Παράδειγμα 1 (σελ. 282 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $x^2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+1}{3y^2+1}$ όταν $y(2)=3$

$$x^2\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+1}{3y^2+1}\Rightarrow \quad (3y^2+1)dy=\frac{x^2+1}{x^2}dx \qquad x\neq 0$$

$$\Rightarrow (3y^2+1)dy=(1+\frac{1}{x^2})dx$$

$$\xRightarrow{\chi\omega\rho\iota\zeta o\mu\varepsilon\nu\omega\nu\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\omega\nu}\int(3y^2+1)dy=\int(1+\frac{1}{x^2})dx+c$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow y^3+y=x-\dfrac{1}{x}+c \\ \\ y(2)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \quad 3^3+3=2-\frac{1}{2}+c \quad \Rightarrow c=28.5$$

Συνεπώς, η λύση της δ.ε. είναι: $\boxed{y^3+y=x-\frac{1}{x}+28.5}$

Άσκηση 1 (σελ. 296 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $\boxed{y^2dx = (xy - x^2)dy}$

Ομογενής δ.ε. 1^{ης} τάξης

$$y^2dx = (xy - x^2)dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy-x^2}{x^2}} \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1} \quad (1)$$

$$(2)$$

Θέτω: $\frac{y(x)}{x} = z(x) \Rightarrow \quad y(x) = x \cdot z(x) \Rightarrow \quad \frac{dy(x)}{dx} = z(x) + x\frac{dz(x)}{dx} \quad (3)$

$$(1) \overset{(2,3)}{\Longrightarrow} z + x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{z-1} \Rightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{z-1} - z = \frac{z^2 - z(z-1)}{z-1} = \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1} \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{z-1} \Rightarrow \quad \frac{z-1}{z}dz = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx = (1 - \frac{1}{z})dz$$

Χωριζομένων Μεταβλητών

$$\int \frac{1}{x}dx = \int (1 - \frac{1}{z})dz + \mathrm{c} \Rightarrow \ln|x| = z - \ln|z| + c \Rightarrow \ln|x| + \ln|z| = z + c \Rightarrow$$

$$\ln|x \cdot z| = z + c \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \ln\left|x \cdot \frac{y}{x}\right| = \frac{y}{x} + c \quad \Rightarrow \ln|y| = \frac{y}{x} + c \quad \Rightarrow |y| = e^{\frac{y}{x}+c}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{\frac{y}{x}+c} = \pm e^{\frac{y}{x}}e^c \quad \xRightarrow{c_1 = \pm e^c}$$

Η λύση της δ.ε. είναι: $\boxed{y = c_1 e^{\frac{y}{x}}}$

Παράδειγμα 4 (σελ. 284 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $dy = 3ydx + xe^{3x}dx$ όταν $y(0) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = 3y + xe^{3x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - 3y = xe^{3x}$$

Γραμμική δ.ε. 1ης τάξης με $P(x) = -3$, $Q(x) = xe^{3x}$

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right)$$

Συνεπώς, η γενική λύση της δ.ε. είναι:

$$y(x) = e^{\int 3dx}\left(\int xe^{3x}e^{\int -3dx}dx + c\right) = e^{3x}\left(\int xe^{3x}e^{-3x}dx + c\right)$$

$$= e^{3x}\left(\int xdx + c\right) = e^{3x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = e^{3x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{3\cdot 0}\left(\frac{0}{2} + c\right) = 1 \Rightarrow c = 1$$

Η λύση της δ.ε. είναι: $\boxed{y(x) = e^{3x}\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)}$

Άσκηση 3 (σελ. 296 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $4y'(x) - y(x)tanx + y^5(x)sinx = 0$ με $cosx > 0$

$$4y' - ytanx + y^5 sinx = 0 \Rightarrow \quad 4\frac{dy}{dx} - ytanx = -y^5 sinx \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} + (-\frac{1}{4}tanx)y = (-\frac{1}{4}sinx)y^5$$

δ.ε. του Bernoulli με $P(x) = -\frac{1}{4}tanx$, $Q(x) = -\frac{1}{4}sinx$, $n = 5$

Θέτω: $v(x) = y^{1-n} = y^{1-5} = y^{-4} \quad (1)$

Οπότε: $(1) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}y^5\frac{dv}{dx} \quad (2)$

$$\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{1}{4}tanx\right)y = \left(-\frac{1}{4}sinx\right)y^5 \overset{(2)}{\Rightarrow} -\frac{1}{4}y^5\frac{dv}{dx} - \frac{1}{4}tanx \cdot y = -\frac{1}{4}sinx \cdot y^5 \Rightarrow$$

$$y^5\frac{dv}{dx} + tanx \cdot y = sinx \cdot y^5 \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} + tanx \cdot y^{-4} = sinx \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{dv}{dx} + tanx \cdot v = sinx$$

Γραμμική δ.ε. 1ης τάξης με $P'(x) = tanx$, $Q'(x) = sinx$

<u>Άσκηση 3</u> (σελ. 296 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $4y'(x) - y(x)tanx + y^5(x)sinx = 0$ με $cosx > 0$

$$\frac{dv}{dx} + tanx \cdot v = sinx$$

Γραμμική δ.ε. 1ης τάξης με $P'(x) = tanx$

$Q'(x) = sinx$

$$v(x) = e^{-\int P'(x)dx}\left(\int Q'(x)e^{\int P'(x)dx}dx + c\right)$$

Συνεπώς, η γενική λύση της δ.ε. είναι:

$$v(x) = e^{-\int P'(x)dx}\left(\int Q'(x)e^{\int P'(x)dx}dx + c\right) = e^{-\int tanxdx}\left(\int sinx \cdot e^{\int tanxdx}\,dx + c\right)$$

$$\int tanxdx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = \int \frac{-d(cosx)}{cosx} = -\ln|cosx| + c$$

$$v(x) = e^{\ln|cosx|}\left(\int sinx \cdot e^{-\ln|cosx|}\,dx + c\right) = |cosx|\left(\int \frac{sinx}{|cosx|}dx + c\right)$$

$$\xRightarrow{cosx>0} v(x) = cosx\left(\int \frac{sinx}{cosx}dx + c\right) = cosx\left(\int tanxdx + c\right) = cosx(-\ln(cosx) + c)$$

$$\Rightarrow v(x) = -cosx \cdot \ln(cosx) + c \cdot cosx$$

Λόγω της (1), η γενική λύση της δ.ε. είναι: $y^{-4}(x) = -cosx \cdot \ln(cosx) + c \cdot cosx$

Άσκηση 4 (σελ. 297 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $y'(x) + 2xy(x) = 1 + x^2 + y^2$ με $y(x) = x$ γνωστή λύση

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 - 2xy + x^2 + 1$$

δ.ε. του Riccati με $P(x) = 1$, $\mathrm{Q}(x) = -2x$, $\mathrm{R}(x) = x^2 + 1$

Θέτω: $y(x) = u(x) + \dfrac{1}{z(x)} \xRightarrow{u=\gamma\nu\omega\sigma\tau\eta\ \lambda\upsilon\sigma\eta} y(x) = x + \dfrac{1}{z(x)} \quad (1) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx} \quad (2)$

Οπότε: $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 2xy + x^2 + 1 \xRightarrow{(1,2)} 1 - \dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx} = \left(x + \dfrac{1}{z}\right)^2 - 2x\left(x + \dfrac{1}{z}\right) + x^2 + 1$

$$\Rightarrow \cancel{1} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \cancel{x^2} + \frac{1}{z^2} + \cancel{2\frac{x}{z}} - \cancel{2x^2} - \cancel{2\frac{x}{z}} + \cancel{x^2} + \cancel{1} \Rightarrow -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z^2}$$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = -1 \Rightarrow dz = -dx$ **δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών** $\Rightarrow \displaystyle\int dz = -\int dx + c \Rightarrow z = -x + c \quad (3)$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι: $\boxed{(1) \xRightarrow{(3)} y(x) = x + \dfrac{1}{c - x}}$

<u>Άσκηση 2</u> (σελ. 296 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $(2x+3y+1)dx+(3x+4y+1)dy=0$

$$(2x+3y+1)dx+(3x+4y+1)dy=0 \Rightarrow \quad (2x+3y+1)dx=-(3x+4y+1)dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y+1}{3x+4y+1} \quad (1)$$

Ισχύει ότι $\frac{a_1}{a_2}=\frac{-2}{3}\neq\frac{-3}{4}=\frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad \gamma_1\neq 0, \quad \gamma_2\neq 0$ και συνεπώς λύνουμε το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} -2x-3y-1=0 \\ 3x+4y+1=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -2x-3y=1 \\ 3x+4y=-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=1 \\ y=-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=1=h \\ y=-1=k \end{Bmatrix}$$

Θέτω: $x=X+h \Rightarrow x=X+1 \qquad y=Y+k \Rightarrow y=Y-1 \quad (2)$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{d(Y-1)}{d(X+1)}=-\frac{2(X+1)+3(Y-1)+1}{3(X+1)+4(Y-1)+1} \Rightarrow \frac{dY}{dX}=-\frac{2X+3Y}{3X+4Y} \Rightarrow \frac{dY}{dX}=-\frac{2\frac{X}{X}+3\frac{Y}{X}}{3\frac{X}{X}+4\frac{Y}{X}} \Rightarrow$$

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{2+3\frac{Y}{X}}{3+4\frac{Y}{X}} \quad (3)$$

Ομογενής δ.ε. 1ης τάξης $\qquad X\neq 0$

Θέτω: $\frac{Y(X)}{X} \overset{(4)}{=} Z(X) \Rightarrow Y(X)=X\cdot Z(X) \Rightarrow \quad \frac{dY(X)}{dX} \overset{(5)}{=} Z(X)+X\frac{dZ(X)}{dX}$

Άσκηση 2 (σελ. 296 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $(2x+3y+1)dx+(3x+4y+1)dy=0$

$$(3)\ \frac{dY}{dX}=-\frac{2+3\frac{Y}{X}}{3+4\frac{Y}{X}}\overset{(4{,}5)}{\Longrightarrow} Z+X\frac{dZ}{dX}=\frac{-2-3Z}{3+4Z}\Rightarrow \quad X\frac{dZ}{dX}=\frac{-2-3Z}{3+4Z}-Z\Rightarrow$$

$$X\frac{dZ}{dX}=\frac{-2-3Z-Z(3+4Z)}{3+4Z}\Rightarrow X\frac{dZ}{dX}=\frac{-4Z^2-6Z-2}{3+4Z}\Rightarrow \frac{3+4Z}{-4Z^2-6Z-2}dZ=\frac{dX}{X}\Rightarrow$$

δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\int\frac{dX}{X}=\int\frac{3+4Z}{-4Z^2-6Z-2}dZ+c_1\Rightarrow$$

$$\int\frac{dX}{X}=\frac{-1}{2}\int\frac{3+4Z}{2Z^2+3Z+1}dZ+c_1\Rightarrow\int\frac{dX}{X}=\frac{-1}{2}\int\frac{d(2Z^2+3Z+1)}{2Z^2+3Z+1}+c_1\xrightarrow{c_1=-\ln|c_2|}$$

$$\ln|X|=\frac{-1}{2}\ln|2Z^2+3Z+1|-\ln|c_2|\Rightarrow\ 2\ln|X\cdot c_2|=-\ln|2Z^2+3Z+1|\Rightarrow$$

$$|X\cdot c_2|^2=\frac{1}{|2Z^2+3Z+1|}\xrightarrow{c_3=\pm c_2^2} X^2\cdot c_3=\frac{1}{2Z^2+3Z+1}\overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\cancel{X^2}\cdot c_3=\frac{1}{2\left(\frac{Y}{X}\right)^2+3\frac{Y}{X}+1}=\frac{1}{\frac{2Y^2+3XY+X^2}{X^2}}=\frac{\cancel{X^2}}{2Y^2+3XY+X^2}\xrightarrow{c=\frac{1}{c_3}}2Y^2+3XY+X^2=c$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}2(y+1)^2+3(x-1)(y+1)+(x-1)^2=c\Rightarrow\ldots\Rightarrow \quad \boxed{x^2+2y^2+3xy+x+y=c}$$

Άσκηση 5 (σελ. 297 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $(4x-2y+5)dx+(2y-2x)dy=0$

$$\underbrace{(4x-2y+5)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{(2y-2x)}_{Q(x,y)}dy=0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial(4x-2y+5)}{\partial y}=-2\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{\partial(2y-2x)}{\partial x}=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Συνεπώς η δ.ε. είναι πλήρης

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση u=u(x,y) για την οποία ισχύουν οι:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=4x-2y+5 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2y-2x$$

Άσκηση 5 (σελ. 297 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $\quad (4x-2y+5)dx+(2y-2x)dy=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=4x-2y+5 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2y-2x$$

Μέθοδος 1Α

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x-2y+5 \Rightarrow u=\int(4x-2y+5)dx+\varphi(y) \Rightarrow u=2x^2-2xy+5x+\varphi(y) \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2x+\varphi'(y) \\ \text{Όμως, γνωρίζουμε ότι } \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2y-2x \end{array}\right\} -2x+\varphi'(y)=2y-2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(y)=2y \Rightarrow \varphi(y)=\int 2y\,dy+c_1 \xRightarrow{c_1=0} \varphi(y)=y^2 \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \boxed{u(x,y)=2x^2-2xy+5x+y^2=c}$$

<u>Άσκηση 5</u> (σελ. 297 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $(4x - 2y + 5)dx + (2y - 2x)dy = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 4x - 2y + 5 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = 2y - 2x$$

<u>Μέθοδος 1B</u>

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2x \Rightarrow \qquad u = \int (2y - 2x)dy + \varphi(x) \Rightarrow \qquad u = y^2 - 2xy + \varphi(x) \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -2y + \varphi'(x)$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 4x - 2y + 5$

$$\left.\begin{matrix} (1) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -2y + \varphi'(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 4x - 2y + 5 \end{matrix}\right\} -2y + \varphi'(x) = 4x - 2y + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 4x + 5 \Rightarrow \varphi(x) = \int (4x + 5)dx + c_1 \xrightarrow{c_1 = 0} \varphi(x) = 2x^2 + 5x \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \boxed{u(x, y) = y^2 - 2xy + 2x^2 + 5x = c}$$

<u>Άσκηση 5</u> (σελ. 297 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $(4x - 2y + 5)dx + (2y - 2x)dy = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = 4x - 2y + 5 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = 2y - 2x$$

<u>Μέθοδος 2</u>

$$u(x,y) = \int_a^x P(t,y)dt + \int Q(a,y)dy = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_a^x (4t - 2y + 5)dt + \int (2y - 2a)dy = c$$

$$\overset{a=0}{\Longrightarrow} u(x,y) = \int_0^x (4t - 2y + 5)dt + \int 2y dy = c$$

$$\Rightarrow u(x,y) = [2t^2 - 2yt + 5t]_0^x + y^2 = c$$

$$\boxed{\Rightarrow u(x,y) = 2x^2 - 2xy + 5x + y^2 = c}$$

Άσκηση 2 (σελ. 296 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **Επίλυση ως πλήρης δ.ε. 1ης τάξης**

Να λυθεί η δ.ε. $(2x + 3y + 1)dx + (3x + 4y + 1)dy = 0$

$$\underbrace{(2x + 3y + 1)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(3x + 4y + 1)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial(2x + 3y + 1)}{\partial y} = 3 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial(3x + 4y + 1)}{\partial x} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Συνεπώς η δ.ε. είναι πλήρης

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση u=u(x,y) για την οποία ισχύουν οι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = 2x + 3y + 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = 3x + 4y + 1$$

<u>Άσκηση 2</u> (σελ. 296 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **Επίλυση ως πλήρης δ.ε. 1ης τάξης ... ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $\boxed{(2x+3y+1)dx+(3x+4y+1)dy=0}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2x+3y+1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=3x+4y+1$$

<u>Μέθοδος 1Α</u>

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+3y+1 \Rightarrow u=\int(2x+3y+1)dx+\varphi(y) \Rightarrow \quad u=x^2+3xy+x+\varphi(y) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y}=3x+\varphi'(y) \\ \text{Όμως, γνωρίζουμε ότι } \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=3x+4y+1 \end{array}\right\} \quad 3x+\varphi'(y)=3x+4y+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(y)=4y+1 \quad \Rightarrow \varphi(y)=\int(4y+1)dy+c_1 \xRightarrow{c_1=0} \varphi(y)=2y^2+y \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \boxed{u(x,y)=x^2+3xy+x+2y^2+y=c}$$

Άσκηση 6 (σελ. 297 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $y(2xy+1)dx - xdy = 0$ με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής μ=μ(y)

$$y(2xy+1)dx - xdy = 0 \Rightarrow \quad (\underbrace{2xy^2+y}_{P(x,y)})dx + (\underbrace{-x}_{Q(x,y)})dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial(2xy^2+y)}{\partial y} = 4xy+1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Συνεπώς η δ.ε. δεν είναι πλήρης

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής μ=μ(y), προκειμένου η δ.ε. να γίνει πλήρης.

→ z=y

$$f(y) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{-1-4xy-1}{2xy^2+y} = \frac{-2-4xy}{2xy^2+y} = \frac{-2(1+2xy)}{y(2xy+1)} = \frac{-2}{y}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu = \mu(y) = e^{\int f(y)dy} \\ &\int f(y)dy = \int \frac{-2}{y}dy = -2\ln|y| = \ln|y|^{-2} = \ln\frac{1}{y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu = e^{\ln\frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y^2}$$

<u>Άσκηση 6</u> (σελ. 297 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y(2xy+1)dx - xdy = 0$ με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής μ=μ(y)

$$\mu(y)P(x,y) + \mu(y)Q(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{1}{y^2}y(2xy+1)dx - \frac{1}{y^2}xdy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{2xy+1}{y}\right)}_{P'(x,y)} dx + \underbrace{\left(-\frac{x}{y^2}\right)}_{Q'(x,y)} dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P'}{\partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{2xy+1}{y}\right)}{\partial y} = \frac{2xy-(2xy+1)}{y^2} = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial Q'}{\partial x} &= \frac{\partial\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P'}{\partial y} = \frac{\partial Q'}{\partial x}$$

Συνεπώς η δ.ε. είναι πλήρης

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση u=u(x,y) για την οποία ισχύουν οι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P'(x,y) = \frac{2xy+1}{y} = 2x + \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q'(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

Άσκηση 6 (σελ. 297 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **... ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y(2xy+1)dx - xdy = 0$ με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής μ=μ(y)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P'(x,y) = 2x + \frac{1}{y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q'(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

Μέθοδος 1Α

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \frac{1}{y} \Rightarrow \qquad u = \int \left(2x + \frac{1}{y}\right) dx + \varphi(y) \Rightarrow \qquad u = x^2 + \frac{x}{y} + \varphi(y) \qquad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y)$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q'(x,y) = -\dfrac{x}{y^2}$

$$\left.\right\} \quad -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \qquad \Rightarrow \varphi(y) = c_1 \qquad \xRightarrow{c_1=0} \varphi(y) = 0 \qquad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{u(x,y) = x^2 + \frac{x}{y} = c} \quad \boxed{\Rightarrow yx^2 + x = c \cdot y}$$

Παράδειγμα 1 (σελ. 300 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) - 4y'(x) + 29y(x) = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της δ.ε. είναι

$$\rho^2 - 4\rho + 29 = 0 \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = \\ = 16 - 116 = -100 = 100i^2$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 10i}{2} = \begin{cases} \rho_1 = 2 + 5i \\ \rho_2 = 2 - 5i \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες της χ.ε. δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς

$$\rho_{1,2} = \lambda \pm \mu i \qquad \lambda = 2 \qquad \mu = 5$$

Συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητες ρίζες της δ.ε. είναι:

$$\varphi_1(x) = e^{2x} cos 5x$$

$$\varphi_2(x) = e^{2x} sin 5x$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι:

$$y^o(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = \\ = c_1 e^{2x} cos 5x + c_2 e^{2x} sin 5x$$

Παράδειγμα 2 (σελ. 300 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί το πρόβλημα της αρχικής τιμής

$$y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 0 \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της δ.ε. είναι

$$\rho^2 + 5\rho + 4 = 0 \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = \\ = 25 - 16 = 9$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \rho_1 = -1 \\ \rho_2 = -4 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες της χ.ε. τους δύο πραγματικούς αριθμούς -1, -4

Συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητες ρίζες της δ.ε. είναι:

$$\varphi_1(x) = e^{-1 \cdot x} = e^{-x}$$

$$\varphi_2(x) = e^{-4 \cdot x} = e^{-4x}$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι:

$$y^o(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = \\ = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$$

<u>Παράδειγμα 2</u> (σελ. 300 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί το πρόβλημα της αρχικής τιμής

$$\boxed{y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 0 \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0}$$

Βρήκαμε τη γενική λύση της δ.ε.: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$

Τώρα θα χρησιμοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες στη γενική λύση της δ.ε. για να υπολογίσουμε τα c_1, c_2

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 3 \Rightarrow \quad c_1 e^0 + c_2 e^0 = 3 \Rightarrow c_1 + c_2 = 3 \\ \left.\begin{array}{l} y'(0) = 0 \\ y'(x) = -c_1 e^{-x} - 4c_2 e^{-4x} \end{array}\right\} \Rightarrow -c_1\, e^0 - 4c_2 e^0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow -c_1 - 4c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Άρα, η λύση της δ.ε. είναι:

$$\boxed{y(x) = 4e^{-x} - e^{-4x}}$$

Παράδειγμα (σελ. 301 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) - y'(x) = x$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της δ.ε. είναι

$$\rho^2 - \rho = 0 \qquad \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 1}{2} = \begin{cases} \rho_1 = 1 \\ \rho_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες της χ.ε. τους δύο πραγματικούς αριθμούς 1, 0

Συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητες ρίζες της δ.ε. είναι:

$$\varphi_1(x) = e^{1 \cdot x} = e^x$$

$$\varphi_2(x) = e^{0 \cdot x} = 1$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\boxed{\begin{gathered} y^o(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = \\ = c_1 e^x + c_2 \end{gathered}}$$

<u>Παράδειγμα</u> (σελ. 301 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) - y'(x) = x$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της δ.ε. $y''(x) - y'(x) = x$

$f(x) = x$

$\underbrace{f(x) = P(x) \cdot e^{\lambda x}}_{1^{\eta\varsigma}\ \mu o\rho\varphi\acute{\eta}\varsigma}$

$P(x) = x \rightarrow m = 1$

$\lambda = 0$

$\nu = 1$ γιατί η λ=0 είναι απλή (μία φορά) ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\omega(x) = x^{\nu} Q(x) e^{\lambda x} = x^1(\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^{0x} \Rightarrow \omega(x) = Ax^2 + Bx$$

A, B: προσδιοριστέες σταθερές

$\omega'(x) = 2Ax + B$ $\qquad\omega''(x) = 2A$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. επαληθεύει την δ.ε. και συνεπώς:

$$\omega''(x) - \omega'(x) = x \Rightarrow 2A - (2Ax + B) = x \Rightarrow 2A - 2Ax - B = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-1}{2} \\ B = -1 \end{cases}$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η: $\omega(x) = \frac{-1}{2}x^2 - x$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$y(x) = y^o(x) + \omega(x) = c_1 e^x + c_2 - \frac{1}{2}x^2 - x$$

Άσκηση 1 (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) + 4y(x) = 12x^2 - 16xcos2x$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της δ.ε. είναι

$$\rho^2 + 4 = 0 \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 = 16i^2$$

$$\rho_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{16i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm 4i}{2} = \begin{cases} \rho_1 = +2i \\ \rho_2 = -2i \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες της χ.ε. δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς

$$\rho_{1,2} = \lambda \pm \mu i \qquad \lambda = 0 \qquad \mu = 2$$

Συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητες ρίζες της δ.ε. είναι:

$$\varphi_1(x) = e^{0x}cos2x = cos2x$$

$$\varphi_2(x) = e^{0x}sin2x = sin2x$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι:

$$y^o(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = $$
$$= c_1cos2x + c_2sin2x$$

Άσκηση 1 (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) + 4y(x) = 12x^2 - 16xcos2x$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της δ.ε. (Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 12x^2 - 16xcos2x \\ f(x) = f_1(x) + f_2(x) \end{array}\right\}$$

3ης μορφής (1ης μορφής + 2ης μορφής)

$$f_1(x) = 12x^2$$

$$f_2(x) = -16xcos2x$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης $\omega_1(x)$ της μη-ομογενούς δ.ε.

$$y''(x) + 4y(x) = 12x^2$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης $\omega_2(x)$ της μη-ομογενούς δ.ε.

$$y''(x) + 4y(x) = -16xcos2x$$

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι: $\omega(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$

<u>Άσκηση 1</u> (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) + 4y(x) = 12x^2 - 16xcos2x$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της δ.ε. $y''(x) + 4y(x) = 12x^2$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) = 12x^2 \\ f_1(x) = P(x) \cdot e^{\lambda x} \\ \underline{1^{ης} \text{ μορφής}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} P(x) = 12x^2 \quad \rightarrow m = 2 \\ \lambda = 0 \\ \nu = 0 \quad \text{γιατί η λ=0 δεν είναι ρίζα της χ.ε.} \end{array}$$

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\omega_1(x) = x^\nu Q(x) e^{\lambda x} = x^0(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \Gamma)e^{0x} \Rightarrow \omega_1(x) = Ax^2 + Bx + \Gamma$$

Α, Β, Γ: προσδιοριστέες σταθερές

$$\omega_1{}'(x) = 2Ax + B \qquad \omega_1{}''(x) = 2A$$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. επαληθεύει την δ.ε. και συνεπώς:

$$\omega_1{}''(x) + 4\omega_1(x) = 12x^2 \Rightarrow 2A + 4(Ax^2 + Bx + \Gamma) = 12x^2$$

$$\Rightarrow 2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4\Gamma = 12x^2 \qquad \Rightarrow \begin{cases} 4A = 12 \Rightarrow A = 3 \\ 4B = 0 \\ 2A + 4\Gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \\ \Gamma = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η: $\omega_1(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{2}$

<u>Άσκηση 1</u> (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) + 4y(x) = 12x^2 - 16xcos2x$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της δ.ε. $y''(x) + 4y(x) = -16xcos2x$

$f_2(x) = -16xcos2x$

$f_2(x) = e^{\lambda x}[P_1(x)coskx + P_2(x)sinkx]$

<u>2ης μορφής</u>

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ P_1(x) = -16x \to m_1 = 1 \\ P_2(x) = 0 \to m_2 = 0 \\ k = 2 \to \lambda + ik = 0 + 2i \end{array}\right.$$

$m_1 = 1,\ m_2 = 0 \Rightarrow m = \max\{m_1, m_2\} = 1$

$\nu = 1$ γιατί ο λ+ik=2i είναι απλή ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\omega_2(x) = x^{\nu}[Q_1(x)coskx + Q_2(x)sinkx]e^{\lambda x} = x^1[(Ax + B)cos2x + (\Gamma x + \Delta)sin2x]e^{0x}$$

$$\Rightarrow \omega_2(x) = Ax^2cos2x + Bxcos2x + \Gamma x^2sin2x + \Delta xsin2x$$

$\omega_2{}'(x) = \cdots \qquad \omega_2{}''(x) = \cdots$

Α, Β, Γ, Δ: προσδιοριστέες σταθερές

Η μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. επαληθεύει την δ.ε. και συνεπώς:

$$\omega_2{}''(x) + 4\omega_2(x) = -16xcos2x \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos2x(2\mathrm{A} + 8\Gamma x + 4\Delta) + sin2x(-8\mathrm{A}x - 4B + 2\Gamma) = -16xcos2x$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\mathrm{A} + 8\Gamma x + 4\Delta = -16x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 8\Gamma = -16 \\ 2\mathrm{A} + 4\Delta = 0 \end{array}\right. \\ \\ -8\mathrm{A}x - 4B + 2\Gamma = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -8A = 0 \\ -4B + 2\Gamma = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Gamma = -2 \\ \Delta = 0 \\ \mathrm{A} = 0 \\ \mathrm{B} = -1 \end{array}\right.$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η: $\omega_2(x) = -xcos2x - 2x^2sin2x$

<u>Άσκηση 1</u> (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) + 4y(x) = 12x^2 - 16xcos2x$

Βρέθηκε μία μερική λύση της δ.ε. (<u>Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών</u>)

$$f(x) = 12x^2 - 16xcos2x$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

<u>3ης μορφής (1ης μορφής + 2ης μορφής)</u>

$$f_1(x) = 12x^2$$

$$f_2(x) = -16xcos2x$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης $\omega_1(x)$ της μη-ομογενούς δ.ε.

$$y''(x) + 4y(x) = 12x^2 \quad \rightarrow \omega_1(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης $\omega_2(x)$ της μη-ομογενούς δ.ε.

$$y''(x) + 4y(x) = -16xcos2x \ \rightarrow \omega_2(x) = -xcos2x - 2x^2sin2x$$

Μία μερική λύση της αρχικής μη-ομογενούς δ.ε. είναι: $\omega(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$

$$\Rightarrow \omega(x) = 3x^2 - \frac{3}{2} - xcos2x - 2x^2sin2x$$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$y(x) = y^o(x) + \omega(x)$$
$$= c_1cos2x + c_2sin2x + 3x^2 - \frac{3}{2} - xcos2x - 2x^2sin2x$$

Άσκηση 2 (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 9x^2 + 4 \qquad y(0) = 6, \quad y'(0) = 8$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της δ.ε. είναι

$$\rho^2 - 4\rho + 3 = 0 \quad \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \rho_1 = 3 \\ \rho_2 = 1 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες της χ.ε. τους δύο πραγματικούς αριθμούς 1, 3

Συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητες ρίζες της δ.ε. είναι:

$$\varphi_1(x) = e^{1 \cdot x} = e^x$$

$$\varphi_2(x) = e^{3 \cdot x} = e^{3x}$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} y^o(x) &= c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{3x} \end{aligned}}$$

<u>Άσκηση 2</u> (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 9x^2 + 4 \qquad y(0) = 6, \quad y'(0) = 8$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της δ.ε. $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 9x^2 + 4$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 9x^2 + 4 \\ f(x) = P(x) \cdot e^{\lambda x} \\ \underline{1^{\eta\varsigma} \text{ μορφής}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} P(x) = 9x^2 + 4 \quad \to m = 2 \\ \lambda = 0 \\ \nu = 0 \quad \text{γιατί η λ=0 δεν είναι ρίζα της χ.ε.} \end{array}$$

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\omega(x) = x^\nu Q(x) e^{\lambda x} = x^0(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \Gamma)e^{0x} \Rightarrow \omega(x) = Ax^2 + Bx + \Gamma$$

Α, Β, Γ: προσδιοριστέες σταθερές

$$\omega'(x) = 2Ax + B \qquad \omega''(x) = 2A$$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. επαληθεύει την δ.ε. και συνεπώς:

$$\omega''(x) - 4\omega'(x) + 3\omega(x) = 9x^2 + 4 \quad \Rightarrow 2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + \Gamma) = 9x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 2A - 8Ax - 4B + 3Ax^2 + 3Bx + 3\Gamma = 9x^2 + 4 \Rightarrow \begin{cases} 3A = 9 \Rightarrow A = 3 \\ -8A + 3B = 0 \\ 2A - 4B + 3\Gamma = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 8 \\ \Gamma = 10 \end{cases}$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η: $\omega(x) = 3x^2 + 8x + 10$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= y^o(x) + \omega(x) \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{3x} + 3x^2 + 8x + 10 \end{aligned}}$$

<u>Άσκηση 2</u> (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 9x^2 + 4 \qquad y(0) = 6, \quad y'(0) = 8$$

Βρήκαμε τη γενική λύση της δ.ε.: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + 3x^2 + 8x + 10$

Τώρα θα χρησιμοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες στη γενική λύση της δ.ε. για να υπολογίσουμε τα c_1, c_2

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 6 \Rightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 + 3\cdot 0 + 8\cdot 0 + 10 = 6 \Rightarrow c_1 + c_2 = -4 \\ \left.\begin{array}{l} y'(0) = 8 \\ y'(x) = c_1 e^x + 3c_2 e^{3x} + 6x + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 e^0 + 3c_2 e^0 + 6\cdot 0 + 8 = 8 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow c_1 + 3c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -6 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Άρα, η λύση της δ.ε. είναι:

$$\boxed{y(x) = -6e^x + 2e^{3x} + 3x^2 + 8x + 10}$$

Παράδειγμα 3 (σελ. 305 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = -\dfrac{e^{2x}}{e^{x}+1}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της δ.ε. είναι

$$\rho^2 - 3\rho + 2 = 0 \quad \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \rho_1 = 2 \\ \rho_2 = 1 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες της χ.ε. τους δύο πραγματικούς αριθμούς 1, 2

Συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητες ρίζες της δ.ε. είναι:

$$\varphi_1(x) = e^{1\cdot x} = e^{x}$$

$$\varphi_2(x) = e^{2\cdot x} = e^{2x}$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} y^{o}(x) &= c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = \\ &= c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} \end{aligned}}$$

Παράδειγμα 3 (σελ. 305 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της δ.ε. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}$

Επειδή η $f(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ δεν είναι κάποια από τις ειδικές μορφές που απαιτούνται για τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, θα εφαρμόσουμε τη γενική μέθοδο της μεταβολής των σταθερών, προκειμένου να βρούμε μία μερική λύση της δ.ε.

$$\begin{matrix} \varphi_1(x) = e^x \\ \varphi_2(x) = e^{2x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \varphi'_1(x) = e^x \\ \varphi'_2(x) = 2e^{2x} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi'_1(x) + c_2'(x)\varphi'_2(x) = f(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)2e^{2x} = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} c_1'(x) + c_2'(x)e^x = 0 \\ c_1'(x) + 2c_2'(x)e^x = -\frac{e^x}{e^x + 1} \end{matrix}\right\}$$

Παράδειγμα 3 (σελ. 305 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = -\dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x) + c_2'(x)e^x &= 0 \\ c_1'(x) + 2c_2'(x)e^x &= -\frac{e^x}{e^x+1} \end{aligned}\right\}$$

Από αυτό το σύστημα πρέπει να υπολογίσουμε τα $c_1'(x), c_2'(x)$ και στη συνέχεια τα $c_1(x), c_2(x)$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 1 & 2e^x \end{vmatrix} = 2e^x - e^x = e^x \neq 0$$

$$D_{c_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ -\dfrac{e^x}{e^x+1} & 2e^x \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{e^x+1} \qquad D_{c_2'(x)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\dfrac{e^x}{e^x+1} \end{vmatrix} = \frac{-e^x}{e^x+1}$$

$$c_1'(x) = \frac{D_{c_1'(x)}}{D} = \frac{\frac{e^{2x}}{e^x+1}}{e^x} = \frac{e^x}{e^x+1} \qquad c_2'(x) = \frac{D_{c_2'(x)}}{D} = \frac{\frac{-e^x}{e^x+1}}{e^x} = \frac{-1}{e^x+1}$$

$$c_1\ (x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1)$$

$$c_2\ (x) = \int \frac{-1}{e^x+1}dx = \int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} = \ln(1+e^{-x})$$

Μία μερική λύση: $\omega(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) = e^x\ln(e^x+1) + e^{2x}\ln(1+e^{-x})$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= y^o(x) + \omega(x) \\ &= c_1e^x + c_2e^{2x} + e^x\ln(e^x+1) + e^{2x}\ln(1+e^{-x}) \end{aligned}}$$

Άσκηση 3 (Παραλλαγή της άσκησης του βιβλίου) (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $y'''(x) + y'(x) = 2x^2$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της δ.ε. είναι

$$\rho^3 + \rho = 0 \Rightarrow \rho(\rho^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 = 0 \\ \rho^2 + 1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \rho_1 = 0 \\ \rho^2 = -1 \end{cases} = \begin{cases} \rho_1 = 0 \\ \rho^2 = i^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \rho_1 = 0 \\ \rho_2 = i \\ \rho_3 = -i \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες της χ.ε. τον πραγματικό αριθμό 0 και τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς λ±iμ=0±i $\rightarrow \lambda = 0 \quad \mu = 1$

Συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητες ρίζες της δ.ε. είναι:

$$\varphi_1(x) = e^{0\cdot x} = 1 \qquad \varphi_2(x) = e^{0x}cosx = cosx$$

$$\varphi_3(x) = e^{0x}sinx = sinx$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι:

$$y^o(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) =$$
$$= c_1 + c_2cosx + c_3sinx$$

<u>Άσκηση 3 (Παραλλαγή της άσκησης του βιβλίου)</u> (σελ. 319 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **... ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y'''(x) + y'(x) = 2x^2$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της δ.ε. $y'''(x) + y'(x) = 2x^2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x^2 \\ \underset{1^{ης}\ \text{μορφής}}{f(x) = P(x) \cdot e^{\lambda x}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} P(x) = 2x^2 \quad \to m = 2 \\ \lambda = 0 \\ \nu = 1 \end{array}$$

γιατί η λ=0 είναι απλή (μία φορά) ρίζα της χ.ε.

Μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\omega(x) = x^{\nu} Q(x) e^{\lambda x} = x^1(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}\mathrm{x} + \Gamma)e^{0x} \Rightarrow \omega(x) = Ax^3 + Bx^2 + \Gamma x$$

A, B, Γ: προσδιοριστέες σταθερές

$$\omega'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + \Gamma \qquad \omega''(x) = 6Ax + 2B \qquad \omega'''(x) = 6A$$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. επαληθεύει την δ.ε. και συνεπώς:

$$\omega'''(x) + \omega'(x) = 2x^2 \qquad \Rightarrow 6A + 3Ax^2 + 2Bx + \Gamma = 2x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{3} \\ 2B = 0 \\ 6A + \Gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = 0 \\ \Gamma = -4 \end{cases}$$

Άρα, μία μερική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η: $\omega(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = y^o(x) + \omega(x) \\ = c_1 + c_2 cosx + c_3 sinx + \frac{2}{3}x^3 - 4x \end{array}}$$

<u>Άσκηση 6</u> (σελ. 320 βιβλίου κ. Κυβεντίδη)

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της δ.ε. είναι

$$\rho^2 + 3\rho + 2 = 0 \quad \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \rho_1 = -1 \\ \rho_2 = -2 \end{cases}$$

Άρα έχουμε ως ρίζες της χ.ε. τους δύο πραγματικούς αριθμούς -1, -2

Συνεπώς οι γραμμικά ανεξάρτητες ρίζες της δ.ε. είναι:

$$\varphi_1(x) = e^{-1 \cdot x} = e^{-x}$$

$$\varphi_2(x) = e^{-2 \cdot x} = e^{-2x}$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} y^o(x) &= c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \end{aligned}}$$

Να λυθεί η δ.ε. $$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

Εύρεση μίας μερικής λύσης της δ.ε. $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$

Επειδή η $f(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$ δεν είναι κάποια από τις ειδικές μορφές που απαιτούνται για τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, θα εφαρμόσουμε τη γενική μέθοδο της μεταβολής των σταθερών, προκειμένου να βρούμε μία μερική λύση της δ.ε.

$$\begin{array}{l} \varphi_1(x) = e^{-x} \\ \varphi_2(x) = e^{-2x} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi'_1(x) = -e^{-x} \\ \varphi'_2(x) = -2e^{-2x} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi'_1(x) + c_2'(x)\varphi'_2(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ -c_1'(x)e^{-x} - c_2'(x)2e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} e^{-x}c_1'(x) + e^{-2x}c_2'(x) = 0 \\ -e^{-x}c_1'(x) - 2e^{-2x}c_2'(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{array}\right\}$$

Άσκηση 6 (σελ. 320 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{-x}c_1'(x) + e^{-2x}c_2'(x) &= 0 \\ -e^{-x}c_1'(x) - 2e^{-2x}c_2'(x) &= \frac{1}{1+e^{2x}} \end{aligned}\right\}$$

Από αυτό το σύστημα πρέπει να υπολογίσουμε τα $c_1'(x), c_2'(x)$ και στη συνέχεια τα $c_1(x), c_2(x)$

$$D = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x} \neq 0$$

$$D_{c_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^{2x}} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-2x}}{1+e^{2x}} \qquad D_{c_2'(x)} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{1}{1+e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}$$

$$c_1'(x) = \frac{D_{c_1'(x)}}{D} = \frac{-\frac{e^{-2x}}{1+e^{2x}}}{-e^{-3x}} = \frac{1}{e^{-x}(1+e^{2x})} = \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}$$

$$c_2'(x) = \frac{D_{c_2'(x)}}{D} = \frac{\frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}}{-e^{-3x}} = \frac{-1}{e^{-2x}(1+e^{2x})} = \frac{-e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Άσκηση 6 (σελ. 320 βιβλίου κ. Κυβεντίδη) **… ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Να λυθεί η δ.ε. $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$

$$\left.\begin{aligned} e^{-x}c_1'(x) + e^{-2x}c_2'(x) &= 0 \\ -e^{-x}c_1'(x) - 2e^{-2x}c_2'(x) &= \frac{1}{1+e^{2x}} \end{aligned}\right\}$$

Από αυτό το σύστημα πρέπει να υπολογίσουμε τα $c_1'(x), c_2'(x)$ και στη συνέχεια τα $c_1(x), c_2(x)$

Βρήκαμε ότι $c_1'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ $\quad c_2'(x) = \dfrac{-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Καθώς γνωρίζουμε ότι: $\boxed{[\tan^{-1} f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}}$

$$c_1(x) = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{(e^x)'}{1+(e^x)^2}dx = \tan^{-1}(e^x)$$

$$c_2(x) = \int \frac{-e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+e^{2x})}{1+e^{2x}} = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})$$

Μία μερική λύση: $\omega(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$

$$= \tan^{-1}(e^x)\, e^{-x} - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})e^{-2x}$$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= y^o(x) + \omega(x) \\ &= c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + e^{-x}\tan^{-1}(e^x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) \end{aligned}}$$