ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1	$[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
2	$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω $f\big(\varphi(x)\big)$ τότε:	$f'(x) = f'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$
ή	$\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$
Αν $y = y(x)$ με $y = y(t),\ x = x(t)$ τότε:	$\frac{dy}{dx} = (dy/dt)\ /\ (dx/dt)$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

α/α	Συνάρτηση	Παράγωγος	Σύνθετη συν.	Παράγωγος
1	$y = x^\nu$	$y' = \nu x^{\nu-1}$	$y = f^\nu(x)$	$y' = \nu f^{\nu-1}(x)f'(x)$
2	$y = \frac{1}{x^\nu}$	$y' = -\frac{\nu}{x^{\nu+1}}$	$y = \frac{1}{[f(x)]^\nu}$	$y' = -\frac{\nu}{[f(x)]^{\nu+1}}f'(x)$
3	$y = \sqrt[\nu]{x}$	$y' = \frac{\sqrt[\nu]{x}}{\nu x}$	$y = \sqrt[\nu]{f(x)}$	$y' = \frac{\sqrt[\nu]{f(x)}}{\nu f(x)}f'(x)$
4	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
5	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x)e^{f(x)}$
6	$y = lnx$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln\,(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
7	$y = \eta\mu x$	$y' = \sigma\upsilon\nu x$	$y = \eta\mu(f(x))$	$y' = \sigma\upsilon\nu\big(f(x)\big)f'(x)$
8	$y = \sigma\upsilon\nu x$	$y' = -\eta\mu x$	$y = \sigma\upsilon\nu(f(x))$	$y' = -\eta\mu\big(f(x)\big)f'(x)$
9	$y = \varepsilon\varphi x$	$y' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$y = \varepsilon\varphi(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(f(x))}$
10	$y = \sigma\varphi x$	$y' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$y = \sigma\varphi(f(x))$	$y' = -\frac{f'(x)}{\eta\mu^2(f(x))}$
11	$y = \alpha^x$	$y' = \alpha^x ln\alpha$	$y = \alpha^{f(x)}$	$y' = \alpha^{f(x)} ln\alpha f'(x)$
12	$y = \tau o\xi\eta\mu x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \tau o\xi\eta\mu(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
13	$y = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(f(x))$	$y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
14	$y = \tau o\xi\varepsilon\varphi x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \tau o\xi\varepsilon\varphi(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
15	$y = \tau o\xi\sigma\varphi x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$y = \tau o\xi\sigma\varphi(f(x))$	$y' = -\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ TAYLOR: $P_n(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1}(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$

ΣΕΙΡΑ TAYLOR: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$ για x = 0 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ (σειρά Maclaurin)

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

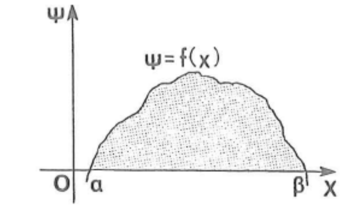
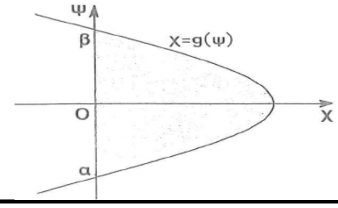
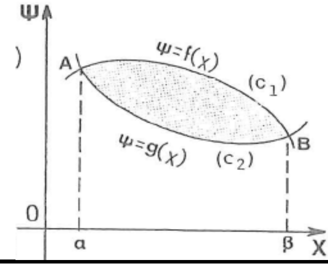
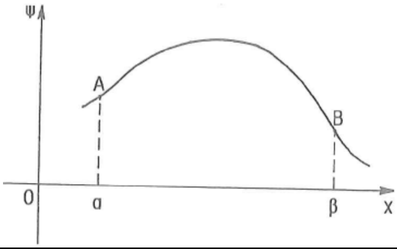
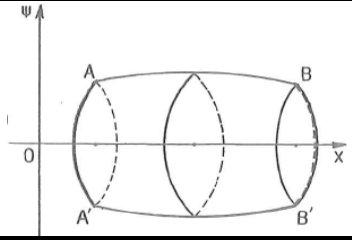
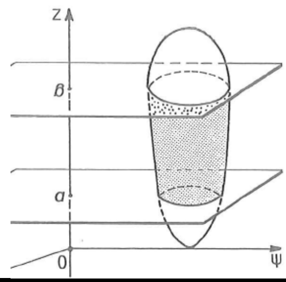
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$(\int f(x)dx)' = f(x)$ ή $\int d(f(x)) = f(x) + c$ ή $d(\int f(x)\,dx) = f(x)dx$ ή $f'(x)dx = d(f(x))$
αν $\int f(x)dx = F(x) + c$ τότε είναι: $\int f(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x) + c$
ισχύουν: $dx = d(x \pm \alpha)$, α σταθ. $dx = \frac{1}{\alpha}d(\alpha x)$ και $dx = \alpha d(\frac{1}{\alpha}x)$ α σταθ. $\neq 0$
παραγοντική ολοκλήρωση: $\int F'(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$\int 0dx = c$ διότι $c' = 0$
$\int \alpha dx = \alpha x + c$ διότι $(\alpha x + c)' = \alpha$
$\int dx = x + c$ διότι $(x + c)' = 1$
$\int x^\nu dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$ διότι $\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)' = x^\nu$
$\int x^{-\nu} dx = \frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c$ διότι $\left(\frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right)' = x^{-\nu}$
$\int e^x dx = e^x + c$ διότι $(e^x + c)' = e^x$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + c$ διότι $(\ln\|x\| + c)' = \frac{1}{x}$
$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{ln\alpha} + c$ διότι $\left(\frac{\alpha^x}{ln\alpha} + c\right)' = \alpha^x$
$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$ διότι $(-\sigma\upsilon\nu x + c)' = \eta\mu x$
$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$ διότι $(\eta\mu x + c)' = \sigma\upsilon\nu x$
$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c$ διότι $(\varepsilon\varphi x + c)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c$ διότι $(-\sigma\varphi x + c)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$
$\int \varepsilon\varphi x dx = = \ln\|\sigma\upsilon\nu x\| + c$
$\int \sigma\varphi x dx = = \ln\|\eta\mu x\| + c$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi x + c$
$\int \frac{dx}{-(1+x^2)} = \tau o\xi\sigma\varphi x + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi\eta\mu x + c$
$\int \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x + c$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Εμβαδό χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη c και τον άξονα xx’		$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$ αν f(x)≥0 για κάθε x ε [α,β]
Εμβαδό χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη c και τον άξονα yy’		$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(y)dy$$
Εμβαδό χωρίου* που περικλείεται από τις τεμνόμενες καμπύλες c_1 c_2 που ορίζονται από τις συναρτήσεις f(x) και g(x)		$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx$$ αν f(x)≥g(x) 0 για κάθε x ε [α,β]
Μήκος καμπύλης* c που δίνεται από τη συνάρτηση y=f(x) από x=α έως x=β.		$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$ $$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$$
Το εμβαδό επιφάνειας* που σχηματίζεται από την περιστροφή ενός τόξου AB μιας καμπύλης c που ορίζεται από τη συνάρτηση f(x) γύρω από τον άξονα xx’		$$E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$ $$E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$$
Όγκος επιφάνειας* που σχηματίζεται από την περιστροφή ενός τόξου AB μιας καμπύλης c που ορίζεται από τη συνάρτηση f(x) γύρω από τον άξονα xx’		$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2\, dx$$

(*): οι τύποι εφαρμόζονται αντίστοιχα για τον άξονα yy’ αν μεταφέρουμε τα σημεία α,β στον άξονα yy’ και αντιστρέψουμε x και y.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η συνάρτηση δύο μεταβλητών z=f(x,y) παριστάνει μία επιφάνεια στο χώρο.

Αν y=c σταθερά τότε είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής και παριστάνει μία καμπύλη. Σε αυτή την περίπτωση ορίζεται η μερική παράγωγος της f ως προς x, συμβολίζεται με:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ σε ένα σημείο και ισχύει: $\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η: $\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, αν x=c

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αν z=f(x,y) έτσι ώστε x=φ(t), y=ψ(t), τότε: $\frac{dx}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

Αν z=f(x,y) έτσι ώστε x=g(u,v) και y=h(u,v), τότε : $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

Το ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ της συνάρτησης z=f(x,y) ορίζεται ως: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

$\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$	$\sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$	$\varepsilon\varphi x\sigma\varphi x=1$	$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$
$\eta\mu(-\alpha)=-\eta\mu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu(-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\varepsilon\varphi(-\alpha)=-\varepsilon\varphi\alpha$	$\sigma\varphi(-\alpha)=-\sigma\varphi\alpha$

	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$
$\eta\mu x$	$\eta\mu x$	$\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\frac{\varepsilon\varphi x}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2 x}}$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}$	$\frac{\sigma\varphi x}{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2 x}}$
$\varepsilon\varphi x$	$\frac{\eta\mu x}{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\sigma\upsilon\nu x}$	$\varepsilon\varphi x$	$\frac{1}{\sigma\varphi x}$
$\sigma\varphi x$	$\frac{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}{\eta\mu x}$	$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}$	$\frac{1}{\varepsilon\varphi x}$	$\sigma\varphi x$

$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$	$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$
$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$	$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$
$\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$ $=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$ $=1-2\eta\mu^2\alpha$	$\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

$\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)]$	$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{1}{2}[\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)]$
$\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)]$	$\eta\mu 3\alpha=3\eta\mu\alpha-4\eta\mu^3\alpha$ $\sigma\upsilon\nu 3\alpha=4\sigma\upsilon\nu^3\alpha-3\sigma\upsilon\nu\alpha$
$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$	$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\eta\mu\frac{B-A}{2}$
$\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$	$\eta\mu A-\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Απόσταση δύο σημείων $M(x_1,y_1)$ και $N(x_2,y_2)$ στο επίπεδο: $\boldsymbol{d(M,N)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$

Απόσταση δύο σημείων $M(x_1,y_1,z_1)$, $N(x_2,y_2,z_2)$ στο χώρο: $\boldsymbol{d(M,N)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}$

ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Εξίσωση ευθείας στο επίπεδο: $\boldsymbol{Ax+By+\Gamma=0}$ έχει συντ. δ/νσης: $\boldsymbol{\lambda=-\frac{A}{B}}$

είναι παράλληλη στο διάνυσμα: $\boldsymbol{\vec{\delta}=(B,-A)}$ και κάθετη στο διάνυσμα: $\boldsymbol{\vec{\eta}=(A,B)}$

δύο ευθείες ε_1, ε_2 είναι : παράλληλες: $\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2}$ & κάθετες: $\boldsymbol{\lambda_1\lambda_2=-1}$

Απόσταση του σημείου Μ (x_o,y_o) από ευθεία: $\boldsymbol{d(M,\varepsilon)=\frac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ είναι: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$

Τρία σημεία του επιπέδου $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ και $M_3(x_3,y_3)$ είναι συνευθειακά : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

Εμβαδόν τριγώνου με κορυφές τα σημεία

Α (x_1,y_1), Β (x_2,y_2) και Γ (x_3,y_3) : $E=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$

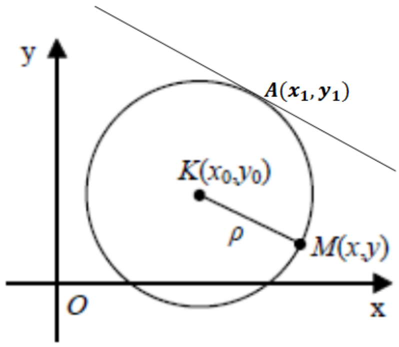
ΚΥΚΛΟΣ

λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο Κ.
εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο Κ (x_o,y_o):

$\boldsymbol{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2}$

Η γενική μορφή εξίσωσης : $\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0}$ όπου: $A^2+B^2-4\Gamma>0$
παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο:

$K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$



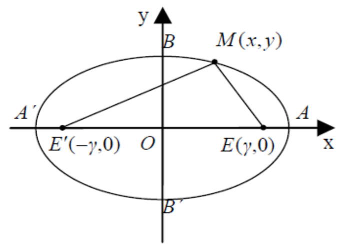
Η εφαπτόμενη ευθεία σε κύκλο στο σημείο $A(x_1,y_1)$ είναι: $xx_1+yy_1=\rho^2$

ΕΛΛΕΙΨΗ

με κέντρο Ο(0,0) και ημιάξονες α,β έχει εξίσωση:

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$

Η εφαπτόμενη της έλλειψης με την παραπάνω εξίσωση στο σημείο Α (x_1,y_1) είναι: $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$

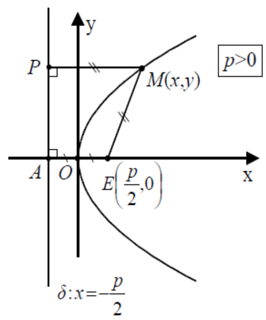


ΠΑΡΑΒΟΛΗ

με κέντρο το σημείο $E=(\frac{p}{2},0)$ και διευθετούσα δ: $x=-\frac{p}{2}$

έχει εξίσωση: $y^2=2px$

και εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο Α (x_1,y_1): $yy_1=p(x+x_1)$



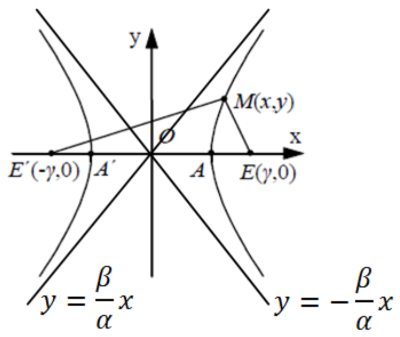
ΥΠΕΡΒΟΛΗ

με εστίες Ε(γ,0) και Ε'(-γ,0) και σταθερή διαφορά 2α έχει εξίσωση:

$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$, εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$

και εξίσωση εφαπτόμενης στο σημείο Α (x_1,y_1): $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

και ασύμπτωτες ευθείες τις: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$



ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Εξίσωση επιπέδου: **Αx +Βy + Γz + Δ = 0**

Τρία σημεία του χώρου $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ και $M_3(x_3,y_3,z_3)$, τα οποία δεν είναι συνευθειακά ορίζουν ένα επίπεδο με εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Παράλληλα επίπεδα: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \lambda,$ κάθετα επίπεδα: $A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2 = 0$

Γωνία δύο επιπέδων: $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{A_1A_2+B_1B_2+\Gamma_1\Gamma_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+\Gamma_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+\Gamma_2^2}}$

απόσταση του επίπεδου Αx +Βy + Γz + Δ = 0 από το σημείο $A_o(x_o,y_o,z_o)$: $\delta = \frac{|Ax_o+By_o+\Gamma z_o+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$

ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Η εξίσωση μίας ευθείας στο χώρο ορίζεται ως η τομή δύο επιπέδων και εκφράζεται με τις εξισώσεις δύο επιπέδων:

Αx + Βy + Γz + Δ = 0
Α΄x +Β΄y + Γ΄z + Δ΄ = 0

η εξίσωση μίας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $M_1(x_1,y_1,z_1)$ και $M_2(x_2,y_2,z_2)$ είναι:

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$

ΣΦΑΙΡΑ

με κέντρο το σημείο Κ (x_o,y_o,z_o) και ακτίνα ρ : $\mathbf{(x-x_o)^2 +(y-y_o)^2 +(z-z_o)^2 = \rho^2}$

Η γενική μορφή εξίσωσης : $\mathbf{x^2+y^2+z^2 +Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0}$ όπου: $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta>0$ παριστάνει σφαίρα με κέντρο

$K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{\Gamma}{2})$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}}{2}$

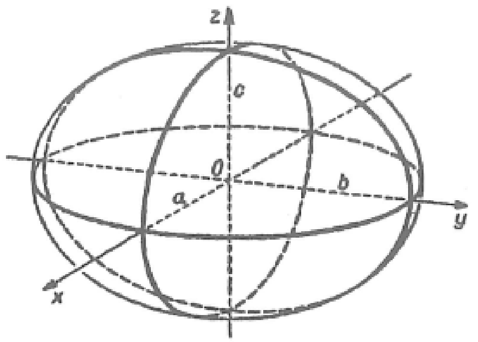
Το εφαπτόμενο επίπεδο στη σφαίρα στο σημείο Α (x_1,y_1,z_1) είναι:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + \frac{A}{2}(x-x_1) + \frac{B}{2}(y-y_1) + \frac{\Gamma}{2}(z-z_1) + \Delta = 0$$

ΑΛΛΕΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

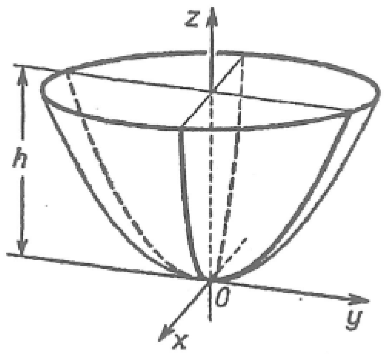
ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ με κέντρο o(0,0,0) και ημιάξονες a,b,c.

Εξίσωση: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



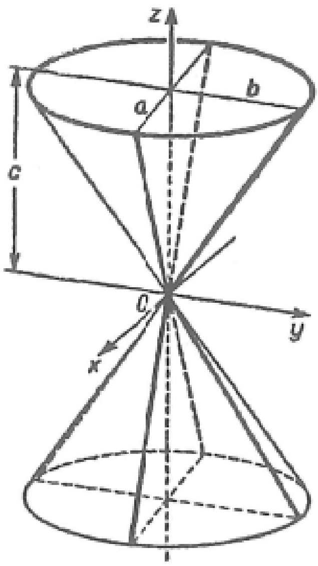
ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ

$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ όπου $z \leq h$



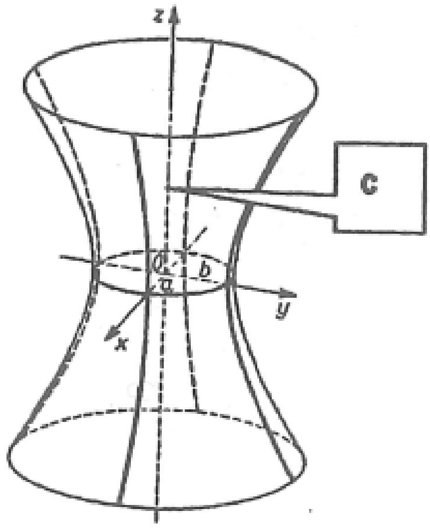
ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



ΜΟΝΟΧΩΝΟ ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Το πλήθος των απλών συνδυασμών των μ στοιχείων ανά κ είναι:

$$\binom{\mu}{k}=\frac{\mu!}{k!(\mu-k)!}$$

όπου: $\mu!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(\mu-1)\cdot\mu$

$0!=1$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1k}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \dots & \beta_{\nu k}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\ldots+\alpha_{1\nu}\beta_{\nu 1} & \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}+\ldots+\alpha_{1\nu}\beta_{\nu 2} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1k}+\alpha_{12}\beta_{2k}+\ldots+\alpha_{1\nu}\beta_{\nu k}\\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\ldots+\alpha_{2\nu}\beta_{\nu 1} & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}+\ldots+\alpha_{2\nu}\beta_{\nu 2} & \dots & \alpha_{21}\beta_{1k}+\alpha_{22}\beta_{2k}+\ldots+\alpha_{2\nu}\beta_{\nu k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{\mu 1}\beta_{11}+\alpha_{\mu 2}\beta_{21}+\ldots+\alpha_{\mu\nu}\beta_{\nu 1} & \alpha_{\mu 1}\beta_{12}+\alpha_{\mu 2}\beta_{22}+\ldots+\alpha_{\mu\nu}\beta_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\mu 1}\beta_{1k}+\alpha_{\mu 2}\beta_{2k}+\ldots+\alpha_{\mu\nu}\beta_{\nu k}\end{bmatrix}$$

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\\-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}.$$

Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας (Δ) τάξης ν κατά τα στοιχεία της i γραμμής δίνεται από τη σχέση

$$\Delta=\alpha_{i1}A_{i1}+\alpha_{i2}A_{i2}+\ldots+\alpha_{i\nu}A_{i\nu}$$

ενώ το ανάπτυγμά της κατά τα στοιχεία της j στήλης δίνεται από τη σχέση

$$\Delta=\alpha_{1j}A_{1j}+\alpha_{2j}A_{2j}+\ldots+\alpha_{\nu j}A_{\nu j}$$

όπου α_{ij} είναι στοιχείο της ορίζουσας,

A_{ij} είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij} και ισούται με το γινόμενο του $(-1)^{i+j}$ με την υποορίζουσα τάξης ν-1 που προκύπτει αν διαγράψουμε τη γραμμή i και τη στήλη j της ορίζουσας Δ.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Αν ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{12}\\ -\alpha_{21} & \alpha_{11}\end{bmatrix}$

Αν ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{\nu 1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{\nu 2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \dots & A_{\nu\nu}\end{bmatrix}$

όπου A_{ij} είναι τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων α_{ij} του πίνακα Α, τοποθετημένα όμως στις θέσεις των στοιχείων α_{ji}