Κεφάλαιο 4

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

4.1. Εισαγωγή

Εστω διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\ \mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$, όπου $\mathbf{r}=(x,y)$ και $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ είναι η ταχύτητα στο σημείο $\mathbf{r}$ π.χ. ενός ρευστού στο επίπεδο. Εστω ότι ψάχνουμε τις τροχιές κίνησης των σωματιδίων του ρευστού, δηλαδή όλες τις καμπύλες του επιπέδου τέτοιες ώστε η ταχύτητα σε κάθε σημείο αυτών να ταυτίζεται με τις τιμές $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Δηλαδή ψάχνουμε τις λύσεις (ως προς $\mathbf{r}$) της εξίσωσης

$$\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)),\ \mathbf{r}(t)=(x(t),y(t)).$$

Για παράδειγμα, αν η ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο του επιπέδου τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από το διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων

$$\mathbf{v}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\mathbf{v}(\mathbf{r})=-y\cdot\mathbf{i}+x\cdot\mathbf{j},$$

τότε έχουμε

$$\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\Leftrightarrow(x'(t),y'(t))=(-y(t),x(t))\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-y\\ y'=x\end{cases}.$$

Το παραπάνω είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δημιουργίας ενός συστήματος δ.ε. Ενημερωτικά αναφέρουμε ότι κάθε τροχιά (δηλ. καμπύλη) που ικανοποιεί το παραπάνω σύστημα δ.ε. καλείται ***διανυσματική ή δυναμική γραμμή*** του πεδίου. Λύνοντας το σύστημα και σχεδιάζοντας τις τροχιές παίρνουμε μια εποπτική παράσταση του πεδίου μέσω των δυναμικών γραμμών του. Ας δούμε τώρα έναν άλλο τρόπο σχηματισμού ενός συστήματος δ.ε. Θεωρούμε τη γραμμική δ.ε.

$$y'''+3ty''-ty'+y=2t.$$

Θέτουμε

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y_1' \\ y_3 = y_2' \end{cases},$$

οπότε η παραπάνω δ.ε. γράφεται σαν ένα γραμμικό σύστημα δ.ε. με παραγώγους μόνον 1ης τάξης ως εξής:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -3ty_3 + ty_2 - y_1 + 2t \end{cases},$$

ή πιο συνοπτικά υπό μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & t & -3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix},$$

δηλ.

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}(t).$$

Αυτή είναι μια γενικότερη παρατήρηση που μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Μια δ.ε. n τάξης μπορεί πάντα να αντικατασταθεί με ένα σύστημα n δ.ε. που να έχει μόνον παραγώγους 1ης τάξης των αγνώστων συναρτήσεων. Ισχύει και το αντίστροφο.

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την επίλυση συστημάτων δ.ε. 1ης τάξης.

Ορισμός 4.1. *Ένα σύστημα δ.ε. 1ης τάξης περιγράφεται από n το πλήθος δ.ε. της μορφής*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \cdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}, \qquad (4.1)$$

όπου $f_1,...,f_n$ *είναι γνωστές συναρτήσεις* $n+1$ *μεταβλητών που εξαρτώνται εν γένει από κάποιες (ή και όλες) τις παραμέτρους* $t, y_1, y_2,..., y_n$, *ενώ* $y_1, y_2,..., y_n$ *είναι* n *το πλήθος άγνωστες πραγματικές συναρτήσεις. Η (4.1) καλείται* ***κανονική μορφή*** *του συστήματος δ.ε.*

Ορισμός 4.2. *Καλούμε* ***λύση*** *του συστήματος δ.ε. (4.1) ένα σύνολο* n *συναρτήσεων* $y_1 = y_1(t),..., y_n = y_n(t)$ *που επαληθεύουν την (4.1) για κάθε* t *σε κάποιο διάστημα* I *της πραγματικής ευθείας.*

Ορισμός 4.3. *Καλούμε* ***γενική λύση*** *του συστήματος δ.ε. (4.1) κάθε λύση*

$$\begin{cases} y_1 = \phi_1(t, c_1, \ldots, c_n) \\ \qquad \cdots \\ y_1 = \phi_n(t, c_1, \ldots, c_n) \end{cases},$$

όπου $c_1, \ldots, c_n$ *είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.* ***Μερική λύση*** *της (4.1) καλείται κάθε οικογένεια* n *το πλήθος συναρτήσεων* $y_1, \ldots, y_n$ *που επαληθεύει την (4.1) και προκύπτει από τη γενική λύση για συγκεκριμένη επιλογή των σταθερών* $c_1, \ldots, c_n$.

Ορισμός 4.4. *Καλούμε* ***πρόβλημα αρχικών τιμών*** *για το σύστημα δ.ε. (4.1) την εύρεση μιας λύσης* $y_1 = y_1(t),..., y_n = y_n(t)$ *της (4.1) που ταυτόχρονα ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες*

$$\begin{cases} y_{01} = y_1(t_0) \\ \quad \cdots \\ y_{0n} = y_n(t_0) \end{cases} \tag{4.2}$$

για κάποιο $t_0 \in I$, *όπου* I *είναι ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας και* $y_{01},..., y_{0n}$ *είναι δοθέντες πραγματικοί αριθμοί.*

Θεώρημα 4.1. *Εστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (4.2), δηλ.*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2,..., y_n) \\ \qquad \cdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2,..., y_n) \end{cases}, \quad \begin{cases} y_{01} = y_1(t_0) \\ \quad \cdots \\ y_{0n} = y_n(t_0) \end{cases}.$$

Αν οι συναρτήσεις $f_1,...,f_n$ *και* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $i,j=1,...,n$ *είναι συνεχείς σ' ένα ορθογώνιο Τ κέντρου* $(t_0,y_{01},...,y_{0n})$*, όπου* $y_{01},...,y_{0n}$ *είναι δοθέντες πραγματικοί αριθμοί, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση* $y_1=y_1(t),...,y_n=y_n(t)$ *για κάθε* t *σε κατάλληλη περιοχή του σημείου* t_0*.*

Υπάρχουν δυο βασικές κατηγορίες συστημάτων δ.ε. 1ης τάξης: τα **γραμμικά** και τα **μη γραμμικά**.

Ορισμός 4.5. *Ενα σύστημα* n *διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης καλείται* ***γραμμικό*** *αν είναι της μορφής*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + ... + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ \cdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + ... + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases}, \qquad (4.3)$$

όπου οι a_{ij} $(i,j=1,...,n)$ *και* b_i $(i=1,...,n)$ *είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις. Προφανώς, ένα γραμμικό σύστημα δ.ε. μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως*

$$\mathbf{Y}'(t)=\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)+\mathbf{B}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix},$$

όπου $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(t)$ *είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων συναρτήσεων,* $\mathbf{A}=\mathbf{A}(t)$ *είναι ο* $n\times n$ *πίνακας των συντελεστών των αγνώστων και* $\mathbf{B}=\mathbf{B}(t)$ *είναι ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων. Αν* $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ *(*$\mathbf{0}$ *είναι ο μηδενικός πίνακας), δηλ.*

$$\mathbf{Y}'(t)=\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{Y}(t),$$

τότε μιλούμε για ***ομογενές γραμμικό σύστημα δ.ε.****, αλλιώς μιλούμε για μη ομογενές. Αν ο πίνακας* $\mathbf{A}$ *είναι σταθερός, δηλαδή ισχύει*

$$a_{ij}(t)=a_{ij},\quad \forall t\in I,$$

όπου a_{ij} *είναι* ***πραγματικές σταθερές****, τότε το σύστημα*

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}(t)$$

καλείται ***γραμμικό με σταθερούς συντελεστές****, διαφορετικά καλείται* ***γραμμικό με μεταβλητούς συντελεστές****.*

Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει μεταβλητούς συντελεστές τότε η γενική μέθοδος επίλυσης αυτών αποτελεί γενίκευση της μεθόδου του Κεφ. 3. Στο εξής ασχολούμαστε κυρίως με γραμμικά συστήματα δ.ε. με σταθερούς συντελεστές.

4.2 Η μέθοδος απαλοιφής.

Η μέθοδος απαλοιφής βασίζεται στη μετατροπή ενός γραμμικού συστήματος δ.ε. (με σταθερούς ή μεταβλητούς συντελεστές) με n άγνωστες συναρτήσεις σε μια γραμμική δ.ε. n τάξης. Όταν το πλήθος των εξισώσεων είναι σχετικά μικρό είναι μια σχετικά εύκολη μέθοδος επίλυσης.

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα δ.ε. $\begin{cases} x' = -7x - 6y \\ y' = 12x + 10y + e^t \end{cases}$.

Παραγωγίζουμε τη 2η εξίσωση και έχουμε

$$y'' = 12x' + 10y' + e^t .$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της x' από την 1η εξίσωση και παίρνουμε

$$y'' = 12\left(-7x - 6y\right) + 10y' + e^t = 10y' - 84x - 72y + e^t .$$

Λύνουμε τη 2η εξίσωση του αρχικού συστήματος ως προς x και έχουμε και και αντικαθιστούμε στην παραπάνω εξίσωση. Ετσι έχουμε

$$y'' = 10y' - 84\left(\frac{y' - 10y - e^t}{12}\right) - 72y + e^t$$

και μετά από πράξεις

$$y'' - 3y' + 2y = 8e^t ,$$

δηλ. μια μη ομογενή γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση αυτής (βλ. Κεφ. 3) είναι

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 8(t+1)e^t .$$

Τότε

$$x = \frac{y' - 10y - e^t}{12} = \frac{-9c_1 e^t - 8c_2 e^{2t} + 72te^t + 63e^t}{12} . \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα δ.ε. $\begin{cases} x' - y' + x = 0 \\ x'' - y' + 3x - y = e^{2t} \end{cases}$.

Λύνουμε την 1η εξίσωση ως προς y' και αντικαθιστούμε στην 2η εξίσωση. Ετσι παίρνουμε

$$x'' - x - x' + 3x - y = e^{2t} \Leftrightarrow x'' - x' + 2x - y = e^{2t} .$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία και έχουμε

$$x''' - x'' + 2x' - y' = 2e^{2t}$$

και αντικαθιστούμε την τιμή του y' από την 1η εξίσωση του αρχικού συστήματος. Ετσι παίρνουμε

$$x''' - x'' + 2x' - x - x' = 2e^{2t} \Leftrightarrow x''' - x'' + x' - x = 2e^{2t}$$

με γενική λύση

$$x = c_1 e^t + c_2 \sigma\upsilon\nu t + c_3 \eta\mu t + \frac{2e^{2t}}{15} .$$

Στη συνέχεια:

$$y' = -x - x' \Rightarrow y = -2c_1 e^t - c_2 (\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t) - c_3 (\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t) - \frac{2e^{2t}}{5} . \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα δ.ε. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$.

Παραγωγίζουμε την 1η εξίσωση και αντικαθιστούμε σ' αυτή τις τιμές των y' και z' από τη 2η και 3η εξίσωση αντιστοίχως. Ετσι παίρνουμε

$$x'' = y' + z' = (x+z) + (x+y) = 2x + (y+z) = 2x + x'.$$

Η γενική λύση της $x'' = 2x + x'$ (γραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές) είναι:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}.$$

Τότε

$$y' = x + z = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + z \Rightarrow y'' = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + z'$$

$$\Rightarrow y'' = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + (x+y) \Rightarrow y'' - y = 3c_2 e^{2t},$$

η οποία είναι μη ομογενής 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και γενική λύση

$$y = c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}.$$

Τότε

$$z' = y + z = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \Rightarrow z = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t}. \quad \square$$

4.3. Η Μέθοδος πινάκων.

Εστω $\mathbf{A}$ είναι σταθερός πίνακας και

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t)$$

είναι $n \times n$ ομογενές σύστημα. Εφόσον αυτό είναι ισοδύναμο με μια ομογενή γραμμική δ.ε. n τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι λογικό ν' αναρωτηθούμε αν υπάρχουν λύσεις της μορφής

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C} \cdot e^{\lambda t},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ και $\mathbf{C}$ σταθερό μη μηδενικό διάνυσμα στήλη. Τότε:

Πρόταση 4.1. *Αν $\mathbf{C}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε η $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C} \cdot e^{\lambda t}$ είναι μια λύση του ομογενούς συστήματος δ.ε. $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t)$.*

Απόδειξη. Αντικαθιστούμε την $\mathbf{Y}(t)=\mathbf{C}\cdot e^{\lambda t}$ στην $\mathbf{Y}'(t)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}(t)$ και παίρνουμε:

$$\mathbf{C}\cdot\lambda e^{\lambda t}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\cdot e^{\lambda t}\Rightarrow\lambda\cdot\mathbf{C}e^{\lambda t}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\cdot e^{\lambda t}\Rightarrow\lambda\cdot\mathbf{C}e^{\lambda t}=\lambda\cdot\mathbf{C}\cdot e^{\lambda t}.\quad\square$$

Μελετούμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει n το πλήθος πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1,...,\lambda_n$. Είναι γνωστό από τη γραμμική άλγεβρα ότι σ' αυτές τις ιδιοτιμές αντιστοιχούν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα στήλες $\xi_1,...,\xi_n$. Οι λύσεις

  $$\xi_1 e^{\lambda_1 t},...,\xi_n e^{\lambda_n t}$$

  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

- Ο $n\times n$ πίνακας $\mathbf{A}$ έχει μια πραγματική ιδιοτιμή λ_i αλγεβρικής πολλαπλότητας ν_i. Αν η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i ταυτίζονται, τότε στην ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχούν ν_i το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

  $$\xi_1 e^{\lambda_i t},...,\xi_n e^{\lambda_i t}$$

  Αν η αλγεβρική πολλαπλότητα δεν είναι ίση της γεωμετρικής, τότε δεν μπορούμε να βρούμε ν_i γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής $\xi_i e^{\lambda_i t}$. Πάντα όμως υπάρχει μια λύση της μορφής $\xi_i e^{\lambda_i t}$. Αναζητούμε μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητα λύση της μορφής

  $$\left(t\boldsymbol{\eta}_i+\boldsymbol{\sigma}_i\right)e^{\lambda_i t}$$

  όπου $\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\sigma}_i$ άγνωστα διανύσματα στήλες τα οποία προσδιορίζουμε με αντικατάσταση στην ομογενή δ.ε. $\mathbf{Y}'(t)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}(t)$. Αν χρειαζόμαστε και τρίτη γραμμικά ανεξάρτητη λύση την αναζητούμε στη μορφή

  $$\left(t^2\mathbf{w}_i+t\boldsymbol{\eta}_i+\boldsymbol{\sigma}_i\right)e^{\lambda_i t},$$

όπου $\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{w}_i$ άγνωστα διανύσματα στήλες τα οποία προσδιορίζουμε με αντικατάσταση στην ομογενή δ.ε. $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t)$ κλπ.

- Αν έχουμε μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda \pm i\mu$, τότε σ' αυτές αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$. Ετσι οι

$$(\mathbf{u} + i\mathbf{v})e^{(\lambda+i\mu)t} \text{ και } (\mathbf{u} - i\mathbf{v})e^{(\lambda-i\mu)t}$$

είναι μιγαδικές λύσεις της ομογενούς. Τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος

$$e^{\lambda t}(\mathbf{u}\sigma\upsilon\nu(\mu t) - \mathbf{v}\eta\mu(\mu t)) \text{ και } e^{\lambda t}(\mathbf{u}\eta\mu(\mu t) + \mathbf{v}\sigma\upsilon\nu(\mu t))$$

των παραπάνω είναι δυο πραγματικές και γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς δ.ε. Αν οι μιγαδικές ρίζες έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1 εργαζόμαστε όπως πριν.

Στην περίπτωση μη ομογενούς συστήματος δ.ε. με σταθερούς συντελεστές, βρίσκουμε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος όπως παραπάνω και μια μερική λύση του μη ομογενούς συστήματος με τη μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών που αναπτύξαμε στο 3ο Κεφάλαιο.

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα δ.ε. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$.

Λύση. Εχουμε

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ συντελεστών είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του:

$$Det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -1.$$

Εστω (x, y) είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 5$. Τότε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4x = 2y \\ 4x = 2y \end{vmatrix} \Leftrightarrow y = 2x .$$

Αρα οι λύσεις του συστήματος είναι $(x, y) = (x, 2x) = x(1, 2),\ x \in \mathbb{R}$ και το διάνυσμα $\xi_1 = (1, 2)$ είναι μια βάση του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = -1$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = -x \\ y = -x \end{vmatrix} \Leftrightarrow y = -x .$$

Αρα οι λύσεις του συστήματος είναι $(x, y) = (x, -x) = x(1, -1),\ x \in \mathbb{R}$ και το διάνυσμα $\xi_2 = (1, -1)$ είναι είναι μια βάση του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων. Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, οι δυο λύσεις

$$\xi_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}, \quad \xi_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} . \qquad \square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι το

$$Det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - \lambda^3 .$$

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $3\lambda^2-\lambda^3$ δηλαδή

$$Det\left(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I}_3\right)=0\Leftrightarrow \boxed{\lambda=0\ (\delta\iota\pi\lambda\eta)},\ \boxed{\lambda=3}\,.$$

Για $\lambda=0$ έχουμε

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\xi}=\lambda\cdot\boldsymbol{\xi}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\xi_1-\xi_2-\xi_3=0\,.$$

Θέτουμε $\xi_2=c=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\grave{\alpha}$ και $\xi_3=d=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\grave{\alpha}$ οπότε η λύση του συστήματος είναι όλα τα διανύσματα $\boldsymbol{\xi}=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)$ των οποίων οι συντεταγμένες είναι της μορφής

$$\boldsymbol{\xi}=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\left(c+d,c,d\right)=c\left(1,1,0\right)+d\left(1,0,1\right).$$

Τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα ορίζουν διδιάστατο χώρο με βάση $\left\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\right\}=\left\{(1,1,0),(1,0,1)\right\}$. Δηλαδή η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda=0$ ταυτίζονται. Εκλέγουμε τη βάση αυτή ως αντιπρόσωπο και λέμε ότι στην ιδιοτιμή $\lambda=0$ αντιστοιχεί η βάση ιδιοδιανυσμάτων $\left\{(1,1,0),(1,0,1)\right\}$.

Για $\lambda=3$ έχουμε

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\xi}=\lambda\cdot\boldsymbol{\xi}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\xi_1=-\xi_3\\\xi_2=\xi_3\end{vmatrix}.$$

Επομένως:

$$\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\left(-\xi_3,\xi_3,\xi_3\right)=\xi_3\left(-1,1,1\right),\ \xi_3\in\mathbb{R}\,.$$

Τελικά γενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι η

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1e^{0\cdot t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2e^{0\cdot t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_3e^{2\cdot t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+c_2-c_3e^{2\cdot t}\\c_1+c_3e^{2\cdot t}\\c_2+c_3e^{2\cdot t}\end{pmatrix}.\qquad\square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι το

$$Det\left(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_3\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda - 2\right)^2 \left(\lambda - 3\right)$$

με ιδιοτιμές

$$\lambda = 2 \ (\delta\iota\pi\lambda\dot{\eta}), \ \lambda = 3.$$

Για $\lambda = 2$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = 0 \\ z = -y, \\ z = -y \end{vmatrix}$$

Άρα $\left(x, y, z\right) = \left(x, 0, 0\right) = x\left(1, 0, 0\right), \ x \in \mathbb{R}$. Διαπιστώνουμε ότι ενώ η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 2$ είναι ίση με 2, εν τούτοις η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με 1. Προφανώς μια λύση του συστήματος είναι

$$\xi_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Ψάχνουμε τώρα μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση της μορφής

$$\left(\boldsymbol{\sigma} + t\boldsymbol{\eta}\right) e^{2t},$$

όπου $\boldsymbol{\sigma} = \left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right), \boldsymbol{\eta} = \left(\eta_1, \eta_2, \eta_3\right)$ είναι διανύσματα στήλες διάστασης που πρέπει να προσδιορίσουμε. Αντικαθιστούμε τη λύση αυτή στο σύστημα και παίρνουμε

$$2\left(\boldsymbol{\sigma} + t\boldsymbol{\eta}\right) e^{2t} + \boldsymbol{\eta} e^{2t} = \mathbf{A} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma} + t\boldsymbol{\eta}\right) e^{2t}$$

$$\Rightarrow e^{2t}\left(2\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) + te^{2t}\left(2\boldsymbol{\eta} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) = \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\eta}-\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{O} \\ 2\boldsymbol{\eta}-\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\eta}=\mathbf{O} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\eta} \\ \left(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3\right)\cdot\boldsymbol{\eta}=\mathbf{O} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\eta}=\left(x,0,0\right) \end{cases}$$

διότι η 2η εξίσωση $\left(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3\right)\cdot\boldsymbol{\eta}=\mathbf{O}$ υπονοεί ότι το $\boldsymbol{\eta}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=2$ και άρα είναι της μορφής $\boldsymbol{\eta}=\left(x,0,0\right)$ όπως δείξαμε παραπάνω. Λύνουμε τώρα ως προς $\boldsymbol{\sigma}$ την εξίσωση

$$\left(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\eta}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1=-x\\\sigma_2=x\\\sigma_3=-x\end{cases}.$$

Επιλέγουμε $\boldsymbol{\sigma}=\left(-1,1,-1\right)$ και ορίζουμε την

$$\xi_2 e^{2t}=\left(\boldsymbol{\sigma}+t\boldsymbol{\eta}\right)e^{2t}=\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)e^{2t}=\begin{pmatrix}\left(t-1\right)e^{2t}\\1\\1\end{pmatrix}$$

ως μια δεύτερη λύση του συστήματος γραμμικά ανεξάρτητη της $\xi_1 e^{2t}$. Για $\lambda=3$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x=c\\y=c\\z=-2c\end{vmatrix},$$

Άρα $\left(x,y,z\right)=\left(c,c,-2c\right)=c\left(1,1,-2\right),\ c\in\mathbb{R}$. Μια τρίτη λύση του συστήματος είναι η

$$\xi_3 e^{\lambda_3 t}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}e^{3t}.$$

και η γενική λύση είναι

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}\left(t-1\right)e^{2t}\\1\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}e^{3t}=\begin{pmatrix}c_1e^{2t}+c_2\left(t-1\right)e^{2t}+c_3e^{3\cdot t}\\c_1+c_3e^{3t}\\c_2-2c_3e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα. Εστω δυο βαρέλια με 100 ℓt αλατόνερο το καθένα, έχουν 20 ℓt αλάτι το πρώτο και 10 ℓt αλάτι το δεύτερο. Τότε αρχίζει να μπαίνει νερό στο 1ο βαρέλι με ρυθμό $2\ \ell t/\min$ ενώ ταυτόχρονα καλά ανακατεμένο μείγμα ρέει από το 1ο στο 2ο βαρέλι με ρυθμό $2\ \ell t/\min$ και καλά ανακατεμένο μείγμα από το 2ο βαρέλι ρέει προς τα έξη επίσης με ρυθμό $2\ \ell t/\min$. Ποια είναι η ποσότητα αλατιού που υπάρχει στο κάθε βαρέλι κάθε χρονική στιγμή;

Λύση. Εστω $x=x(t)$ και $y=y(t)$ είναι η ποσότητα αλατιού στο 1ο και 2ο βαρέλι αντίστοιχα. Το αλατόνερο (ομοιόμορφα κατανεμημένο) στο 1ο βαρέλι έχει 20% αλάτι και 80% νερό. Αρα στη μονάδα του χρόνου αφού μπαίνει στο 1ο βαρέλι μόνον νερό και μετακινείται στο 2ο βαρέλι ίση ποσότητα αλατόνερου χάνεται το 20% αλατιού από την ποσότητα του αλατόνερου που μετακινείται στο 2ο βαρέλι. Αρα αφού ο ρυθμός ροής στο 2ο βαρέλι είναι $2\ \ell t/\min$ θα έχουμε

$$x'(t)=-\frac{2}{100}x(t).$$

Στο 2ο βαρέλι εισέρχεται αλατόνερο από το 1ο και ταυτόχρονα εξέρχεται από το 2ο με τον ίδιο ρυθμό, άρα

$$y'(t)=\frac{2}{100}x(t)-\frac{2}{100}y(t).$$

Εχουμε λοιπόν το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} x'(t)=-\dfrac{2}{100}x(t) \\ y'(t)=\dfrac{2}{100}x(t)-\dfrac{2}{100}y(t) \end{cases},\quad \begin{cases} x(0)=20 \\ y(0)=10 \end{cases}.$$

Η λύση αυτού είναι η

$$\begin{cases} x=20e^{-t/50} \\ y=\left(10+\dfrac{2t}{5}\right)e^{-t/50} \end{cases}.$$ □

Ασκήσεις

1. Επιλύστε τα συστήματα δ.ε.

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 9x + y \end{cases}$$ **Απ.** $$\begin{cases} x = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} \\ y = 3c_1 e^{4t} - 3c_2 e^{-2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + z = x \\ z' - y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$ **Απ.** $$\begin{cases} y = e^t \\ z = e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} w' - y = 0 \\ w + y' + z = 1 \\ w - y + z' = 2\eta\mu x \end{cases}, \quad \begin{cases} w(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$ **Απ.** $$\begin{cases} w = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \\ y = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' + v = 0 \\ u'' - v' = -2e^t \end{cases}$$ **Απ.** $$\begin{cases} u = -c_1 e^{-t} - e^t + c_2 t + c_3 \\ y = c_1 e^{-t} + e^t \end{cases}$$