Κεφάλαιο 5

Ο μετασχηματισμός Laplace.

5.1. Εισαγωγή.

Τόσο οι συνήθεις όσο και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν νόμους με τους οποίους κάποιες ποσότητες μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο, όπως το ρεύμα σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, οι ταλαντώσεις παλλόμενου ελατηρίου, η ροή θερμότητας σε μονωμένο αγωγό κλπ. Αυτές οι εξισώσεις σε συνδυασμό με τις αρχικές συνθήκες περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος κάθε χρονική στιγμή. Μια σημαντική μέθοδος για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι και η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace.

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι σημαντικός διότι:

- εφαρμόζεται σε μια μεγάλη ποικιλία συναρτήσεων και σε συναρτήσεις/σήματα βραχέας ή και στιγμιαίας διάρκειας.

- Επιλύει προβλήματα αρχικών συνθηκών σε μη ομογενείς γραμμικές δ.ε με σταθερούς συντελεστές όπου ο σταθερός όρος μπορεί να μην είναι συνεχής αλλά μια γενικευμένη συνάρτηση, όπως π.χ. η συνάρτηση Dirac.

5.2. Ορισμός μετασχηματισμού Laplace.

Ορισμός 5.1. *Εστω* $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$. *Καλούμε μετασχηματισμό Laplace της* f, *συμβολικά* $\mathcal{L}(f)$ *τη συνάρτηση*

$$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} f(t)e^{-st}\,dt\,, \qquad (5.1)$$

η οποία ορίζεται για όλες τις τιμές του $s\in\mathbb{R}$ *για τις οποίες το μη γνήσιο ολοκλήρωμα της* $f(t)e^{-st}$ *συγκλίνει.*

Παρατηρήσεις. (α) Ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται και για μιγαδικές συναρτήσεις $f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$ ως

$$\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}\big(\mathrm{Re}(f)\big)+i\,\mathcal{L}\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace επεκτείνεται και για όλες τις τιμές του $s \in \mathbb{C}$ για τις οποίες το μη γνήσιο ολοκλήρωμα της $f(t)e^{-st}$ συγκλίνει. Στο εξής για απλότητα θεωρούμε πραγματικές συναρτήσεις f και $s \in \mathbb{R}$.

(β) Ο μετασχηματισμός Laplace απεικονίζει μια συνάρτηση f ορισμένη στο πεδίο του χρόνου t σε μια νέα συνάρτηση $F = F(s)$ στο πεδίο συχνοτήτων. Δηλαδή:

$$f \overset{\mathcal{L}}{\to} F .$$

(β) Εφόσον ο μετασχηματισμός Laplace απεικονίζει συναρτήσεις σε συναρτήσεις, είναι λογικό να αναρωτηθούμε αν υπάρχει αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}$. Πράγματι, υπό κατάλληλες συνθήκες υπάρχει αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}$ όπως θα δούμε παρακάτω. Τότε γράφουμε:

$$f \leftrightarrow F .$$

Μια ικανή συνθήκη ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace δίνει το ακόλουθο:

Θεώρημα 5.1. *Εστω* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι:*

(i) *τμηματικά συνεχής συνάρτηση (δηλαδή είναι συνεχής παντού πλην πεπερασμένου πλήθος σημείων* $t_1, ..., t_N$ *για τα οποία υπάρχουν τα πλευρικά όρια* $\lim_{t \to t_i^+} f(t)$ και $\lim_{t \to t_i^-} f(t)$, $i = 1, ..., N$ *και είναι πεπερασμένα) και*

(ii) *εκθετικής τάξης α (δηλαδή* $|f(t)| \le Me^{at}$, $\forall t > c$, *όπου* M, a, c *είναι πραγματικές σταθερές με* $M, c > 0$*).*

Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f *ορίζεται για κάθε* $s > a$ *και μάλιστα ισχύει:*

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0.$$

Απόδειξη. Εφόσον $|f(t)| \le Me^{at}$ $\forall t > c$, έχουμε:

$$\int_0^{+\infty}\left|f(t)e^{-st}\right|dt=\int_0^{c}\left|f(t)e^{-st}\right|dt+\int_c^{+\infty}\left|f(t)e^{-st}\right|dt.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο, διότι η $\left|f(t)e^{-st}\right|$ είναι ολοκληρώσιμη ως τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο $[0,c]$. Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int_c^{+\infty}\left|f(t)e^{-st}\right|dt\le\int_c^{+\infty}Me^{(a-s)t}dt=\frac{Me^{c(a-s)}}{s-a},\ \ s>a.$$

Αρα το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα (άρα συγκλίνει) μόνον για $s>a$. Το γεγονός ότι $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$ είναι εύκολο. □

Ας υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων.

- $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}:\ f(t)=1.$

Τότε:

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{s},\ \ s>0.$$

Αρα:

$$\boxed{\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s},\ \ s>0}.$$

- $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}:\ f(t)=t.$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\int_0^{+\infty}te^{-st}dt=\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{s^2},\ s>0.$$

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι $\lim\limits_{t\to+\infty}t^ne^{-at}=0,\ \left(a>0,\ n\in\mathbb{N}\right)$ όπως μπορεί εύκολα να δειχθεί με εφαρμογή του κανόνα L' Hospital n φορές. Αρα

$$\lim_{t\to+\infty}\left|te^{-st}\right|=\lim_{t\to+\infty}\left(te^{-st}\right)=0\Leftrightarrow s>0.$$

Τελικά:

$$\boxed{\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2},\ s>0}.$$

Σημείωση. Μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά ότι

$$\boxed{\mathcal{L}\left(t^n\right)=\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0,\ \ n\in\mathbb{N}}.$$

- $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}: f(t)=\eta\mu(at),\ (a\in\mathbb{R}).$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$I=\int_0^{+\infty}\eta\mu(at)\cdot e^{-st}dt=\left[-\frac{\eta\mu(at)\cdot e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty}+\frac{a}{s}\int_0^{+\infty}\sigma\upsilon\nu(at)\cdot e^{-st}dt$$

$$=\frac{a}{s}\left[-\frac{\sigma\upsilon\nu(at)\cdot e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty}-\frac{a^2}{s^2}\int_0^{+\infty}\eta\mu\sigma\upsilon\nu(at)\cdot e^{-st}dt\Leftrightarrow I=\frac{a}{s^2}-\frac{a^2}{s^2}\cdot I$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0.$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\eta\mu(at)e^{-st}\right|=0 \text{ και } \lim_{t\to+\infty}\left|\sigma\upsilon\nu(at)\cdot e^{-st}\right|=0,\ (s>0)$$

με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής. Αρα:

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\eta\mu(at)\right)=\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0}.$$

- $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}: f(t)=\sigma\upsilon\nu(at),\ a\in\mathbb{R}.$

Εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση του $\eta\mu t$ και βρίσκουμε

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\sigma\upsilon\nu(at)\right)=\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0}.$$

- $f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}:\ f(t)=e^{at}\ \ (a\in\mathbb{R})$.

Τότε:

$$\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt=\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{s-a},\ \ s>a\,.$$

Τελικά:

$$\boxed{\mathcal{L}\left(e^{at}\right)=\frac{1}{s-a},\ \ s>a}\,.$$

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

- $f(t)=te^{2t},\ t\geq 0$. **Απ.** $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)^2},\ s>2$

- $f(t)=2|t-1|,\ t\geq 0$. **Απ.** $F(s)=\dfrac{4e^{-s}+2s-2}{s^2},\ s>0$

- $u(t)=\begin{cases}2 & t\geq 1\\ e^t & 0\leq t<1\end{cases}$. **Απ.** $F(s)=\dfrac{e^{1-s}-1}{1-s}+\dfrac{2e^{-s}}{s},\ s>0$

5.3. Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

Αν εξαιρέσουμε κάποιες στοιχειώδεις συναρτήσεις των οποίων ο μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται από τον τύπο (5.1) με απ' ευθείας ολοκλήρωση, για συναρτήσεις με πιο πολύπλοκο τύπο τα πράγματα δυσκολεύουν. Απ' την άλλη μεριά ένα κριτήριο χρησιμότητας ενός μετασχηματισμού είναι αν υπάρχουν ιδιότητες αυτού που να διευκολύνουν τους υπολογισμούς. Στην ενότητα αυτή αναφέρουμε τέτοιες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

<u>Α. Γραμμικότητα</u>

Θεώρημα 5.2. *Έστω* $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *έχουν μετασχηματισμούς Laplace* $\mathcal{L}(f)$ *και* $\mathcal{L}(g)$ *αντιστοίχως. Τότε ορίζεται και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης* $af\pm bg,\ (a,b\in\mathbb{R})$ *και ισχύει*

$$\mathcal{L}(af \pm bg)(s) = a\mathcal{L}(f)(s) \pm b\mathcal{L}(g)(s)$$

για κάθε s *στο κοινό πεδίο ορισμού των* $\mathcal{L}(f)$ *και* $\mathcal{L}(g)$.

Απόδειξη. Αμεση συνέπεια του τύπου 5.1 και της γραμμικότητας του ολοκληρώματος. □

Παράδειγμα. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων $f(t) = \sinh(at)$, $g(t) = \cosh(at)$ και $h(t) = \eta\mu^2(at)$ για $t \geq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση. Λόγω γραμμικότητας έχουμε

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\sinh(at)) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{at}) - \mathcal{L}(e^{-at})\right).$$

Επειδή

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a},\ s > a \text{ και } \mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a},\ s > -a$$

(βλέπε προηγούμενη ενότητα), παίρνουμε

$$\mathcal{L}(\sinh(at)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2},\ \ s > |a|.$$

Τελικά:

$$\boxed{\mathcal{L}(\sinh(at)) = \frac{a}{s^2 - a^2},\ \ s > |a|}.$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\cosh(at)) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{at}) + \mathcal{L}(e^{-at})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2},\ \ s > |a|.$$

Τελικά:

$$\mathcal{L}(\cosh(at)) = \frac{s}{s^2 - a^2},\ \ s > |a|$$

Τέλος για την $h(t)=\eta\mu^2(at)$ έχουμε

$$\mathcal{L}(h)=\mathcal{L}\left(\eta\mu^2(at)\right)=\mathcal{L}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2at)}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}\left(\sigma\upsilon\nu(2at)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4a^2}\right)=\frac{2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)},\ s>0. \qquad \square$$

<u>**Β. Μετάθεση στο πεδίο των συχνοτήτων** s</u>

Θεώρημα 5.3. *Εστω* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *έχει μετασχηματισμό Laplace* $\mathcal{L}(f)(s)=F(s)\ \forall s>a,\ (a\in\mathbb{R})$. *Τότε ορίζεται και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης* $f(t)e^{bt}\ \ (b\in\mathbb{R})$ *και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left(f(t)e^{bt}\right)(s)=F(s-b),\ s>a+b.$$

Απόδειξη. Αμεση απ' τον τύπο (5.1). $\square$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων $f(t)=e^{bt}\cdot\sinh(at)$ και $h(t)=e^{bt}\cdot\eta\mu^2(at)$ για $t\geq 0,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Λύση. Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$\mathcal{L}\left(\sinh(at)\right)=\frac{a}{s^2-a^2},\ \ s>|a|.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 5.3 παίρνουμε

$$\mathcal{L}\left(e^{bt}\cdot\sinh(at)\right)=\mathcal{L}\left(\sinh(at)\right)(s-b)=\frac{a}{(s-b)^2-a^2},\ \ s-b>|a|$$

Τελικά:

$$\mathcal{L}\left(e^{bt}\cdot\sinh(at)\right)=\frac{a}{(s-b)^2-a^2},\ \ s>b+|a|.$$

Με παρόμοιο τρόπο εργαζόμαστε για την $h(t)=e^{bt}\cdot\eta\mu^2(at)$. Είδαμε

στο προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$\mathcal{L}\left(\eta\mu^2(at)\right)=\frac{2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)},\ s>0.$$

Τότε

$$\mathcal{L}\left(e^{bt}\cdot\eta\mu^2(at)\right)=\frac{2a^2}{(s-b)\left((s-b)^2+4a^2\right)},\ s-b>0. \qquad \square$$

Γ. Μετάθεση στο πεδίο του χρόνου

Θεώρημα 5.4. *Εστω* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *έχει μετασχηματισμό Laplace* $\mathcal{L}(f)(s)=F(s),\ s>a,\ (a\in\mathbb{R})$. *Τότε ορίζεται και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t)=\begin{cases} f(t-b) & t\geq b \\ 0 & t<b \end{cases},\ t\geq 0,\ b>0$$

και ισχύει

$$\mathcal{L}\left(g(t)\right)(s)=e^{-bs}F(s),\ s>a.$$

Απόδειξη. Αμεση απ' τον τύπο (5.1). $\square$

Σημείωση. Εστω

$$u_b(t)=\begin{cases} 1, & t>b \\ 0, & t<b \end{cases},\ t\in\mathbb{R},\ b>0$$

είναι η ***μοναδιαία συνάρτηση βήματος Heaviside***. Για f όπως στο θεώρημα 5.4, η παραπάνω ιδιότητα γράφεται ως εξής:

$$\boxed{\mathcal{L}\left(u_b f(t-b)\right)(s)=e^{-bs}F(s),\ s>a}.$$

Δ. Διαστολή/Στάθμιση

Θεώρημα 5.5. *Εστω* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *έχει μετασχηματισμό Laplace* $\mathcal{L}(f)(s)=F(s),\ s>a,\ (a\in\mathbb{R})$. *Τότε ορίζεται και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης* $f(bt)\ (b>0)$ *και ισχύει*

$$\mathcal{L}\big(f(bt)\big)(s)=\frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right),\ s>ab\,.$$

Απόδειξη. Από τον τύπο (5.1), με αλλαγή μεταβλητής $bt=y$ έχουμε

$$\mathcal{L}\big(f(bt)\big)(s)=\int_0^{+\infty}f(bt)e^{-st}dt=\frac{1}{b}\cdot\int_0^{+\infty}f(y)e^{-sy/b}dy$$

$$=\frac{1}{b}\cdot\int_0^{+\infty}f(y)e^{-\frac{s}{b}\cdot y}dy=\frac{1}{b}\cdot F\left(\frac{s}{b}\right),\ \frac{s}{b}>a\,. \qquad \square$$

E. Moments

Θεώρημα 5.6. *Εστω* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης* a $(a\in\mathbb{R})$ *συνάρτηση με μετασχηματισμό Laplace* $\mathcal{L}(f)(s)=F(s),\ s>a$. *Τότε ορίζεται και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης* $t^n f(t)$ $(n\in\mathbb{N})$ *και ισχύει*

$$\mathcal{L}\big(t^n f(t)\big)(s)=(-1)^n F^{(n)}(s),\ s>a\,.$$

Απόδειξη. Για $n=1$ έχουμε

$$F'(s)=\left(\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt\right)'=(-s)\cdot\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=(-s)\cdot F(s),$$

(λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης του ολοκληρώματος ως προς s). Αρα η πρόταση ισχύει για $n=1$. Στη συνέχεια εργαζόμαστε επαγωγικά. $\square$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t)=t\cdot\sigma\upsilon\nu(at)$ για $t\geq 0,\ a\in\mathbb{R}$.

Λύση. Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα 6.6 και το γεγονός ότι

$$\mathcal{L}\big(\sigma\upsilon\nu(at)\big)(s)=F(s)=\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$$

όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, παίρνουμε

$$\mathcal{L}\left(t\cdot\sigma\upsilon\nu\left(at\right)\right)=\left(-1\right)^{1}\cdot F'\left(s\right)=-\left(\frac{s}{s^{2}+a^{2}}\right)'=\frac{s^{2}-a^{2}}{\left(s^{2}+a^{2}\right)^{2}},\ s>0.\qquad\square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t)=t^{2}\cdot e^{at}$ για $t\geq 0,\ a\in\mathbb{R}$.

Λύση. Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα 5.6 και το γεγονός ότι

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right)\left(s\right)=F\left(s\right)=\frac{1}{s-a},\ s>a$$

όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, παίρνουμε

$$\mathcal{L}\left(t^{2}\cdot e^{at}\right)=\left(-1\right)^{2}\cdot F''\left(s\right)=\left(\frac{1}{s-a}\right)''=\frac{2}{\left(s-a\right)^{3}},\ s>a.\qquad\square$$

ΣΤ. <u>ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΟΣ στο πεδίο του χρόνου</u>

Θεώρημα 5.7. *Εστω* $f:\left[0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ *είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης* a $\left(a\in\mathbb{R}\right)$ *συνάρτηση με μετασχηματισμό Laplace* $\mathcal{L}\left(f\right)\left(s\right)=F\left(s\right),\quad s>a$. *Τότε ορίζεται και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης* $g\left(t\right)=\int_{0}^{t}f\left(u\right)du$ *και μάλιστα*

$$\mathcal{L}\left(\int_{0}^{t}f\left(u\right)du\right)=\frac{F\left(s\right)}{s},\ s>\max\left\{a,0\right\}.$$

Απόδειξη. Αμεση απ' τον τύπο (5.1). $\square$

Ζ. <u>ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΟΣ στο πεδίο των συχνοτήτων</u> s

Θεώρημα 5.8. *Εστω* $f:\left[0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ *είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και έχει μετασχηματισμό Laplace* $\mathcal{L}\left(f\right)\left(s\right)=F\left(s\right)\ \ s>a,\ \left(a\in\mathbb{R}\right)$. *Αν υπάρχει το όριο* $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f\left(t\right)}{t}$, *τότε ορίζεται και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης* $\frac{f\left(t\right)}{t}$ *και μάλιστα*

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^{\infty} F(\omega)d\omega,\ s>a.$$

Απόδειξη. Ξεκινούμε απ' το δεξιό μέλος της παραπάνω χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.1). □

Η. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Θεώρημα 5.9. *Εστω* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *είναι* $n-$*φορές παραγωγίσιμη με παραγώγους* $f',\ldots,f^{(n-1)}$ *εκθετικής τάξης* a *και τμηματικά συνεχή παράγωγο* $f^{(n)}$ *για κάθε* $t\geq 0$. *Αν* $F(s)=\mathcal{L}(f)(s),\ s>a$ *είναι ο μετασχηματισμός Laplace της* f, *τότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace των παραγώγων συναρτήσεων* $f^{(k)},\ k=1,\ldots,n$ *και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left(f^{(k)}\right)(s)=s^k\mathcal{L}(f)-s^{k-1}f(0)-\ldots-sf^{(k-2)}(0)-f^{(k-1)}(0),\quad s>a.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση $n-$φορές στον τύπο (5.1). □

Σημείωση. Στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι ασυνεχής στο μηδέν όπως π.χ. η συνάρτηση Heaviside, συνήθως επεκτείνουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace ως εξής:

$$\mathcal{L}(f)(s)=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα 5.9 γράφεται ως εξής:

$$\mathcal{L}\left(f^{(k)}\right)(s)=s^k\mathcal{L}(f)-s^{k-1}f\left(0^-\right)-\ldots-sf^{(k-2)}\left(0^-\right)-f^{(k-1)}\left(0^-\right),\quad s>a.$$

Πόρισμα 5.1. (αρχικού σημείου). *Εστω* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *έχει τμηματικά συνεχή παράγωγο και είναι εκθετικής τάξης* a. *Τότε*

$$\lim_{s\to\infty}\left(sF(s)\right)=f\left(0^-\right).$$

Παράδειγμα. Εστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $y:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' + 2y = e^{-3t} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της y.

Λύση. Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δυο μέλη της δ.ε. και έχουμε

$$\mathcal{L}(y' + 2y) = \mathcal{L}\left(e^{-3t}\right) \Rightarrow \mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left(e^{-3t}\right).$$

Επειδή $\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$ και $\mathcal{L}\left(e^{-3t}\right) = \dfrac{1}{s+3},\ s > -3$ έχουμε

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) + 2\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s+3} \Rightarrow (s+2)\mathcal{L}(y) - 1 = \frac{1}{s+3},\ s > -3$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)},\ s > -3. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Εστω συνάρτηση $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της y.

Λύση. Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δυο μέλη της δ.ε. και έχουμε

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' - 3y) = \mathcal{L}(1) \Rightarrow \mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1).$$

Επειδή $\mathcal{L}(y'') = s^2\mathcal{L}(y) - s \cdot y(0) - y'(0)$ και $\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$ και $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s},\ s > 0$, έχουμε

$$\left(s^2\mathcal{L}(y) - s \cdot y(0) - y'(0)\right) + 2\left(s\mathcal{L}(y) - y(0)\right) - 3\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s},\ s > 0$$

$$\Rightarrow \left(s^2\mathcal{L}(y)-2s-1\right)+2\left(s\mathcal{L}(y)-2\right)-3\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s},\ \ s>0$$

$$\Rightarrow \left(s^2+2s-3\right)\mathcal{L}(y)=2s^2+5s+1,\ \ s>0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y)=\frac{2s^2+5s+1}{(s-1)(s+3)},\ \ s>1. \qquad \square$$

Θ. <u>ΣΥΝΕΛΙΞΗ</u>

Ορισμός 5.2. *Εστω* $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *είναι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε διάστημα* $[0,t],\ t>0$. *Καλούμε συνέλιξη των* f,g, *συμβολικά* $f*g$ *να είναι η συνάρτηση*

$$f*g(t)=\int_0^t f(\omega)g(t-\omega)d\omega.$$

Η παραπάνω είναι καλά ορισμένη. Με χρήση του ορισμού η συνέλιξη ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$f*g=g*f$ (αντιμεταθετική)

$(f*g)*h(t)=f*(g*h)(t)$ (προσεταιριστική)

$f*(g+h)=f*g+f*h$ (επιμεριστική).

Θεώρημα 5.10. *Εστω* $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης* a *συναρτήσεις και* $\mathcal{L}(f),\ \mathcal{L}(g)$ *είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των* f *και* g *αντιστοίχως. Τότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της* $f*g$ *και ισχύει*

$$\mathcal{L}(f*g)(s)=\mathcal{L}(f)(s)\cdot\mathcal{L}(g)(s),\ s>a.$$

Απόδειξη. Ξεκινούμε απ' το δεύτερο μέλος και θυμόμαστε ότι $g(u)=0,\ u<0$. Εχουμε

$$\mathcal{L}(f)(s)\cdot\mathcal{L}(g)(s)=\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt\right)\left(\int_0^{+\infty} g(u)e^{-su}du\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} g(u)e^{-su}du\right) f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)g(u)e^{-s(u+t)}dudt\,.$$

Θέτουμε (για το εσωτερικό ολοκλήρωμα) $u+t=w$ και έχουμε

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)g(u)e^{-s(u+t)}dudt=\int_0^{+\infty}\int_w^{+\infty} f(t)g(w-t)e^{-sw}dwdt\,.$$

Επειδή όμως $g(w-t)=0,\ w<t$ μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^{+\infty}\int_w^{+\infty} f(t)g(w-t)e^{-sw}dwdt=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)g(w-t)e^{-sw}dwdt\,.$$

Λόγω απόλυτης σύγκλισης του διπλού ολοκληρώματος μπορούμε να εναλλάξουμε την ολοκλήρωση και έχουμε

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)g(w-t)e^{-sw}dwdt=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)g(w-t)e^{-sw}dtdw$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{w} f(t)g(w-t)e^{-sw}dtdw=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{w} f(t)g(w-t)dt\right)e^{-sw}dw$$

$$=\mathcal{L}(f*g)(s)\,. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνέλιξης $\left(e^{a\cdot}*e^{b\cdot}\right)(t)$ για $t\geq 0,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Λύση. Εχουμε

$$\mathcal{L}\left(e^{at}*e^{bt}\right)=\mathcal{L}\left(e^{at}\right)\cdot\mathcal{L}\left(e^{bt}\right)=\frac{1}{s-a}\cdot\frac{1}{s-b},\ s>\max\{a,b\}\,. \ \square$$

Παράδειγμα. Για $y:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχή, υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$y(t)=e^{-t}+\int_0^t y(\omega)\eta\mu(t-\omega)d\omega\,.$$

Λύση. Εχουμε

$$\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}\left(e^{-t}\right)+\mathcal{L}\left(\int_0^t y(\omega)\eta\mu(t-\omega)d\omega\right)=\mathcal{L}\left(e^{-t}\right)+\mathcal{L}(y)\cdot\mathcal{L}(\eta\mu t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y)=\frac{1}{s+1}+\mathcal{L}(y)\cdot\frac{1}{1+s^2}\Rightarrow \mathcal{L}(y)=\frac{s^2+1}{s^2(s+1)},\ s>0. \qquad \square$$

I. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

Θεώρημα 5.11. *Εστω* $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης* a T*-περιοδική συνάρτηση. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της* f *ικανοποιεί τη σχέση*

$$\mathcal{L}(f)(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\cdot\int_0^T f(t)e^{-st}dt,\ s>a.$$

Απόδ. Χρησιμοποιούμε τον ορισμό και την περιοδικότητα της f. $\square$

Ασκήσεις.

1. Με χρήση ιδιοτήτων υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των παρακάτω συναρτήσεων για $t\geq 0$:

- $f(t)=1+2t$ **Απ.** $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2},\ s>0$
- $f(t)=2-t^2+3\eta\mu t$ **Απ.** $F(s)=\frac{2}{s}-\frac{2}{s^3}+\frac{3}{1+s^2},\ s>0$
- $f(t)=2\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu(2t)+1$ **Απ.** $F(s)=\frac{2}{1+s^2}-\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s},\ s>0$
- $f(t)=t^2-t+2$ **Απ.** $F(s)=\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s},\ s>0$
- $f(t)=te^{2t}$ **Απ.** $F(s)=\frac{1}{(s-2)^2},\ s>2$
- $f(t)=e^{-2t}\eta\mu(5t)$ **Απ.** $F(s)=\frac{5}{25+(s+2)^2},\ s>-2$
- $f(t)=e^{-2t}*\eta\mu(5t)$ **Απ.** $F(s)=\frac{1}{s+2}\frac{5}{25+s^2},\ s>-2$

- $f(t)=te^{3t}\sigma\upsilon\nu t$ **Απ.** $F(s)=-\left(\dfrac{s-3}{1+(s-3)^2}\right)'$, $s>3$

- $f(t)=2t,\ \ f$ *1 περιοδική* **Απ.** $F(s)=\dfrac{2-2e^{-s}-2se^{-s}}{s^2\left(1-e^{-s}\right)}$, $s>0$

- $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ -1, & 1<t<2\end{cases}$, f *2 περιοδική*

  Απ. $F(s)=\dfrac{e^{-2s}-2e^{-s}+1}{s\left(1-e^{-2s}\right)}$, $s>0$

2. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των ακολούθων προβλημάτων αρχικών τιμών

- $\begin{cases}y'+y=t\\ y(0)=-2\end{cases}$ **Απ.** $F(s)=\dfrac{1-2s^2}{s^2(s+1)}$

- $\begin{cases}y'+2y=\sigma\upsilon\nu t\\ y(0)=3\end{cases}$ **Απ.** $F(s)=\dfrac{3s^2+s+3}{s^2(s+2)}$

- $\begin{cases}y''+4y=0\\ y(0)=-1\\ y'(0)=1\end{cases}$ **Απ.** $F(s)=\dfrac{1-s}{s^2+4}$

- $\begin{cases}y''+2y'+y=\left(t^2-1\right)e^t\\ y(0)=1\\ y'(0)=2\end{cases}$ **Απ.** $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}\left(s+4+\dfrac{2}{(s-1)^3}-\dfrac{1}{s-1}\right)$

3. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των ολοκληρωτικών εξισώσεων

- $y(t)=1+\int_0^t y(\omega)\sigma\upsilon\nu(t-\omega)d\omega.$ **Απ.** $F(s)=\dfrac{s^2+1}{s\left(s^2-s+1\right)}$

- $te^{at}=\int_0^t y(\omega)y(t-\omega)d\omega.$ **Απ.** $F(s)=\pm\dfrac{1}{(s-a)}$, $s>a$

5.4. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

Ορισμός 5.3. *Έστω* $F : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F = F(s)$. *Αν υπάρχει συνάρτηση* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R} : f = f(t)$ *τέτοια ώστε* $\mathcal{L}(f) = F$, *τότε η* f *καλείται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της* F *και γράφουμε*

$$f = \mathcal{L}^{-1}(F).$$

Παρατηρήσεις. (α) Δεν ορίζεται πάντοτε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace συνάρτησης F.

(β) Αν μια συνάρτηση f έχει μετασχηματισμό Laplace $F = F(s)$, $s \in \mathbb{C}$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} e^{st} F(s)\, ds,$$

όπου $\gamma \in \mathbb{R}$ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός που εκλέγεται έτσι ώστε η κατακόρυφος $\mathrm{Re}(s) = \gamma$ να περιέχει όλους τους πόλους της F στο αριστερό της μέρος. Ο τύπος αυτός είναι ο τύπος αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace και η χρήση του απαιτεί γνώσεις μιγαδικής ανάλυσης. Στο εξής για την εύρεση του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες που θα αναπτύξουμε παρακάτω.

(γ) Οσον αφορά στο ερώτημα αν υπάρχουν δυο διαφορετικοί αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace που αντιστοιχούν στην ίδια συνάρτηση f, η απάντηση είναι πως όχι αν η αρχική συνάρτηση f είναι συνεχής.

Εστω F, G είναι οι μετασχηματισμοί Laplace δυο συναρτήσεων $f, g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace αποδεικνύονται άμεσα οι ακόλουθες ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

<u>Α. Γραμμικότητα</u>

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(aF \pm bG) = a\mathcal{L}^{-1}(F) \pm b\mathcal{L}^{-1}(G)}.$$

Πράγματι:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(aF \pm bG\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(a\mathcal{L}\left(f\right) \pm b\mathcal{L}\left(g\right)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}\left(af \pm bg\right)\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}\left(af \pm bg\right)\right) = af \pm bg = a\mathcal{L}^{-1}\left(F\right) \pm b\mathcal{L}^{-1}\left(G\right).$$

<u>Β. Μετάθεση στο πεδίο συχνοτήτων</u>

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s-b\right)\right)\left(t\right) = f(t)e^{bt},\ t \geq 0}.$$

Πράγματι:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s-b\right)\right)\left(t\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}\left(f(t)e^{bt}\right)\right) = f(t)e^{bt}.$$

<u>Γ. Μετάθεση στο πεδίο χρόνου</u>

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-bs}F\left(s\right)\right)\left(t\right) = u_b f(t-b),\ \left(t \geq 0,\ b > 0\right)}$$

<u>Δ. Διαστολή</u>

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(bs\right)\right)\left(t\right) = \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right),\ t \geq 0,\ b > 0}.$$

<u>Ε. Moments</u>

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left((-1)^n F^{(n)}\right)\left(t\right) = t^n f(t),\ t \geq 0}.$$

ΣΤ. <u>Αντιπαράγωγος</u>

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^{\infty} F\left(\omega\right) d\omega\right)\left(t\right) = \frac{f\left(t\right)}{t},\ t \geq 0}.$$

Ζ. <u>Συνέλιξη</u>

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)G\left(s\right)\right)\left(t\right) = f * g\left(t\right)}.$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F\left(s\right) = \frac{s-2}{s^2+9}.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αντίστροφου

μετασχηματισμού Laplace και λαμβάνοντας υπόψη το μετασχηματισμό Laplace των στοιχειωδών συναρτήσεων $\sigma\upsilon\nu(at)$ και $\eta\mu(at)$ έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2+9}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)-2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+9}\right)=\sigma\upsilon\nu(3t)-2\eta\mu(3t),\ t\geq 0. \quad \square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s)=\frac{1}{s^2-3s+2}.$$

Λύση. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ανάλυσης σε απλά κλάσματα. Εχουμε

$$\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}.$$

Τότε:

$$1=A(s-2)+B(s-1)\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\-2A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases}. \qquad (5.2)$$

Σημείωση. Στην παραπάνω σχέση $1=A(s-2)+B(s-1)$ (βλέπε (5.2)) μπορούμε να θέσουμε κατευθείαν

- $s=1$, οπότε $1=A(1-2)+B(1-1)\Leftrightarrow A=-1$,
- $s=2$, οπότε $1=A(2-2)+B(2-1)\Leftrightarrow B=1$.

Μ' αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε πιο γρήγορα και εύκολα τους συντελεστές A και B. Τελικά:

$$F(s)=\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{s-2}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-3s+2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right)$$

$$=-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)=-e^{t}+e^{2t},\ t\geq 0. \quad \square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s)=\frac{1}{s^2-6s+9},\ s>3.$$

Λύση. Εφόσον

$$F(s)=\frac{1}{s^2-6s+9}=\frac{1}{(s-3)^2},$$

έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}(F)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right)=te^{3t},\ t\geq 0. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)^3},\ s>-1.$$

Λύση. Εχουμε

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)^3}=\frac{s+1-1}{(s+1)^3}=\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3}.$$

Αρα

$$\mathcal{L}^{-1}(F)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^3}\right)=te^{-t}-\frac{t^2e^{-t}}{2},\ t\geq 0. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s)=\frac{1}{s^2-2s+5}.$$

Λύση.

Το τριώνυμο του παρονομαστή έχει αρνητική διακρίνουσα. Με συμπλήρωση τετραγώνων παίρνουμε

$$\frac{1}{s^2-2s+5}=\frac{1}{(s-1)^2+4}$$

Αρα

$$\mathcal{L}^{-1}(F)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2+4}\right)=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2+4}\right)=\frac{1}{2}e^{t}\eta\mu(2t),\ t\geq 0. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s)=\frac{2s-1}{s(s-1)^2},\ s>1.$$

Λύση. Με ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$F(s)=\frac{2s-1}{s(s-1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{\Gamma}{(s-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2s-1=A(s-1)^2+Bs(s-1)+\Gamma s. \qquad (6.3)$$

Στην (6.3) θέτουμε

- $s=0$ (απλή ρίζα παρονομαστή), οπότε $A=-1$.
- $s=1$ (διπλή ρίζα παρονομαστή), οπότε $\Gamma=1$.
- Πως θα βρούμε όμως τη σταθερά B; Παραγωγίζουμε την (6.3) και αντικαθιστούμε τις τιμές των A και Γ που βρήκαμε. Ετσι έχουμε

$$2=2A(s-1)+B(s-1)+Bs+\Gamma \overset{A=-1,\Gamma=1}{\Leftrightarrow} 2=-2(s-1)+B(s-1)+Bs+1.$$

Στη συνέχεια για π.χ. $s=1$ βρίσκουμε άμεσα $B=1$. Ετσι

$$\mathcal{L}^{-1}(F)=-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)=-1+e^t+te^t,\ t\geq 0. \quad \square$$

Ασκήσεις.

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των:

- $F(s)=\dfrac{1}{s+6},\ \mathrm{Re}(s)>-6$ **Απ.** $\mathcal{L}^{-1}(F)=e^{-6t}$
- $F(s)=\dfrac{1}{s^2+5}$ **Απ.** $\mathcal{L}^{-1}(F)=\dfrac{\eta\mu\left(\sqrt{5}t\right)}{\sqrt{5}}$

- $F(s)=\dfrac{s}{2s^2+3}$ **Απ.** $\mathcal{L}^{-1}(F)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)}{2}$

- $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$ **Απ.** $\mathcal{L}^{-1}(F)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\eta\mu\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

5.5. Εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Μια σημαντική εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace εμφανίζεται στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και ολοκληρωτικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Η διαδικασία είναι η εξής: υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συνάρτησης y και στη συνέχεια υπολογίζουμε την y μέσω του αντιστρόφου μετασχηματισμού.

Παράδειγμα. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'-2y=1 \\ y(0)=1 \end{cases},\ t\geq 0.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δυο μέλη της δ.ε. και έχουμε

$$\mathcal{L}(y'-2y)=\mathcal{L}(1)\Leftrightarrow \mathcal{L}(y')-2\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(1)\Leftrightarrow s\mathcal{L}(y)-y(0)-2\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(1)$$

$$\Leftrightarrow (s-2)\mathcal{L}(y)=y(0)+\mathcal{L}(1)\Leftrightarrow \mathcal{L}(y)=\frac{s+1}{s(s-2)},\ s>2.$$

Αρα

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s(s-2)}\right).$$

Αναλύουμε το μετασχηματισμό Laplace σε απλά κλάσματα και έχουμε

$$\frac{s+1}{s(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}\Leftrightarrow A(s-2)+Bs=s+1.$$

- Για $s=2$ στην παραπάνω ισότητα βρίσκουμε $B=3/2$.
- Για $s=0$ στην παραπάνω ισότητα βρίσκουμε $A=-1/2$.

Ετσι

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s(s-2)}\right)=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{2t},\ t\geq 0. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'+x=t \\ x'-y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0)=2 \\ y(0)=1 \end{cases}.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace ταυτόχρονα και στις δυο παραπάνω ισότητες και έχουμε

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y')+\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}(t) \\ \mathcal{L}(x')-\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s\mathcal{L}(y)-y(0)+\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}(t) \\ s\mathcal{L}(x)-x(0)-\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s\mathcal{L}(y)+\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}(t)+1 \\ s\mathcal{L}(x)-\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(1)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(x)+s\mathcal{L}(y)=\dfrac{1}{s^2}+1 \\ s\mathcal{L}(x)-\mathcal{L}(y)=\dfrac{1}{s}+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(x)=\dfrac{2s^3+2s^2+1}{s^2\left(s^2+1\right)} \\ \mathcal{L}(y)=\dfrac{s-2}{s^2+1} \end{cases}.$$

Αλλά:

$$\mathcal{L}(y)=\frac{s-2}{s^2+1} \Leftrightarrow y=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2+1}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)-2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\eta\mu t-2\sigma\upsilon\nu t.$$

Για τη x εργαζόμαστε με τη μέθοδο απλών κλασμάτων και

βρίσκουμε

$$x = t + 2\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t.$$

Τελικά:

$$\begin{cases} x = t + 2\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t \\ y = \eta\mu t - 2\sigma\upsilon\nu t \end{cases}, \ t \geq 0. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$y'(t) = e^{-t} + 2\int_0^t y(\omega)e^{t-\omega}d\omega, \ t \geq 0.$$

Λύση. Εστω $y(0) = c$. Τότε έχουμε

$$\mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(e^{-t}) + 2\mathcal{L}\left(\int_0^t y(\omega)e^{t-\omega}d\omega\right) = \mathcal{L}(e^{-t}) + 2\mathcal{L}(y)\cdot\mathcal{L}(e^{t})$$

$$\Rightarrow s\mathcal{L}(y) - y(0) = \frac{1}{s+1} + 2\mathcal{L}(y)\cdot\frac{1}{s-1} \Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{(c+s+1)(s-1)}{(s^2-s-2)(s+1)}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{(c+s+1)(s-1)}{(s-2)(s+1)^2}, \ s > -1.$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα παίρνουμε:

$$\frac{(c+s+1)(s-1)}{(s-2)(s+1)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{\Gamma}{(s+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (c+s+1)(s-1) = A(s+1)^2 + B(s-2)(s+1) + \Gamma(s-2). \qquad (5.4)$$

- Για $s = 2$ παίρνουμε $A = (c+3)/9$.
- Για $s = -1$ παίρνουμε $\Gamma = 2c/3$.
- Παραγωγίζουμε την (5.4) και έχουμε

$$(c+s+1) + (s-1) = 2A(s+1) + B((s-2) + (s+1)) + \Gamma,$$

οπότε για π.χ. $s = -1$ παίρνουμε $B = (6-c)/9$. Αρα:

$$\mathcal{L}(y)=\frac{c+3}{9}\cdot\frac{1}{s-2}+\frac{6-c}{9}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{2c}{3}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{c+3}{9}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+\frac{6-c}{9}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+\frac{2c}{3}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow y=\frac{c+3}{9}\cdot e^{2t}+\frac{6-c}{9}\cdot e^{-t}+\frac{2c}{3}\cdot\eta\mu t\,. \qquad \square$$

Ασκήσεις.

1. Να λυθούν οι κάτωθι δ.ε. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

- $\begin{cases} y'+y=t \\ y(0)=-2 \end{cases}$ **Απ.** $y=3e^{-t}+t-1$

- $\begin{cases} y'+y=\sigma\upsilon\nu t \\ y(0)=3 \end{cases}$ **Απ.** $y=2e^{-t}+\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t$

- $\begin{cases} y'+y=\sigma\upsilon\nu t \\ y(0)=3 \end{cases}$ **Απ.** $y=2e^{-t}+\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t$

- $\begin{cases} y''+y=t^2+t \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$ **Απ.** $y=t^2+t-2+2\sigma\upsilon\nu t-2\eta\mu t$

- $\begin{cases} y''+2y'+y=(t^2-1)e^t \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ **Απ.** $y=\frac{e^{-t}}{8}\left(7+e^{2t}+10t-4te^{2t}+2t^2e^{2t}\right)$

2. Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα δ.ε.

- $\begin{cases} y'+x=t \\ x'-y=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ **Απ.** $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=1 \end{cases}$

- $\begin{cases} x' + y = 0 \\ x - y' = -2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **Απ.** $\begin{cases} x(t) = 2t - 3\eta\mu t \\ y(t) = -2 + 3\sigma\upsilon\nu t \end{cases}$

- $\begin{cases} x' + y' = t \\ x'' - y = e^{-2t} \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 3 \\ x'(0) = -2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **Απ.** $\begin{cases} x(t) = \dfrac{6 + e^{-t} + t^2 - \sigma\upsilon\nu t - 3\eta\mu t}{6} \\ y(t) = \dfrac{2 - e^{-t} + \sigma\upsilon\nu t + 3\eta\mu t}{2} \end{cases}$

5.6. Ο τελεστής Dirac.

Ο τελεστής ή «γενικευμένη συνάρτηση» Dirac μοντελοποιεί με μαθηματικό τρόπο ξαφνικές και στιγμιαίες φυσικές μεταβολές όπως π.χ. το στιγμιαίο χτύπημα με σφυρί σε σύστημα μάζας-ελατηρίου ή την ξαφνική αλλαγή τάσης λόγω κεραυνού. Συνήθως η «γενικευμένη συνάρτηση» Dirac ορίζεται ως εξής:

$$\delta_b(t) = \begin{cases} 0, & t \neq b \\ "+\infty", & t = b \end{cases}, \; b \in \mathbb{R},$$

όπου ο συμβολισμός $"+\infty"$ έχει την έννοια ότι στο $x = t$ η δέλτα είναι όσο άπειρη χρειάζεται ώστε το εμβαδόν E κάτω από το γράφημά της να ισούται με τη μονάδα (υπό μια έννοια $E = 0 \cdot (+\infty) = 1$). Πιο αυστηρά, ο τελεστής Dirac ορίζεται «φορμαλιστικά» από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_b(t)dt = f(b),$$

για κάθε συνάρτηση f με παραγώγους κάθε τάξης στο $\mathbb{R}$ οι οποίες φθίνουν γρήγορα στο άπειρο. Με τον ορισμό αυτό ο τελεστής δέλτα απεικονίζει σε κάθε «καλή» συνάρτηση f, έναν αριθμό, την τιμή της f στο σημείο b. Ετσι, για κάθε $b > 0$ ορίζουμε:

$$\mathcal{L}(\delta_b)(s) = \int_0^{+\infty} \delta_b(t) e^{-st} dt = e^{-bs}, \; s > 0.$$

Ειδικά για $b = 0$ ορίζουμε

$$\mathcal{L}(\delta_0)(s)=\int_{0^-}^{+\infty}\delta_0(t)e^{-st}dt=1.$$

Προφανώς:

$$\delta_b(t)=\delta_0(t-b).$$

Σημειώνουμε ότι αν $u_b,\ b\geq 0$ είναι η μοναδιαία συνάρτηση βήματος Heaviside, τότε

$$\mathcal{L}(u_b)=\frac{e^{-bs}}{s},\ s>0.$$

Η συνάρτηση Γάμμα.

Ας θυμηθούμε ότι

$$\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}t^n e^{-st}dt=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Για να επεκτείνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα και για μη ακεραίους εκθέτες ας θεωρήσουμε ότι

$$\mathcal{L}(t^x)=\int_0^{+\infty}t^x e^{-st}dt,\ \forall x>-1.$$

Θεωρούμε $x>-1$, διότι για $x\leq -1$ το $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^{+\infty}t^x e^{-st}dt=\infty$. Με αλλαγή μεταβλητής $y=st,\ s>0$ παίρνουμε

$$\mathcal{L}(t^x)=\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{s}\right)^x e^{-y}dy=\frac{1}{s^{x+1}}\int_0^{+\infty}y^x e^{-y}dy.$$

Η συνάρτηση

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}y^{x-1}e^{-y}dy,\ \ x>0$$

καλείται **Γάμμα συνάρτηση**. Τότε:

$$\boxed{\mathcal{L}(t^x)=\frac{1}{s^{x+1}}\int_0^{+\infty}y^x e^{-y}dy=\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}},\ x>-1,\ s>0}.$$

Η συνάρτηση γάμμα επεκτείνεται και σε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς αρκεί να μην είναι αρνητικοί ακέραιοι $-1,-2,-3,\ldots$ Ικανοποιεί δε την

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

δηλαδή είναι μια γενίκευση του παραγοντικού.

Παράδειγμα. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y''+y=2u_a,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ a>0.$$

Λύση. Εχουμε:

$$\mathcal{L}(y''+y)=\mathcal{L}(2u_a)\Leftrightarrow\left(s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)\right)+\mathcal{L}(y)=\frac{2e^{-as}}{s}$$

$$\Leftrightarrow\left(1+s^2\right)\mathcal{L}(y)=1+\frac{2e^{-as}}{s}\Leftrightarrow\mathcal{L}(y)=\frac{1}{1+s^2}+\frac{2e^{-as}}{s\left(1+s^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow\mathcal{L}(y)=\frac{1}{1+s^2}+2e^{-as}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow y(t)=\eta\mu t+2u_a(t)\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu(t-a)\right),\ t>0,$$

ή ισοδύναμα

$$y(t)=\begin{cases}\eta\mu t & t<a\\ \eta\mu t+2\left(1-\sigma\upsilon\nu(t-a)\right) & t>a\end{cases}.$$

□

Παράδειγμα. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y''+y=\begin{cases}1, & 0\le t<\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases},\quad y(0)=y'(0)=0.$$

Λύση. Μπορούμε να γράψουμε:

$$u_0(t)-u_\pi(t)=\begin{cases}1, & 0<t<\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases},$$

συνεπώς:

$$y''+y=\eta\mu t\left(u_0(t)-u_\pi(t)\right)\Leftrightarrow\mathcal{L}(y''+y)=\mathcal{L}(u_0-u_\pi)$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)\right)+\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(y)=\frac{1-e^{-\pi s}}{s\left(1+s^2\right)}=\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{1+s^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(y)=\frac{1}{s}-\frac{s}{1+s^2}-e^{-\pi s}\frac{1}{s}+e^{-\pi s}\frac{s}{1+s^2}$$

$$\Leftrightarrow y=(1-\sigma\upsilon\nu t)-u_\pi(t)+u_\pi(t)\sigma\upsilon\nu(t-\pi),\ t\geq 0. \qquad \square$$

Ασκήσεις.

1. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών

- $y''(t)+2y'+2y=\delta_\pi(t),\quad y(0)=y'(0)=0.$

  Απ. $y=u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\eta\mu(t-\pi)$

- $y''(t)+2y'+2y=e^{-t}+\delta_1(t),\quad y(0)=y'(0)=0$

  Απ. $y=\dfrac{t^2e^{-t}}{2}u_0(t)+3u_1(t)(t-1)e^{-(t-1)}$

2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

- $y''+y=\begin{cases}2, & 0\leq t\leq\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases},\quad y(0)=y'(0)=0$

  Απ. $y=(2-2\sigma\upsilon\nu t)u_0(t)-2u_\pi(t)+2u_\pi(t)\sigma\upsilon\nu(t-\pi),\ t\geq 0$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Αρχική συνάρτηση $f(t),\ t \geq 0$	**Μετασχηματισμός Laplace** $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$\eta\mu(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \lvert a \rvert$
$\sigma\upsilon\nu(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \lvert a \rvert$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
$t^x,\ x > -1$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}},\ s > 0$
$\delta_b,\ (b \geq 0)$	e^{-bs}
$u_b,\ b \geq 0$	e^{-bs}/s
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$af + bg$	$aF(s) + bG(s)$
$u_b f(t-b),\ b > 0$	$e^{-bs}F(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\int_0^t f(u)du$	$F(s)/s$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{+\infty} F(\omega)d\omega$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots$ $-sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$f * g$	$\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$
f είναι $T-$περιοδική	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t)e^{-st}dt$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}(f)=F$	**Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace** $\mathcal{L}^{-1}(F)=f,\ t\geq 0$
$\frac{1}{s},\ s>0$	1
$\frac{1}{s-a},\ s>a$	e^{at}
$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$	$\eta\mu(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$	$\sigma\upsilon\nu(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$	$\cosh(at)$
$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$	t^n
$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}},\ s>0$	$t^x,\ x>-1$
$e^{-bs},\ b\geq 0$	δ_b
$e^{-bs}/s,\ b\geq 0$	u_b
$aF(s)+bG(s)$	$af+bg$
$e^{-bs}F(s),\ b>0$	$u_b\cdot f(t-b)$
$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
$(-1)^n F^{(n)}(s)$	$t^n f(t)$
$\int_s^\infty F(\omega)d\omega$	$\frac{f(t)}{t}$
$F(s)/s$	$\int_0^t f(u)du$
$F(s)G(s)$	$f*g$