Παράδειγμα 1 (σελ. 426 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+1} - y_k = k$$

$$y_{k+1} - q_k y_k = r_k \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} q_i\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1}\left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q_i\right) r_n \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Για την ε.δ. $y_{k+1} - y_k = k$ έχουμε $q_k = 1 \quad r_k = k$

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} 1\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1}\left(\prod_{i=n+1}^{k-1} 1\right) n = 1^k y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} 1^{(k-1)-(n+1)+1}\, n =$$

$$= 1^k y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} 1^{k-n-1}\, n = y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} n = y_0 + \sum_{n=1}^{k-1} n = \boxed{y_0 + \frac{(k-1)k}{2}}$$

Άσκηση 2α (σελ. 480 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+1} = 2y_k + 2^k$$

$$y_{k+1} - q_k y_k = r_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} q_i\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1}\left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q_i\right) r_n \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Για την ε.δ. $y_{k+1} - 2y_k = 2^k$ έχουμε $q_k = 2 \quad r_k = 2^k$

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} 2\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1}\left(\prod_{i=n+1}^{k-1} 2\right) 2^n = 2^k y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} 2^{(k-1)-(n+1)+1}\, 2^n =$$

$$= 2^k y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} 2^{k-n-1}\, 2^n = 2^k y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} 2^{k-1} = \boxed{2^k y_0 + k2^{k-1}}$$

<u>Άσκηση 2β</u> (σελ. 480 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+1} - y_k = 2k + 1$$

$$y_{k+1} - q_k y_k = r_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} q_i\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} \left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q_i\right) r_n \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

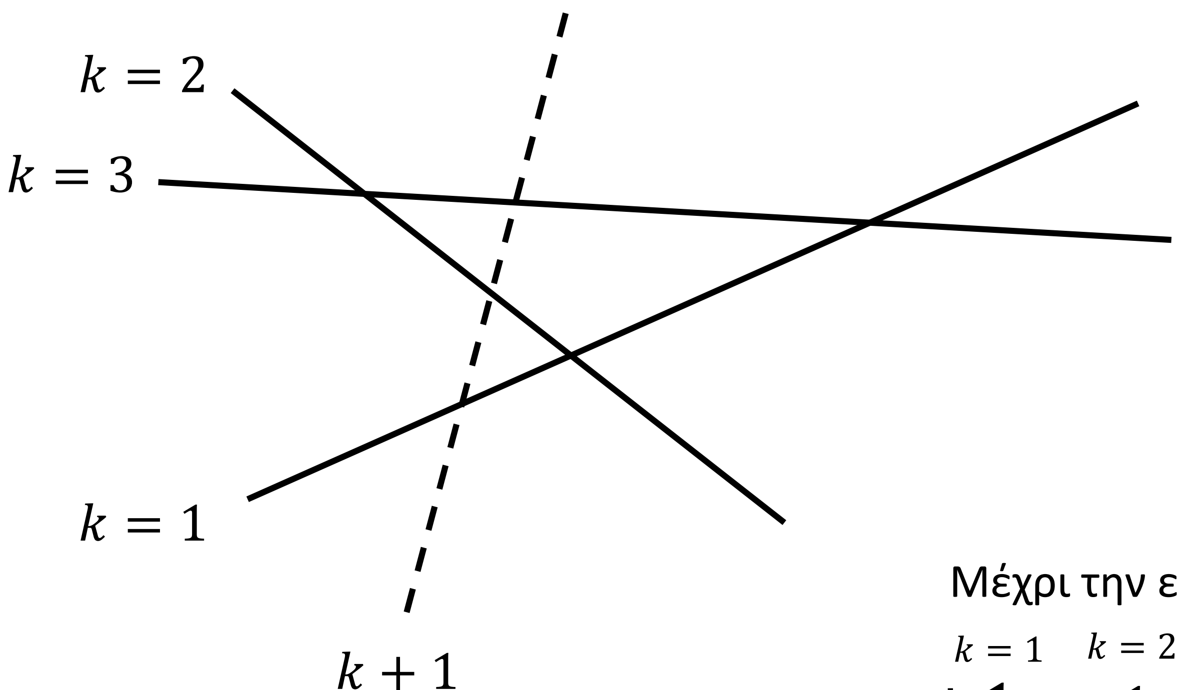
Για την ε.δ. $y_{k+1} - y_k = 2k + 1$ έχουμε $q_k = 1 \quad r_k = 2k + 1$

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} 1\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} \left(\prod_{i=n+1}^{k-1} 1\right)(2n+1) = 1^k y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} 1^{(k-1)-(n+1)+1}(2n+1) =$$

$$= y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} 1^{k-n-1}(2n+1) = y_0 + \sum_{n=0}^{k-1}(2n+1) = \boxed{y_0 + k^2}$$

Άσκηση (εκτός βιβλίου)

Άγουμε k ευθείες γραμμές πάνω σε ένα επίπεδο έτσι ώστε:
(α) να μην υπάρχουν μεταξύ αυτών παράλληλες και
(β) να μην υπάρχουν 3 ευθείες γραμμές που να περνούν από το ίδιο σημείο.
Σε πόσα τμήματα (όχι αναγκαστικά ίσα μεταξύ τους) διαιρείται το επίπεδο από τις k ευθείες?
y_k το πλήθος των τμημάτων του επιπέδου που σχηματίζονται άγοντας τις k ευθείες.



$$y_0 = 1$$
$$y_1 = 2$$
$$y_2 = 4$$
$$y_3 = 7$$

Μέχρι την ευθεία:

$$y_{k+1} = y_k \overset{k=1}{+1} \ \overset{k=2}{+1} + \ldots \ \overset{k}{+1} \ \overset{Μετα\ την\ k}{+1}$$
$$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = k + 1$$

Άσκηση 2γ (σελ. 480 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$\boxed{y_{k+1} - y_k = k + 1}$$

$$y_{k+1} - q_k y_k = r_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} q_i\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} \left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q_i\right) r_n \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Για την ε.δ. $y_{k+1} - y_k = k + 1$ έχουμε $q_k = 1 \quad r_k = k + 1$

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} 1\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} \left(\prod_{i=n+1}^{k-1} 1\right)(n+1) = 1^k y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} 1^{(k-1)-(n+1)+1}(n+1) =$$

$$= y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} 1^{k-n-1}(n+1) = y_0 + \sum_{n=0}^{k-1}(n+1) = \boxed{y_0 + \frac{k(k+1)}{2}}$$

Παράδειγμα 2α (σελ. 433 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$3y_{k+2} - 5y_{k+1} - 2y_k = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι

$$3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο πραγματικούς αριθμούς και συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$y_k^{(1)} = 2^k$$

$$y_k^{(2)} = (-\tfrac{1}{3})^k$$

Η γενική λύση της ε.δ. είναι:

$$\boxed{y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = c_1 2^k + c_2 \left(\frac{-1}{3}\right)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Άσκηση 5α (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο πραγματικούς αριθμούς και συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$y_k^{(1)} = 5^k$$

$$y_k^{(2)} = 3^k$$

Η γενική λύση της ε.δ. είναι:

$$y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = c_1 5^k + c_2 3^k$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

__Άσκηση 5β__ (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} + \sqrt{3}y_{k+1} + y_k = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι

$$\lambda^2 + \sqrt{3}\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = = 3 - 4 = -1 = i^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$$\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\alpha}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\beta}{r} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. :

$$y_k^{(1)} = r^k \cos k\theta = 1^k \cos\frac{5k\pi}{6}$$

$$y_k^{(2)} = r^k \sin k\theta = 1^k \sin\frac{5k\pi}{6}$$

Γενική λύση : $y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = c_1 \cos\frac{5k\pi}{6} + c_2 \sin\frac{5k\pi}{6} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

Άσκηση 5γ (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} + y_k = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = = -4 = 4i^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{4i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = +i & \lambda_2 = -i \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$\alpha = 0 \qquad \beta = 1$

r= $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \tfrac{\alpha}{r} = 0 \\ \sin\theta &= \tfrac{\beta}{r} = 1 \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{2}$$

Γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. :

$$y_k^{(1)} = r^k \cos k\theta = 1^k \cos\frac{k\pi}{2}$$

$$y_k^{(2)} = r^k \sin k\theta = 1^k \sin\frac{k\pi}{2}$$

Γενική λύση : $\boxed{y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = c_1 \cos\frac{k\pi}{2} + c_2 \sin\frac{k\pi}{2} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$

Άσκηση 5δ (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Άρα έχουμε μία διπλή ρίζα και συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$y_k^{(1)} = 2^k$$

$$y_k^{(2)} = k2^k$$

Η γενική λύση της ε.δ. είναι: $y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = c_1 2^k + c_2 k 2^k$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Παράδειγμα 3α (σελ. 437 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 4 \cdot 2^k$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο πραγματικούς αριθμούς και συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$y_k^{(1)} = 1^k = 1$$

$$y_k^{(2)} = 2^k$$

Η γενική λύση της ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^o = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = c_1 + c_2 2^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

<u>Παράδειγμα 3α</u> (σελ. 437 βιβλίου κ. Κυβεντίδη).... **ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 4 \cdot 2^k$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ. (<u>Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών</u>)

$$\left.\begin{array}{l} r_k = 4 \cdot 2^k \\ r_k = P(k) \cdot \beta^k \\ \underline{1^{\eta\varsigma}\ \mu o\rho\varphi\acute{\eta}\varsigma} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} P(k) = 4 \quad \rightarrow m = 0\ (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha) \\ \beta = 2 \\ \nu = 1 \end{array}$$

γιατί η β=2 είναι απλή (μία φορά) ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^{\mu} = k^{\nu} Q(k) \beta^k = k^1 \mathrm{A} 2^k = \mathrm{kA} 2^k$

A: προσδιοριστέα σταθερά

Η μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. επαληθεύει την ε.δ. και συνεπώς:

$$y_{k+2}^{\mu} - 3y_{k+1}^{\mu} + 2y_k^{\mu} = 4 \cdot 2^k \Rightarrow \mathrm{A}(k+2)2^{k+2} - 3\mathrm{A}(k+1)2^{k+1} + 2\mathrm{A}k2^k = 4 \cdot 2^k$$

$$\Rightarrow 4\mathrm{A}(k+2)\cancel{2^k} - 6\mathrm{A}(k+1)\cancel{2^k} + 2\mathrm{A}k\cancel{2^k} = 4 \cdot \cancel{2^k}$$

$$\Rightarrow 4\mathrm{A}(k+2) - 6\mathrm{A}(k+1) + 2\mathrm{A}k = 4$$

$$\Rightarrow \cancel{4Ak} + 8A - \cancel{6Ak} - 6A + \cancel{2Ak} = 4 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$$

Άρα, μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι η: $y_k^{\mu} = 2k2^k$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι:

$$\boxed{y_k = y_k^o + y_k^{\mu} = c_1 + c_2 2^k + 2k2^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Άσκηση 7α (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = 3 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο πραγματικούς αριθμούς και συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$y_k^{(1)} = 3^k$$

$$y_k^{(2)} = 5^k$$

Η γενική λύση της ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^o = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = c_1 3^k + c_2 5^k \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Άσκηση 7α (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = 3 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ. (Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών)

$$\left.\begin{array}{l} r_k = 3 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k \\ \quad r_k = r_k^1 + r_k^2 \end{array}\right\}$$

3ης μορφής (1ης μορφής + 1ης μορφής)

$$r_k^1 = 3 \cdot 2^k$$

$$r_k^2 = -4 \cdot 3^k$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης $y_k^{\mu_1}$ της μη-ομογενούς ε.δ.

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = 3 \cdot 2^k$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης $y_k^{\mu_2}$ της μη-ομογενούς ε.δ.

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = -4 \cdot 3^k$$

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^{\mu} = y_k^{\mu_1} + y_k^{\mu_2}$

<u>Άσκηση 7α</u> (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = 3 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ. $y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = 3 \cdot 2^k$

$r_k = 3 \cdot 2^k$

$r_k = P(k) \cdot \beta^k$

<u>1ης μορφής</u>

$P(k) = 3 \ \rightarrow m = 0\ (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha)$

$\beta = 2$

$\nu = 0$ γιατί η β=2 δεν είναι ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^{\mu_1} = k^\nu Q(k)\beta^k = k^0 \mathrm{A}2^k = \mathrm{A}2^k$

A: προσδιοριστέα σταθερά

Η μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. επαληθεύει την ε.δ. και συνεπώς:

$$y_{k+2}^{\mu_1} - 8y_{k+1}^{\mu_1} + 15y_k^{\mu_1} = 3 \cdot 2^k \Rightarrow \quad \mathrm{A}2^{k+2} - 8\mathrm{A}2^{k+1} + 15\mathrm{A}2^k = 3 \cdot 2^k$$

$$\Rightarrow 4\mathrm{A}\cancel{2^k} - 16\mathrm{A}\cancel{2^k} + 15\mathrm{A}\cancel{2^k} = 3 \cdot \cancel{2^k}$$

$$\Rightarrow 4\mathrm{A} - 16\mathrm{A} + 15\mathrm{A} = 3$$

$$\Rightarrow 3A = 3 \quad \Rightarrow A = 1$$

Άρα, μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι η: $y_k^{\mu_1} = 2^k$

Άσκηση 7α (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = 3 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ. $y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = -4 \cdot 3^k$

$$\left.\begin{array}{l} r_k = -4 \cdot 3^k \\ r_k = P(k) \cdot \beta^k \\ \underline{1^{\eta\varsigma}\ \mu o\rho\varphi\acute{\eta}\varsigma} \end{array}\right\} \begin{array}{l} P(k) = -4 \rightarrow m = 0\ (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha) \\ \beta = 3 \\ \nu = 1 \end{array}$$

γιατί η β=3 είναι απλή (μία φορά) ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^{\mu_1} = k^\nu Q(k)\beta^k = k^1 \mathrm{B}3^k = \mathrm{B}k3^k$

B: προσδιοριστέα σταθερά

Η μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. επαληθεύει την ε.δ. και συνεπώς:

$$y_{k+2}^{\mu_1} - 8y_{k+1}^{\mu_1} + 15y_k^{\mu_1} = -4 \cdot 3^k \Rightarrow \mathrm{B}(k+2)3^{k+2} - 8\mathrm{B}(k+1)3^{k+1} + 15Bk3^k = -4 \cdot 3^k$$

$$\Rightarrow 9\mathrm{B}(k+2)\cancel{3^k} - 24\mathrm{B}(k+1)\cancel{3^k} + 15Bk\cancel{3^k} = -4 \cdot \cancel{3^k}$$

$$\Rightarrow 9\mathrm{B}(k+2) - 24\mathrm{B}(k+1) + 15Bk = -4$$

$$\Rightarrow \cancel{9B}k + 18B - \cancel{24B}k - 24B + \cancel{15B}k = -4 \quad \Rightarrow -6B = -4 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^{\mu_2} = \frac{2}{3}k3^k$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι:

$$\boxed{y_k = y_k^o + y_k^\mu = c_1 3^k + c_2 5^k + 2^k + \tfrac{2}{3}k3^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Άσκηση 7δ (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 6k$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο πραγματικούς αριθμούς και συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$y_k^{(1)} = 1^k = 1$$

$$y_k^{(2)} = k1^k = k$$

Η γενική λύση της ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^o = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = c_1 + c_2 k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

<u>Άσκηση 7δ</u> (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 6k$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ. $y_{k+2} - 2y_{k+1} + 1y_k = 6k$

$r_k = 6k$

$r_k = P(k) \cdot \beta^k$ <u>1ης μορφής</u>

$$\left.\begin{array}{l} P(k) = 6\mathrm{k} \to m = 1 \\ \beta = 1 \\ \nu = 2 \quad \text{γιατί η β=1 είναι διπλή ρίζα της χ.ε.} \end{array}\right.$$

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^{\mu} = k^{\nu} Q(k) \beta^k = k^2(\mathrm{A}k + \mathrm{B})1^k \Rightarrow$

Α, Β: προσδιοριστέες σταθερές $\Rightarrow y_k^{\mu} = k^2(\mathrm{A}k + \mathrm{B})$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. επαληθεύει την ε.δ. και συνεπώς:

$$y_{k+2}^{\mu} - 2y_{k+1}^{\mu} + y_k^{\mu} = 6k \Rightarrow$$

$$(k+2)^2[A(k+2)+B] - 2(k+1)^2[A(k+1)+B] + k^2(Ak+B) = 6k \Rightarrow$$

$$(k^2+4k+4)(Ak+2A+B) - 2(k^2+2k+1)(Ak+A+B) + k^2(Ak+B) = 6k \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6Ak + 6A + 2B = 6k \quad \Rightarrow \begin{cases} 6A = 6 \\ 6A + 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \end{cases}$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι η: $y_k^{\mu} = k^2(k-3)$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι:

$$\boxed{y_k = y_k^o + y_k^{\mu} = c_1 + c_2 k + k^2(k-3) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

<u>Άσκηση 8β</u> (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 6k \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 2$$

Στην άσκηση 7δ βρήκαμε τη γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ.:

$$y_k = c_1 + c_2 k + k^2(k-3)$$

Τώρα θα χρησιμοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες στη γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. για να υπολογίσουμε τα c_1, c_2

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 0 + 0(0-3) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ y_1 = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 1 + 1(1-3) = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 - 2 = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Άρα, η λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι:

$$y_k = 1 + 3k + k^2(k-3)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Άσκηση 2β (σελ. 480 βιβλίου κ. Κυβεντίδη). Αυτή η άσκηση έχει λυθεί ξανά με τη θεωρία των ε.δ. 1ης τάξης.

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+1} - y_k = 2k + 1$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι

$$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Άρα, η γενική λύση της ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^o = c \cdot 1^k = c$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ.:

$$\left.\begin{aligned} r_k &= 2k+1 \\ r_k &= \underbrace{P(k)\cdot \beta^k}_{1^{\eta\varsigma}\ \mu o \rho \varphi \acute{\eta}\varsigma} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &P(k) = 2\mathrm{k} + 1 \rightarrow m = 1 \\ &\beta = 1 \\ &\nu = 1 \end{aligned}$$

γιατί η β=1 είναι απλή (μία φορά) ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^\mu = k^\nu Q(k)\beta^k = k^1(\mathrm{A}k + \mathrm{B})1^k \Rightarrow$

Α, Β: προσδιοριστέες σταθερές $\Rightarrow y_k^\mu = k(\mathrm{A}k + \mathrm{B})$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. επαληθεύει την ε.δ. και συνεπώς:

$$y_{k+1}^\mu - y_k^\mu = 2k + 1 \Rightarrow (k+1)[A(k+1) + B] - k(Ak + B) = 2k + 1 \Rightarrow$$

$$(k+1)[Ak + A + B] - k(Ak + B) = 2k + 1 \Rightarrow$$

$$\cancel{Ak^2} + Ak + \cancel{Bk} + Ak + A + B - \cancel{Ak^2} - \cancel{Bk} = 2k + 1 \Rightarrow 2Ak + A + B = 2k + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^\mu = k^2$

Γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ.: $y_k = c + k^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Άσκηση 6γ (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} + y_k = -2cos\frac{k\pi}{2}$$

Στην άσκηση 5γ βρήκαμε τη γενική λύση της ομογενούς ε.δ.: $y_k^0 = c_1 \cos\frac{k\pi}{2} + c_2 \sin\frac{k\pi}{2}$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ. $y_{k+2} + y_k = -2cos\frac{k\pi}{2}$

$$r_k = -2cos\frac{k\pi}{2}$$

$$r_k = \beta^k[P_1(k)\cos(k\gamma) + +P_2(k)\sin(k\gamma)]$$

2ης μορφής

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P_1(k) = -2 \ \rightarrow m_1 = 0\ (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha) \\ P_2(k) = 0 \quad \rightarrow m_2 = 0\ (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha) \end{array}\right\} m = max\{m_1, m_2\} = 0\ (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha) \\ \beta = 1 \\ \gamma = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$\beta e^{i\gamma} = \beta(cos\gamma + isin\gamma) = 1\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = i$$

Άρα ν=1 γιατί η i είναι απλή (μία φορά) ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι:

$$y_k^\mu = k^\nu \beta^k[Q_1(k)\cos(k\gamma) + Q_2\ (k)\sin(k\gamma)] =$$
$$= k^1 1^k[A\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + B\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)] =$$
$$= Ak\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + Bk\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$Q_1(k)$ και $Q_2(k)$ προσδιοριστέα πολυώνυμα βαθμού $m=max\{m_1,m_2\}$

Α, Β: προσδιοριστέες σταθερές

Άσκηση 6γ (σελ. 481 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ε.δ.)

$$y_{k+2} + y_k = -2cos\frac{k\pi}{2}$$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. επαληθεύει την ε.δ. και συνεπώς:

$$y^{\mu}_{k+2} + y^{\mu}_{k} = -2cos\frac{k\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(k+2)\cos\left(\frac{(k+2)\pi}{2}\right) + B(k+2)\sin\left(\frac{(k+2)\pi}{2}\right) + Ak\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + Bk\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = -2cos\frac{k\pi}{2} \qquad (1)$$

$$\sin(a+b) = sina \cdot cosb + sinb \cdot cosa$$
$$\cos(a+b) = cosa \cdot cosb - sina \cdot sinb$$

$$\cos\left(\frac{(k+2)\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) = cos\frac{k\pi}{2}\overset{-1}{cos\pi} - sin\frac{k\pi}{2}\overset{0}{sin\pi} = -cos\frac{k\pi}{2} \qquad (2)$$

$$sin\left(\frac{(k+2)\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) = sin\frac{k\pi}{2}\overset{-1}{cos\pi} + \overset{0}{sin\pi}cos\frac{k\pi}{2} = -sin\frac{k\pi}{2} \qquad (3)$$

$$(1) \overset{(2,3)}{\Longrightarrow} A(k+2)\left(-cos\frac{k\pi}{2}\right) + B(k+2)\left(-sin\frac{k\pi}{2}\right) + Ak\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + Bk\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = -2cos\frac{k\pi}{2}$$

$$\Rightarrow (-Ak - 2A + Ak)cos\frac{k\pi}{2} + (-Bk - 2B + Bk)sin\frac{k\pi}{2} = -2cos\frac{k\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -2Acos\frac{k\pi}{2} - 2Bsin\frac{k\pi}{2} = -2cos\frac{k\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} -2A = -2 \\ -2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

Άρα, μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι η: $y^{\mu}_{k} = k\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

Γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ.: $y_k = c_1\cos\frac{k\pi}{2} + c_2\sin\frac{k\pi}{2} + k\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

Άσκηση 8γ (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{k+3} + y_k = 2 \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{-1}{2}, \quad y_2 = \frac{5}{2}$$

Πρώτα θα βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (μη-ομογενούς) και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες.

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. είναι:

$\lambda^3 + 1 = 0$ Μία ρίζα της είναι η $\lambda_1=-1$ αφού $(-1)^3+1=0$

$$\left.\begin{array}{cccc|c}
\lambda^3 & \lambda^2 & \lambda^1 & \lambda^0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & -1 & 1 & -1 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 & \\
\lambda^2 & \lambda^1 & \lambda^0 & &
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$$

Άσκηση 8γ (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{k+3} + y_k = 2 \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{-1}{2}, \quad y_2 = \frac{5}{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = 1 - 4 = -3 = 3i^2$$

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{3i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \left\{ \lambda_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i \quad \lambda_3 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i \right.$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $\lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \qquad \beta = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \tfrac{\alpha}{r} = \tfrac{1}{2} \\ \sin\theta &= \tfrac{\beta}{r} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \tfrac{\pi}{3} \ \rightarrow 60°$$

Γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. :

$$y_k^{(1)} = \lambda_1^k = (-1)^k$$

$$y_k^{(2)} = r^k \cos k\theta = 1^k \cos\frac{k\pi}{3}$$

$$y_k^{(3)} = r^k \sin k\theta = 1^k \sin\frac{k\pi}{3}$$

Γενική λύση ομογενούς ε.δ.:

$$y_k^0 = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} + c_3 y_k^{(3)} = c_1(-1)^k + c_2 \cos\frac{k\pi}{3} + c_3 \sin\frac{k\pi}{3}$$

Άσκηση 8γ (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{k+3} + y_k = 2 \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{-1}{2}, \quad y_2 = \frac{5}{2}$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ. $y_{k+3} + y_k = 2$

$r_k = 2$

$r_k = P(k) \cdot \beta^k$

1ης μορφής

$P(k) = 2 \rightarrow m = 0\ (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha)$

$\beta = 1$

$\nu = 0$ γιατί η β=1 δεν είναι ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^{\mu} = k^{\nu} Q(k) \beta^k \quad = k^0 \mathrm{A} 1^k = \mathrm{A}$

Α: προσδιοριστέα σταθερά

Η μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. επαληθεύει την ε.δ. και συνεπώς:

$$y_{k+3}^{\mu} + y_k^{\mu} = 2 \Rightarrow \quad \mathrm{A} + \mathrm{A} = 2 \ \Rightarrow 2\mathrm{A} = 2 \ \Rightarrow \mathrm{A} = 1$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $y_k^{\mu} = 1$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι:

$$y_k = y_k^{o} + y_k^{\mu} = c_1(-1)^k + c_2 \cos\frac{k\pi}{3} + c_3 \sin\frac{k\pi}{3} + 1 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Άσκηση 8γ (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{k+3} + y_k = 2 \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{-1}{2}, \quad y_2 = \frac{5}{2}$$

Βρήκαμε τη γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ.:

$$y_k = c_1(-1)^k + c_2 \cos\frac{k\pi}{3} + c_3 \sin\frac{k\pi}{3} + 1$$

Τώρα θα χρησιμοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες στη γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. για να υπολογίσουμε τα c_1, c_2, c_3

$$y_0 = 1 \Rightarrow c_1(-1)^0 + c_2 \overset{1}{\cos 0} + c_3 \overset{0}{\sin 0} + 1 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 0}$$

$$y_1 = \frac{-1}{2} \Rightarrow c_1(-1)^1 + c_2 \overset{1/2}{\cos\frac{\pi}{3}} + c_3 \overset{\sqrt{3}/2}{\sin\frac{\pi}{3}} + 1 = \frac{-1}{2} \Rightarrow -c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 + 1 = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 = \frac{-3}{2}}$$

$$y_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow c_1(-1)^2 + c_2 \overset{-1/2}{\cos\frac{2\pi}{3}} + c_3 \overset{\sqrt{3}/2}{\sin\frac{2\pi}{3}} + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 + 1 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 = \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 0 \end{cases}}$$

Άρα, η λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι:

$$\boxed{\begin{gathered} y_k = (-1)^k - \cos\frac{k\pi}{3} + 1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

<u>Παράδειγμα 2</u> (σελ. 465-468 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ. $\begin{array}{lr} x_{k+1} = 2x_k - 4y_k & (1) \\ y_{k+1} = -x_k + 5y_k & (2) \end{array}$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

Πρώτα θα βρούμε τη γενική λύση του συστήματος (x_k και y_k) και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες.

Επιλέγω να βρω **πρώτα το x_k** και θέτω k+1 αντί για k στη σχέση (1):

$$x_{k+2} = 2x_{k+1} - 4y_{k+1} \overset{(2)}{\Rightarrow} x_{k+2} = 2x_{k+1} - 4(-x_k + 5y_k)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_{k+2} = 2x_{k+1} + 4x_k - 20y_k \\ (1)\ \ x_{k+1} = 2x_k - 4y_k \Rightarrow y_k = \frac{-1}{4}x_{k+1} + \frac{1}{2}x_k \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = 2x_{k+1} + 4x_k - 20\left(\frac{-1}{4}x_{k+1} + \frac{1}{2}x_k\right)$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = 2x_{k+1} + 4x_k + 5x_{k+1} - 10x_k$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = 7x_{k+1} - 6x_k$$

$$\Rightarrow x_{k+2} - 7x_{k+1} + 6x_k = 0$$

Παράδειγμα 2 (σελ. 465-468 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.
$$x_{k+1} = 2x_k - 4y_k \quad (1)$$
$$y_{k+1} = -x_k + 5y_k \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. $x_{k+2} - 7x_{k+1} + 6x_k = 0$ είναι

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο πραγματικούς αριθμούς και συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$x_k^{(1)} = 1^k = 1$$

$$x_k^{(2)} = 6^k$$

Η γενική λύση της ε.δ. είναι:

$$x_k = c_1 x_k^{(1)} + c_2 x_k^{(2)} = c_1 + c_2 6^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>Παράδειγμα 2</u> (σελ. 465-468 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ. $\begin{array}{ll} x_{k+1} = 2x_k - 4y_k & (1) \\ y_{k+1} = -x_k + 5y_k & (2) \end{array}$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

Αφού υπολογίσαμε το x_k πρέπει να βρούμε και το y_k

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\ x_{k+1} = 2x_k - 4y_k \Rightarrow & y_k = \frac{-1}{4}x_{k+1} + \frac{1}{2}x_k \\ \text{Έχουμε βρει ότι} & x_k = c_1 + c_2 6^k \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{-1}{4}(c_1 + c_2 6^{k+1}) + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 6^k)$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{-1}{4}c_1 - \frac{6}{4}c_2 6^k + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 6^k \Rightarrow y_k = \frac{-1}{4}c_1 - \frac{3}{2}c_2 6^k + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 6^k$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{1}{4}c_1 - c_2 6^k$$

Συνεπώς, εργαζόμενοι αρχικά με το x_k βρίσκουμε ότι τα x_k και y_k είναι

$$x_k = c_1 + c_2 6^k$$
$$y_k = \frac{1}{4}c_1 - c_2 6^k$$

Παράδειγμα 2 (σελ. 465-468 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.

$$x_{k+1} = 2x_k - 4y_k \quad (1)$$
$$y_{k+1} = -x_k + 5y_k \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

Βρήκαμε ότι

$$x_k = c_1 + c_2 6^k$$
$$y_k = \frac{1}{4}c_1 - c_2 6^k$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες για να υπολογίσουμε τα c_1, c_2

$$\begin{aligned} x_0 = 1 &\Rightarrow c_1 + c_2 6^0 = 1 \Rightarrow & c_1 + c_2 = 1 \\ y_0 = -2 &\Rightarrow \frac{1}{4}c_1 - c_2 6^0 = -2 \Rightarrow & \frac{1}{4}c_1 - c_2 = -2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-4}{5} \\ c_2 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

Άρα, η λύση του συστήματος ε.δ. είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} x_k &= \frac{-4}{5} + \frac{9}{5}6^k \\ y_k &= \frac{-1}{5} - \frac{9}{5}6^k \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \dots}$$

Παράδειγμα 2 (σελ. 465-468 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.

$$x_{k+1} = 2x_k - 4y_k \quad (1)$$
$$y_{k+1} = -x_k + 5y_k \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

Πρώτα θα βρούμε τη γενική λύση του συστήματος (x_k και y_k) και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες.

Επιλέγω να βρω **πρώτα το y_k** και θέτω k+1 αντί για k στη σχέση (2):

$$y_{k+2} = -x_{k+1} + 5y_{k+1} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_{k+2} = -(2x_k - 4y_k) + 5y_{k+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y_{k+2} = -2x_k + 4y_k + 5y_{k+1} \\ (2) y_{k+1} = -x_k + 5y_k \Rightarrow x_k = -y_{k+1} + 5y_k \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{k+2} = -2(-y_{k+1} + 5y_k) + 4y_k + 5y_{k+1}$$

$$\Rightarrow y_{k+2} = 2y_{k+1} - 10y_k + 4y_k + 5y_{k+1}$$

$$\Rightarrow y_{k+2} = 7y_{k+1} - 6y_k$$

$$\Rightarrow y_{k+2} - 7y_{k+1} + 6y_k = 0$$

Παράδειγμα 2 (σελ. 465-468 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ... ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.
$$x_{k+1} = 2x_k - 4y_k \quad (1)$$
$$y_{k+1} = -x_k + 5y_k \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. $y_{k+2} - 7y_{k+1} + 6y_k = 0$ είναι

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο πραγματικούς αριθμούς και συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$y_k^{(1)} = 1^k = 1$$

$$y_k^{(2)} = 6^k$$

Η γενική λύση της ε.δ. είναι:

$$y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = c_1 + c_2 6^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Παράδειγμα 2 (σελ. 465-468 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ … ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.
$$x_{k+1} = 2x_k - 4y_k \quad (1)$$
$$y_{k+1} = -x_k + 5y_k \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

Αφού υπολογίσαμε το y_k πρέπει να βρούμε και το x_k

$$\left.\begin{array}{ll} (2) y_{k+1} = -x_k + 5y_k \Rightarrow & x_k = -y_{k+1} + 5y_k \\ \text{Έχουμε βρει ότι} & y_k = c_1 + c_2 6^k \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k = -\,(c_1 + c_2 6^{k+1}) + 5\,(c_1 + c_2 6^k)$$

$$\Rightarrow x_k = -c_1 - 6c_2 6^k + 5c_1 + 5c_2 6^k$$

$$\Rightarrow x_k = 4c_1 - c_2 6^k$$

Συνεπώς, εργαζόμενοι αρχικά με το y_k βρίσκουμε ότι τα x_k και y_k είναι

$$x_k = 4c_1 - c_2 6^k$$
$$y_k = c_1 + c_2 6^k$$

Παράδειγμα 2 (σελ. 465-468 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ … ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ. $x_{k+1} = 2x_k - 4y_k \quad (1)$

$$y_{k+1} = -x_k + 5y_k \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

Βρήκαμε ότι
$$x_k = 4c_1 - c_2 6^k$$
$$y_k = c_1 + c_2 6^k$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες για να υπολογίσουμε τα c_1, c_2

$$\begin{array}{lll} x_0 = 1 \Rightarrow & 4c_1 - c_2 6^0 = 1 \Rightarrow & 4c_1 - c_2 = 1 \\ y_0 = -2 \Rightarrow & c_1 + c_2 6^0 = -2 \Rightarrow & c_1 + c_2 = -2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-1}{5} \\ c_2 = \frac{-9}{5} \end{cases}$$

Άρα, η λύση του συστήματος ε.δ. είναι:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_k = \dfrac{-4}{5} + \dfrac{9}{5} 6^k & \\ & k = 0, 1, 2, \ldots \\ y_k = \dfrac{-1}{5} - \dfrac{9}{5} 6^k & \end{array}}$$

Παράδειγμα 2 (σελ. 465-468 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.

$$x_{k+1} = 2x_k - 4y_k \quad (1)$$
$$y_{k+1} = -x_k + 5y_k \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

Εργαζόμενοι αρχικά με το $\mathbf{x_k}$ βρίσκουμε ότι τα x_k και y_k είναι

$$x_k = c_1 + c_2 6^k$$
$$y_k = \frac{1}{4}c_1 - c_2 6^k$$

Και εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε ότι τα x_k και y_k είναι

$$x_k = \frac{-4}{5} + \frac{9}{5}6^k$$
$$y_k = \frac{-1}{5} - \frac{9}{5}6^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Εργαζόμενοι αρχικά με το $\mathbf{y_k}$ βρίσκουμε ότι τα x_k και y_k είναι

$$x_k = 4c_1 - c_2 6^k$$
$$y_k = c_1 + c_2 6^k$$

Και εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε ότι τα x_k και y_k είναι

$$x_k = \frac{-4}{5} + \frac{9}{5}6^k$$
$$y_k = \frac{-1}{5} - \frac{9}{5}6^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Προσοχή: Δεν χρειάζεται κάποιος να λύσει την άσκηση και με τις 2 μεθοδολογίες. Εδώ το κάναμε καθαρά για εκπαιδευτικούς λόγους.

<u>Άσκηση 11γ</u> (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.
$$x_{k+1} = 5x_k + 6y_k + 1 \quad (1)$$
$$y_{k+1} = -6x_k - 7y_k - 1 \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = \frac{-3}{2}$

Πρώτα θα βρούμε τη γενική λύση του συστήματος (x_k και y_k) και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες.

Επιλέγω να βρω **πρώτα το x_k** και θέτω k+1 αντί για k στη σχέση (1):

$$x_{k+2} = 5x_{k+1} + 6y_{k+1} + 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} x_{k+2} = 5x_{k+1} + 6(-6x_k - 7y_k - 1) + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_{k+2} = 5x_{k+1} - 36x_k - 42y_k - 5 \\ (1) \;\; x_{k+1} = 5x_k + 6y_k + 1 \Rightarrow y_k = \frac{1}{6}(x_{k+1} - 5x_k - 1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = 5x_{k+1} - 36x_k - 42 \cdot \frac{1}{6}(x_{k+1} - 5x_k - 1) - 5$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = 5x_{k+1} - 36x_k - 7x_{k+1} + 35x_k + 7 - 5$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = -2x_{k+1} - x_k + 2$$

$$\Rightarrow x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = 2$$

Άσκηση 11γ (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ. $x_{k+1} = 5x_k + 6y_k + 1 \quad (1)$

$y_{k+1} = -6x_k - 7y_k - 1 \quad (2)$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = \frac{-3}{2}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = 0$ είναι

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο πραγματικούς αριθμούς και συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$x_k^{(1)} = (-1)^k$$

$$x_k^{(2)} = k(-1)^k$$

Η γενική λύση της ομογενούς ε.δ. είναι:

$$x_k^o = c_1 x_k^{(1)} + c_2 x_k^{(2)} = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Άσκηση 11γ (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **... ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ. $x_{k+1} = 5x_k + 6y_k + 1$ (1)

$y_{k+1} = -6x_k - 7y_k - 1$ (2)

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = \frac{-3}{2}$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = 2$

$r_k = 2$

$r_k = P(k) \cdot \beta^k$

1ης μορφής

$P(k) = 2 \rightarrow m = 0$

$\beta = 1$

$\nu = 0$ γιατί η β=1 δεν είναι ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $x_k^\mu = k^\nu Q(k)\beta^k \quad = k^0 A 1^k \Rightarrow$

Α: προσδιοριστέα σταθερά $\Rightarrow x_k^\mu = A$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. επαληθεύει την ε.δ. και συνεπώς:

$$x_{k+2}^\mu + 2x_{k+1}^\mu + x_k^\mu = 2 \Rightarrow A + 2A + A = 2 \Rightarrow 4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι η: $x_k^\mu = \dfrac{1}{2}$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι:

$$x_k = x_k^o + x_k^\mu = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k + \frac{1}{2}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

<u>Άσκηση 11γ</u> (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.
$$x_{k+1} = 5x_k + 6y_k + 1 \quad (1)$$
$$y_{k+1} = -6x_k - 7y_k - 1 \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = \frac{-3}{2}$

Αφού υπολογίσαμε το x_k πρέπει να βρούμε και το y_k

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \ x_{k+1} = 5x_k + 6y_k + 1 \Rightarrow y_k = \frac{1}{6}(x_{k+1} - 5x_k - 1) \\ \text{Έχουμε βρει ότι} \quad x_k = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k + \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{1}{6}[c_1(-1)^{k+1} + c_2(k+1)(-1)^{k+1} + \frac{1}{2} - 5c_1(-1)^k - 5c_2 k(-1)^k - \frac{5}{2} - 1]$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{1}{6}[-c_1(-1)^k - c_2 k(-1)^k - c_2(-1)^k - 5c_1(-1)^k - 5c_2 k(-1)^k - 3]$$

$$\Rightarrow y_k = -c_1(-1)^k - \frac{1}{6}c_2(-1)^k - c_2 k(-1)^k - \frac{1}{2}$$

Συνεπώς, εργαζόμενοι αρχικά με το x_k βρίσκουμε ότι τα x_k και y_k είναι

$$x_k = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k + \frac{1}{2}$$
$$y_k = -c_1(-1)^k - \frac{1}{6}c_2(-1)^k - c_2 k(-1)^k - \frac{1}{2}$$

<u>Άσκηση 11γ</u> (σελ. 482 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.
$$x_{k+1} = 5x_k + 6y_k + 1 \quad (1)$$
$$y_{k+1} = -6x_k - 7y_k - 1 \quad (2)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = \frac{-3}{2}$

Βρήκαμε ότι $x_k = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k + \frac{1}{2}$

$$y_k = -c_1(-1)^k - \frac{1}{6}c_2(-1)^k - c_2 k(-1)^k - \frac{1}{2}$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες για να υπολογίσουμε τα c_1, c_2

$$x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \quad c_1(-1)^0 + c_2 0(-1)^0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \; c_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$y_0 = \frac{-3}{2} \Rightarrow -c_1(-1)^0 - \frac{1}{6}c_2(-1)^0 - c_2 0(-1)^0 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$-c_1 - \frac{1}{6}c_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα, η λύση του συστήματος ε.δ. είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} x_k &= (-1)^k + \frac{1}{2} \\ y_k &= -(-1)^k - \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

<u>Άσκηση 12α</u> (σελ. 483 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.
$$x_{k+1} = -3x_k - 2y_k - 2^{k+1} \quad (1)$$
$$y_{k+1} = 2x_k + y_k + 2^k \quad (2)$$

Πρώτα θα βρούμε τη γενική λύση του συστήματος (x_k και y_k) και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες.

Επιλέγω να βρω **πρώτα το x_k** και θέτω k+1 αντί για k στη σχέση (1):

$$x_{k+2} = -3x_{k+1} - 2y_{k+1} - 2^{k+2} \overset{(2)}{\Rightarrow} x_{k+2} = -3x_{k+1} - 2\left(2x_k + y_k + 2^k\right) - 4\cdot 2^k$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow x_{k+2} = -3x_{k+1} - 4x_k - 2y_k - 6\cdot 2^k \\ &(1)\;\; x_{k+1} = -3x_k - 2y_k - 2^{k+1} \Rightarrow y_k = \tfrac{1}{2}(-x_{k+1} - 3x_k - 2^{k+1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = -3x_{k+1} - 4x_k - 2\cdot\tfrac{1}{2}\left(-x_{k+1} - 3x_k - 2\cdot 2^k\right) - 6\cdot 2^k$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = -3x_{k+1} - 4x_k + x_{k+1} + 3x_k + 2\cdot 2^k - 6\cdot 2^k$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = -2x_{k+1} - x_k - 4\cdot 2^k$$

$$\Rightarrow x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = -4\cdot 2^k$$

<u>Άσκηση 12α</u> (σελ. 483 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ. $x_{k+1} = -3x_k - 2y_k - 2^{k+1}$ (1)

$y_{k+1} = 2x_k + y_k + 2^k$ (2)

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της ε.δ. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = 0$ είναι

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες δύο πραγματικούς αριθμούς και συνεπώς
οι γραμμικά ανεξάρτητα ρίζες της ε.δ. είναι:

$$x_k^{(1)} = (-1)^k$$

$$x_k^{(2)} = k(-1)^k$$

Η γενική λύση της ομογενούς ε.δ. είναι:

$$x_k^o = c_1 x_k^{(1)} + c_2 x_k^{(2)} = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>Άσκηση 12α</u> (σελ. 483 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ.
$$x_{k+1} = -3x_k - 2y_k - 2^{k+1} \quad (1)$$
$$y_{k+1} = 2x_k + y_k + 2^k \quad (2)$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της ε.δ. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = -4 \cdot 2^k$

$r_k = -4 \cdot 2^k$

$r_k = P(k) \cdot \beta^k$ 1ης μορφής

$P(k) = -4 \rightarrow m = 0$

$\beta = 2$

$\nu = 0$ γιατί η β=2 δεν είναι ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι: $x_k^{\mu} = k^{\nu} Q(k) \beta^k = k^0 A 2^k \Rightarrow$

Α: προσδιοριστέα σταθερά $\Rightarrow x_k^{\mu} = A2^k$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. επαληθεύει την ε.δ. και συνεπώς:

$$x_{k+2}^{\mu} + 2x_{k+1}^{\mu} + x_k^{\mu} = -4 \cdot 2^k \Rightarrow A2^{k+2} + 2A2^{k+1} + A2^k = -4 \cdot 2^k$$

$$\Rightarrow 4A2^k + 4A2^k + A2^k = -4 \cdot 2^k \quad \Rightarrow 9A = -4 \Rightarrow A = \frac{-4}{9}$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι η: $x_k^{\mu} = \frac{-4}{9} 2^k = \frac{-2^{k+2}}{9}$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς ε.δ. είναι:

$$x_k = x_k^o + x_k^{\mu} = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k - \frac{2^{k+2}}{9}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>Άσκηση 12α</u> (σελ. 483 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να βρεθεί η λύση του συστήματος ε.δ. $x_{k+1} = -3x_k - 2y_k - 2^{k+1}$ (1)

$y_{k+1} = 2x_k + y_k + 2^k$ (2)

Αφού υπολογίσαμε το x_k πρέπει να βρούμε και το y_k

$$\left.\begin{array}{l} (1)\quad x_{k+1} = -3x_k - 2y_k - 2^{k+1} \Rightarrow y_k = \frac{1}{2}(-x_{k+1} - 3x_k - 2^{k+1}) \\ \text{Έχουμε βρει ότι} \quad x_k = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k - \frac{2^{k+2}}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y_k = \tfrac{1}{2}\left[-c_1(-1)^{k+1} - c_2(k+1)(-1)^{k+1} - \frac{2^{k+3}}{9} - 3c_1(-1)^k - 3c_2 k(-1)^k + 3\cdot\frac{2^{k+2}}{9} - 2^{k+1}\right]$$

$$\Rightarrow y_k = \cdots \quad \Rightarrow y_k = -c_1(-1)^k - c_2 k(-1)^k + \frac{1}{2}c_2(-1)^k + \frac{2^k}{9}$$

Συνεπώς, εργαζόμενοι αρχικά με το x_k βρίσκουμε ότι τα x_k και y_k είναι

$$x_k = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k - \frac{2^{k+2}}{9}$$

$$y_k = -c_1(-1)^k - c_2 k(-1)^k + \frac{1}{2}c_2(-1)^k + \frac{2^k}{9}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$