (1)

Λέμε <u>τιμή ισορροπίας</u> $\overline{x}$ της (1) τις τιμές που ικανοποιούν τη σχέση $f(\overline{x})=\overline{x}$

Οι τιμές ισορροπίας λέμε ότι είναι ευσταθείς (τοπικά ασυμπτωτικά) όταν οι λύσεις της (1) που ξεκινάνε από κάποια περιοχή τους, τείνουν στις τιμές ισορροπίας, όταν $n\to+\infty$

Διαφορετικά, οι τιμές ισορροπίας λέγονται ασταθείς

ΠΡΩΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Η μη-γραμμική ε.δ. πρώτης τάξης (1), σε κάποια μικρή περιοχή της τιμής ισορροπίας της $\bar{x}$, προσεγγίζεται από τη γραμμική ε.δ.

$$\delta x_{n+1} = \frac{df}{dx}(\bar{x})\delta x_n \qquad \Rightarrow \frac{df}{dx}(\bar{x}) = \frac{\delta x_{n+1}}{\delta x_n}$$

όπου $x_n = \bar{x} + \delta x_n$

ΠΡΩΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

<u>Κριτήριο ευστάθειας</u>:

Αν $\left|\dfrac{df}{dx}(\overline{x})\right| < 1$ τότε η τιμή ισορροπίας της (1) είναι ευσταθής (τοπικά ασυμπτωτικά)

Αν $\left|\dfrac{df}{dx}(\overline{x})\right| > 1$ τότε η τιμή ισορροπίας της (1) είναι ασταθής

Αν $\left|\dfrac{df}{dx}(\overline{x})\right| = 1$ τότε δεν μπορεί να βγει ασφαλές συμπέρασμα για ευστάθεια ή αστάθεια της τιμής ισορροπίας της (1)

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ:

Διαφορική εξίσωση (δ.ε.) είναι μία εξίσωση που συνδέει την ανεξάρτητη μεταβλητή, μία άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της διαφόρων τάξεων.

Αν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή, τότε η δ.ε. λέγεται συνήθης δ.ε.

αλλιώς η δ.ε. λέγεται δ.ε. με μερικές παραγώγους

Τάξη μιας δ.ε. είναι η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται στη δ.ε.

Βαθμός μιας δ.ε. (που κάθε μέλος της μπορεί να γραφεί σαν ένα πολυώνυμο της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της) είναι ο βαθμός της μεγαλύτερης τάξης παραγώγου που περιέχεται σε αυτή.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

<u>ΟΡΙΣΜΟΙ</u>:

Μια δ.ε. λέγεται <u>γραμμική</u> όταν είναι γραμμική ως προς τις παραγώγους και τη συνάρτηση, με συντελεστές συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής

<u>Λύση</u> μιας δ.ε. είναι κάθε συνάρτηση y=y(x) που την επαληθεύει

Μια δ.ε. δεν έχει ποτέ μία μόνο λύση. Το σύνολο των λύσεων μιας δ.ε. λέγεται <u>γενική λύση</u>

Θέτοντας ορισμένες συνθήκες είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε από τη γενική λύση μια συγκεκριμένη λύση που λέγεται <u>μερική λύση</u>. Δηλαδή, μερική λύση μιας δ.ε. είναι μια οποιαδήποτε λύση της.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ανήκουν οι δ.ε. πρώτης τάξης:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Οι οποίες μετά από πράξεις μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$F_1(x)dx + F_2(y)dy = 0$$

Και μετά από ολοκλήρωση οι λύσεις είναι

$$\int F_1(x)dx + \int F_2(y)dy = c$$

όπου το c είναι αυθαίρετη σταθερή

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Λέγονται οι δ.ε. που μπορούν να πάρουν τη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Οι οποίες μετά από το μετασχηματισμό

$$\frac{y(x)}{x} = z(x) \Rightarrow y(x) = x \cdot z(x) \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = z(x) + x\frac{dz(x)}{dx}$$

Καταλήγουν στη δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dz}{F(z) - z} = \frac{dx}{x}, F(z) - z \neq 0, x \neq 0$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Δ.Ε. ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΑΝΑΧΘΟΥΝ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Είναι οι δ.ε. τη μορφής:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$$

1) Αν $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}, \gamma_1 \neq 0 \quad ή \quad \gamma_2 \neq 0$

Λύνουμε ως προς x, y το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x = h \\ y = k \end{aligned}$$

Και θέτοντας x=X+h,   y=Y+k

προκύπτει η ομογενής δ.ε.

$$\frac{dY}{dX} = F\left(\frac{a_1 X + \beta_1 Y}{a_2 X + \beta_2 Y}\right)$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Δ.Ε. ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΑΝΑΧΘΟΥΝ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Είναι οι δ.ε. της μορφής: $$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$$

2) Αν $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \left(= \frac{1}{\lambda}\right)$$

κάνουμε την αντικατάσταση $$a_1 x + \beta_1 y = z$$

οπότε και $$a_2 x + \beta_2 y = \lambda z$$ όπου $$\lambda = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

και καταλήγουμε στη δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = F\left(\frac{z + \gamma_1}{\lambda z + \gamma_2}\right)$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Είναι οι δ.ε. που μπορούν να πάρουν τη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

όπου P(x), Q(x) συνεχείς συναρτήσεις

Η γενική λύση δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Δ.Ε. ΤΟΥ BERNOULLI

Είναι οι δ.ε. που μπορούν να πάρουν τη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, n \neq 1)$$

όπου P(x), Q(x) συνεχείς συναρτήσεις.

Κάνουμε το μετασχηματισμό $v(x) = y^{1-n}(x)$

Και αναγόμαστε στη γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Δ.Ε. ΤΟΥ RICCATI

Είναι οι δ.ε. που μπορούν να πάρουν τη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

1) Κάνουμε το μετασχηματισμό $y(x) = u(x) + \dfrac{1}{z(x)}$

Όπου u(x) είναι γνωστή λύση της δ.ε. και αναγόμαστε στη γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης

$$\frac{dz}{dx} + (2P(x)u(x) + Q(x))z = -P(x)$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Δ.Ε. ΤΟΥ RICCATI

2) Αν κάνουμε το μετασχηματισμό

$$y(x) = \frac{v'(x)}{-P(x)v(x)}$$

αναγόμαστε στη γραμμική δ.ε. δεύτερης τάξης

$$v'' + \left(\frac{P'(x)}{P(x)} - Q(x)\right)v' + R(x)P(x)v = 0$$

ΠΛΗΡΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δ.ε πρώτης τάξης $$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

λέγονται πλήρεις δ.ε όταν υπάρχει συνάρτηση u(x,y) τέτοια ώστε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

Οι λύσεις της δ.ε δίνονται από τη σχέση $$u(x,y) = c$$

καθώς

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

ΠΛΗΡΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Κριτήριο:

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η δ.ε πλήρης, είναι να ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D = \text{πεδίο} \quad \text{ορισμού}$$

ΠΛΗΡΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

1) Από τις σχέσεις $$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

υπολογίζουμε την u(x,y)

Και η λύση είναι $$u(x,y) = c$$

2) $$u(x,y) = \int_{\alpha}^{x} P(t,y)dt + \int Q(\alpha,y)dy = c$$

όπου c = αυθαίρετη σταθερά και α = κατάλληλη σταθερά (το x πρέπει να μπορεί να πάρει την τιμή α)

ΠΛΗΡΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Όταν
$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

αναζητούμε μια συνάρτηση μ(x,y) τέτοια ώστε η παρακάτω δ.ε να είναι πλήρης

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

δηλαδή
$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$$

ΠΛΗΡΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Μια τέτοια συνάρτηση μ(z) όπου z=z(x,y) λέγεται ολοκληρωτικός πσράγοντας

$$\mu = \mu(z) = e^{\int f(z)dz}$$

$$f(z) = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial z}{\partial y} - Q\dfrac{\partial z}{\partial x}}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + \beta(x)y = f(x)$$ (μη-ομογενής)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + \beta(x)y = 0$$ (ομογενής)

όπου α(x), β(x), f(x) συνεχείς συναρτήσεις

Η γενική της λύση είναι το άθροισμα

Α) της γενικής λύσης της ομογενούς γραμ. δ.ε και

Β) μίας μερικής λύσης της μη-ομογενούς γραμ. δ.ε.

$$y(x) = y^o(x) + \omega(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \omega(x)$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ Δ.Ε. 2ης ΤΑΞΗΣ

Η ομογενής γραμ. δ.ε. 2ης τάξης $$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+\beta y=0$$

(όπου οι συντελεστές α, β είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί)
όταν το ρ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής της εξίσωσης $\rho^2+\alpha\rho+\beta=0$
έχει τις εξής δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις:

1) $\varphi_1(x)=e^{\rho_1 x},\quad \varphi_2(x)=e^{\rho_2 x}$ αν $\rho_1, \rho_2\in\Re$ και $\rho_1\neq\rho_2$

2) $\varphi_1(x)=e^{\rho x},\quad \varphi_2(x)=xe^{\rho x}$ αν $\rho_1, \rho_2\in\Re$ και $\rho_1=\rho_2=\rho$

3) $\varphi_1(x)=e^{\lambda x}\cos\mu x$ αν ρ_1, ρ_2 συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

$\varphi_2(x)=e^{\lambda x}\sin\mu x$ δηλαδή $\rho_1,\rho_2=\lambda\pm i\mu$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΛΥΣΕΩΝ

Η <u>γραμμική ανεξαρτησία</u> των λύσεων $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ διαπιστώνεται από την <u>ορίζουσα Wronsky</u>

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

Αν είναι $W \neq 0$ $\forall$ $x \in I$, οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΡΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Για να εφαρμοσθεί αυτή η μέθοδος στη γραμ. δ.ε. $2^{ης}$ τάξης

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} + \beta y = f(x)$$

πρέπει:

Α) α, β να είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί,

Β) η f(x) να έχει ειδική μορφή

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

i) αν $f(x)=(\beta_0 x^m+ \beta_1 x^{m-1}+\ldots+ \beta_{m-1}x+ \beta_m)e^{\lambda x}$

τότε:

η μερική λύση είναι η $\boxed{\omega(x) = x^{\nu} Q(x) e^{\lambda x}}$

όπου: $Q(x)$ <u>προσδιοριστέο</u> πολυώνυμο βαθμού m

ν είναι η πολλαπλότητα της ρίζας λ της χαρ. εξ. $\rho^2+\alpha\rho+\beta=0$

δηλαδή ν=0 αν λ δεν είναι ρίζα της χαρ. εξ.

ν=1 αν λ είναι απλή ρίζα της χαρ. εξ.

ν=2 αν λ είναι διπλή ρίζα της χαρ. εξ.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

ii) αν $f(x)=[P_1(x)\sigma\upsilon\nu kx + P_2(x)\eta\mu kx]e^{\lambda x}$

όπου $P_1(x)$, $P_2(x)$ πολυώνυμα βαθμών m_1, m_2 αντίστοιχα

τότε:

η μερική λύση είναι η $\boxed{\omega(x) = x^{\nu}[Q_1(x)\sigma\upsilon\nu kx + Q_2(x)\eta\mu kx]e^{\lambda x}}$

όπου: $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ <u>προσδιοριστέα</u> πολυώνυμα βαθμού $m=\max\{m_1,m_2\}$

ν είναι η πολλαπλότητα της ρίζας $\lambda+ik$ της χαρ. εξ. $\rho^2+\alpha\rho+\beta=0$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

iii) αν $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$

όπου: $f_i(x)$ είναι της μορφής (i) ή (ii)

τότε: χωρίζουμε την αρχική μη-ομογενή δ.ε. y''+αy'+βy=f(x) στις

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f_1(x) --- > \omega_1(x)$$

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f_2(x) --- > \omega_2(x)$$

....

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f_k(x) --- > \omega_k(x)$$

και το άθροισμα των μερικών λύσεων

$$\boxed{\omega(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x) + \ldots + \omega_k(x)}$$

είναι μερική λύση της αρχικής μη-ομογενής δ.ε.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΡΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Για να εφαρμοσθεί αυτή η μέθοδος πρέπει να γνωρίζουμε δύο γραμ. ανεξ. λύσεις $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ της ομογενούς γραμ. δ.ε.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\frac{dy}{dx}+\beta y=0$$

Βήματα:

1) Λύνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\varphi_1(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)&=0\\ c_1'(x)\varphi'_1(x)+c_2'(x)\varphi'_2(x)&=f(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned} &c_1'(x)\\ &c_2'(x)\end{aligned}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ης} ΤΑΞΗΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΡΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Βήματα:

2) Ολοκληρώνουμε τις λύσεις (θεωρώντας σταθερά ολοκλήρωσης μηδέν)

$$\begin{matrix} c_1'(x) = g_1(x) \\ c_2'(x) = g_2(x) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1(x) = \int g_1(x)dx \\ c_2(x) = \int g_2(x)dx \end{matrix}$$

3) Μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμ. δ.ε. είναι

$$\omega(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΑΞΗΣ n≥3

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ Δ.Ε.

Για να βρούμε n γραμ. ανεξ. λύσεις της ομογενούς γραμ. δ.ε. n τάξης

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

(όπου οι συντελεστές α_i είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί)

λύνουμε την χαρακτηριστική της εξίσωση

$$\rho^n + a_1 \rho^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\rho + a_n = 0$$

1) αν $\rho \in \Re$ απλή ρίζα της χ.ε., αντιστοιχεί η λύση

$$e^{\rho x}$$

2) αν $\rho \in \Re$ ρίζα της χ.ε. με πολλαπλότητα ν≥2, αντιστοιχούν οι ν γραμ. ανεξ. λύσεις

$$e^{\rho x}, \quad x e^{\rho x}, \quad \ldots, \quad x^{\nu-1} e^{\rho x}$$

3)αν ρ=λ+iμ ρίζα της χ.ε. με πολλαπλότητα k≥1, σε αυτή και τη συζυγή της αντιστοιχούν οι 2k γραμ. ανεξ. λύσεις

$$\begin{gathered} e^{\lambda x}\sigma\upsilon\nu\mu x, \quad x e^{\lambda x}\sigma\upsilon\nu\mu x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{\lambda x}\sigma\upsilon\nu\mu x \\ e^{\lambda x}\eta\mu\mu x, \quad x e^{\lambda x}\eta\mu\mu x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{\lambda x}\eta\mu\mu x \end{gathered}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ EULER

Οι δ.ε. της μορφής

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad x > 0 \quad (\acute{\eta} \quad x < 0)$$

(όπου οι συντελεστές $α_i$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί)
λέγονται <u>δ.ε. του Euler</u>

Θα εργασθούμε για n=3

$$x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = f(x), \quad x > 0 \quad (\acute{\eta} \quad x < 0)$$

Κάνουμε το μετασχηματισμό $x=e^t$ αν $x>0$ ή $x=-e^t$ αν $x<0$

Και βρίσκουμε τις σχέσεις

$$\boxed{x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}} \qquad \boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}} \qquad \boxed{x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}}$$

Αντικαθιστώντας τις στην αρχική δ.ε. του Euler προκύπτουν γραμ. δ.ε

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ Δ.Ε.

Όταν είναι γνωστή μια λύση $y_1(x)$ της δ.ε.

$$y'' + a(x)y' + \beta(x)y = 0$$

πώς θα βρούμε μια δεύτερη λύση $y_2(x)$ γραμ. ανεξ. της $y_1(x)$?

Βήματα:

1) Θέτουμε $y_2(x) = v(x)y_1(x) \quad \mu\varepsilon \quad v'(x) \neq 0$

2) Από την αντικατάσταση προκύπτει η δ.ε.

$$v''y_1 + v'(2y_1' + a(x)y_1) = 0$$

3) Θέτουμε $v'(x) = z(x)$

και αναγόμαστε στη δ.ε. πρώτης τάξης

$$y_1(x)\frac{dz}{dx} + [2y_1'(x) + a(x)y_1(x)]z = 0$$

που έχει τη γενική λύση $z(x) = g(x, k_1)$ όπου k_1 αυθαίρετη σταθερά

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ Δ.Ε.

4) Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$v(x) = \int g(x, k_1)dx + k_2$$

όπου k_1, k_2 αυθαίρετες σταθερές

5) Η δεύτερη λύση είναι $y_2(x) = v(x)y_1(x)$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Δ.Ε.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ

Σύστημα n δ.ε. με n άγνωστες συναρτήσεις

Ένα σύστημα δ.ε. το οποίο έχει μόνο παραγώγους πρώτης τάξης, όταν λυθεί (αν είναι δυνατόν) ως προς τις παραγώγους του, παίρνει την παρακάτω μορφή που λέγεται κανονική μορφή

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Δ.Ε.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ

Επίλυση για n=3

Στόχος: να προκύψει γραμ. δ.ε. n τάξης ως προς τη μία άγνωστη συνάρτηση

Παραγωγίζω την x_1'

έτσι ώστε να προκύψουν οι x_1'' και x_1'''

Από τις x_1' και x_1'' βρίσκω τα x_2 και x_3 ως προς x_1 x_1' x_1''

τα οποία και αντικαθιστώ στην εξίσωση του x_1'''

Έτσι προκύπτει γραμ.δ.ε. n τάξης από την οποία βρίσκω το x_1

Αντικαθιστώντας τις λύσεις βρίσκω και τα x_2 και x_3