Σημειώσεις

Εφαρμογές Μαθηματικών

Νικόλαος Ατρέας

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Επισκόπηση γνωστών εννοιών. 1-21

1.1 Αόριστα Ολοκληρώματα. **4-12**
1.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα. **13-14**
1.3 Μιγαδικοί αριθμοί. **15-21**

Κεφάλαιο 2. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης. 22-62

2.1 Εισαγωγή και βασικές έννοιες.
2.2 Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης.
2.2.1 Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας για διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης και 1ου βαθμού.
2.2.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης.
2.2.3 Μη Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης.
2.2.3.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.
2.2.3.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.
2.2.3.3 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις.
2.2.3.4 Ολοκληρωτικοί παράγοντες.
2.2.3.5 Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και Ricatti.
2.3 Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης και ανώτερου βαθμού.

Κεφάλαιο 3. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης. 63-92

3.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές.
3.1.1 Ομογενείς Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης.
3.1.2 Μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής δ.ε. 2ης τάξης. Η μέθοδος μεταβολής των σταθερών.
3.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.
3.2.1 Ομογενείς Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.
3.2.2 Μερική λύση μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.
3.3 Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης.

Κεφάλαιο 4. Συστήματα διαφορικών εξισώσεων. 93-107

4.1. Εισαγωγή.
4.2. Η μέθοδος απαλοιφής.

4.3. Η Μέθοδος πινάκων.

Κεφάλαιο 5. Ο μετασχηματισμός Laplace. 108-138

5.1. Εισαγωγή.
5.2. Ο μετασχηματισμός Laplace.
5.3. Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.
5.4. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.
5.5. Εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων.
5.6. Ο τελεστής Dirac.

Κεφάλαιο 6. Ανάλυση Fourier. 139-152

6.1. Εισαγωγή.
6.2. Σειρά Fourier.

Κεφάλαιο 1

Επισκόπηση γνωστών εννοιών.

1.1 Το αόριστο ολοκλήρωμα.

Μια πραγματική συνάρτηση *F* καλείται **αντιπαράγωγος** μιας συνάρτησης *f* σ' ένα σύνολο Ε, όταν η *F* είναι παραγωγίσιμη στο Ε και ισχύει

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in E.$$

Θεώρημα. Αν η *F* είναι μια αντιπαράγωγος της *f σε διάστημα* Ε (ανοικτό ή κλειστό, φραγμένο ή όχι), τότε το σύνολο των αντιπαραγώγων της *f* είναι της μορφής:

$$\{F+c,\ c = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\}.$$

Εστω ότι η συνάρτηση *f* είναι ορισμένη στο διάστημα Ι και έστω *F* είναι μια αντιπαράγωγος της *f*, τότε το σύνολο

$$\{F + c,\ c = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\}$$

καλείται **αόριστο ολοκλήρωμα της *f*** και συμβολίζεται με $\int f$ ή με $\int f(x)dx$. Δηλαδή

$$\int f(x)dx = \{F + c,\ \ \mathrm{c} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\}.$$

Συνήθως, γράφουμε για συντομία $\int f(x)dx = F(x) + c.$

Πίνακας βασικών αορίστων ολοκληρωμάτων

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ \ \mathrm{n} \neq -1,\ \ \mathrm{n} \in \boldsymbol{Z},$

2. $\int \dfrac{1}{x} dx = \log|x| + c,\ x \neq 0$,

3. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1, \quad \mathrm{a} \in \boldsymbol{R},$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \quad a > 0,$

5. $\int e^x dx = e^x + c,$

6. $\int \cos x dx = \sin x + c$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + c,$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \varepsilon\phi x + c,$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = Arc \sin x + c,$

10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tau o\xi\varepsilon\phi x + c.$

Θεώρημα. Αν μια πραγματική συνάρτηση *f* είναι συνεχής σε σύνολο *E*, τότε η *f* είναι αντιπαραγωγίσιμη στο *E*.

Πρόταση. Αν *f*, *g* είναι πραγματικές συναρτήσεις αντιπαραγωγίσιμες στο Ε και αν c είναι μία πραγματική σταθερά, τότε

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

και

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \ .$$

Η μέθοδος της αντικατάστασης

Θεώρημα. Εστω *f* συνάρτηση συνεχής σε διάστημα Ε⊆**R**, *φ* συνάρτηση με συνεχή παράγωγο σε διάστημα J με φ(J)⊆Ε και *F* είναι μια αντιπαράγωγος της *f* στο Ε. Τότε

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c \ .$$

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί το $\int \frac{1}{\cos^2(5x)} dx$.

Λύση Θέτουμε *y = 5x, dy = 5dx*, άρα:

$$\int \frac{1}{\cos^2(5x)} dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \frac{1}{5}\tan y + c = \frac{\tan(5x)}{5} + c \ .$$

2. Να υπολογιστεί το $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$, (x<1.5).

Λύση Θέτουμε $y^2 = 3-2x$, $2ydy = -2dx$, άρα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx = -\int \frac{y}{y^2} dy = -\ln|y| + c = -\ln|\sqrt{3-2x}| + c \ .$$

3. Να υπολογιστεί το $\int \sqrt{4-x^2}dx$, |x|<2.

Λύση Θέτουμε *x = 2 siny*, επομένως *dx = 2cosydy*, άρα:

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2\int \cos^2 y dy = \int (1+\cos(2y))dy = y + \frac{\sin(2y)}{2} + c$$

$$= Arc\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sin\left(2Arc\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2} + c.$$

4. Να υπολογιστεί το $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Λύση Θέτουμε *y = sinx, dy = cosx dx*, άρα:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \ .$$

5. Να υπολογιστεί το $\int \frac{\ln x}{x} dx$, (x>0).

Λύση Θέτουμε *y = lnx (x > 0)*, *dy = (1/x)dx*, άρα:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c.$$

6. Να υπολογιστεί το $\int 2xe^{x^2} \sin(e^{x^2}) dx$.

Λύση. Θέτουμε $y = e^{x^2}$, $dy = 2xe^{x^2} dx,$ άρα:

$$\int 2xe^{x^2} \sin(e^{x^2}) dx \ = \int \sin(y) dy = -\cos(e^{x^2}) + c.$$

Σημείωση Ολοκληρώματα που περιέχουν συναρτήσεις της μορφής:

$$\sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}, \qquad \sqrt{\mathrm{x}^2 - a^2}, \qquad \sqrt{\mathrm{x}^2 + a^2}$$

λύνονται με αντικατάσταση *x = asiny, x = acoshy* και *x = atany* αντίστοιχα.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Θεώρημα. Εάν οι συναρτήσεις *f,g* έχουν συνεχείς παραγώγους στο διάστημα Ε⊆**R**, τότε

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \,.$$

.

Παραδείγματα.

1. Να υπολογιστεί το $\int \ln(1+\mathrm{x})\mathrm{dx}.$

Λύση. $\int \ln(1+\mathrm{x})\mathrm{dx} = x\ln(x+1) - \int \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+1}\mathrm{dx}$

$$= x\ln(x+1) - \int \mathrm{dx} - \int \frac{1}{\mathrm{x}+1}\mathrm{dx} = x\ln(x+1) - \ln(x+1) + c \,.$$

2. Να υπολογιστεί το $\int \mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx}.$

Λύση. $\int \mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 2\int \mathrm{xe}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 2xe^x + 2\int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 2xe^x + 2e^x + c.$

3. Να υπολογιστεί το $I = \int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{cosxdx}$.

Λύση. $I = \int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{cosxdx} = e^x\cos x + \int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{sinxdx} = e^x\cos x + e^x\sin x - \int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{cosx} + c$

$$= e^x(\cos x + \sin x) - I + c \Rightarrow I = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + c.$$

4. Να υπολογιστεί το $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \; n \in \boldsymbol{N}.$

Λύση. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx - 2na^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

άρα

$$I_n = \frac{1}{1-2n}\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \frac{2na^2}{1-2n} I_{n+1}.$$

Χρήσιμες Παρατηρήσεις (α) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την εκθετική συνάρτηση, ξεκινούμε την παραγοντική ολοκλήρωση πάντοτε από την παράγωγο της εκθετικής συνάρτησης.

(β) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν γινόμενα ημιτόνων ή συνημιτόνων με πολυώνυμα, ξεκινούμε από την αντιπαράγωγο του ημιτόνου ή του συνημιτόνου. Πολλές φορές η εύρεση τέτοιων ολοκληρωμάτων ανάγεται στον υπολογισμό ενός αναγωγικού τύπου.

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Το πηλίκο δύο αλγεβρικών πολυωνύμων

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n},$$

όπου $a_n, b_m \neq 0,\ m \geq 0,\ n \geq 1$ καλείται ρητή συνάρτηση ή ρητό κλάσμα. Ρητές συναρτήσεις της μορφής

$$\frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},\ \ k \in \boldsymbol{N}^*,$$

καλούνται **μερικά κλάσματα**.

Θεώρημα. Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων διωνύμων και δευτερο-βάθμιων τριωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Τα τριώνυμα μπορούμε να δεχθούμε ότι δεν έχουν πραγματικές ρίζες διότι αλλιώς θα αναλύονταν σε γινόμενα πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Εργαζόμαστε ως εξής:

(α) αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή *(m > n)* διαιρούμε το $P_m(x)$ με το $Q_n(x)$ και έχουμε

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)},\ k < n\ ,$$

όπου *S(x)* είναι το πηλίκο της διαίρεσης, βαθμού *m-n*.

(β) Αναλύουμε το πολυώνυμο $Q_n(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων διωνύμων και δευτεροβάθμιων τριωνύμων (όπως στο Θεώρημα 8.5), δηλαδή

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{k_1}...(x-a_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...\ (x^2+p_jx+q_j)^{m_j},$$

όπου $k_1+...+k_i+2(m_1+...m_j)=n,\ \ p_j^2-4q_j<0.$

(γ) Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ σε μερικά κλάσματα ως εξής:

για κάθε παράγοντα της μορφής $(x-a)^k$ στην ανάλυση του $Q_n(x)$ παίρνουμε το άθροισμα των κλασμάτων:

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

όπου $A_1, A_2, ..., A_k$ είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν. Ομοια, για κάθε παράγοντα της μορφής $(x^2+px+q)^k$ στην ανάλυση του $Q_n(x)$, παίρνουμε το άθροισμα των κλασμάτων:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Οι συντελεστές υπολογίζονται από τη λύση ενός συστήματος εξισώσεων το οποίο προκύπτει από την εξίσωση:

$$\frac{R_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)}+...+\frac{A_{1,k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+...\quad +\frac{A_{j,1}x+B_{j,1}}{(x^2+p_jx+q_j)}+...+\frac{A_{j,m_j}x+B_{j,m_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}}.$$

Παραδείγματα

1. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^2(x^2+1)^2}dx$.

Λύση. $\frac{x^4+3x^2+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma x+\Delta}{(x^2+1)} + \frac{Ex+Z}{(x^2+1)^2}$.

Από την τελευταία μετά την απαλοιφή των παρονομαστών και την αναγωγή ομοίων όρων καταλήγουμε στη μορφή

$$x^4+3x^2+1 = (A+E)x^5 + (B+Z)x^4 + (2A+\Gamma+E)x^3 + (2B+\Delta+Z)x^2 + Ax + B,$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων έχουμε και λύνοντας το σύστημα έχουμε:

$$A = E = Z = \Gamma = 0,\ B = \Delta = 1.$$

Το ολοκλήρωμα λοιπόν παίρνει τη μορφή

$$\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^2(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \ -\frac{1}{x} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx.$$

Αλλά: $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{(x^2+1)}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$

$$= Arc\tan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)}dx$$

$$= Arc\tan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}Arc\tan x + c.$$

Τελικά: $\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^2(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{x} + \ Arc\tan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}Arc\tan x + c.$

2. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{4x^2-3x+5}{x^3-3x+2}dx.$

Λύση Προφανώς, από το σχήμα Horner έχουμε:

$$x^3-3x+2 = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2),$$

άρα

$$\frac{4x^2-3x+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{\Gamma}{(x+2)}.$$

Με απαλοιφή των παρονομαστών και αναγωγή ομοίων όρων καταλήγουμε στη μορφή

$$\frac{4x^2-3x+5}{x^3-3x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x+2)}.$$

Το ολοκλήρωμα λοιπόν παίρνει τη μορφή

$$\int\frac{4x^2-3x+5}{x^3-3x+2}dx=\ln|x-1|+3\ln|x+2|-\frac{2}{(x-1)^2}+c.$$

3. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{x^2+2x+10}dx.$

Λύση. $\int\frac{1}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+9}dx$.

Θέτω *x + 1 = 3y, dx = 3dy*, άρα:

$$\int\frac{1}{(x+1)^2+9}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{y^2+1}dy=\frac{1}{3}Arc\tan\left(\frac{x+1}{3}\right)+c.$$

1.2. Γενικευμένα ολοκληρώματα.

Ορισμός. *Εστω* $a>0$. *Θα λέμε ότι μια πραγματική συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,+\infty)$ *αν η* f *είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα* $[a,c]\subset[a,+\infty)$ *και το γενικευμένο (ή μη γνήσιο) ολοκλήρωμα της* f

$$\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx$$

υπάρχει ή όπως λέμε συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό. Τότε γράφουμε

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx<\infty.$$

Σε αντίθετη περίπτωση λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f *στο* $[a,+\infty)$ *αποκλίνει.*

Ορισμός. *Θα λέμε ότι η* f *είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο* $[a,+\infty)$, *εάν*

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx<\infty.$$

Για τη μελέτη της σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων υπενθυμίζουμε το ακόλουθο κριτήριο σύγκρισης:

Πρόταση 1.1. *Έστω* f,g *είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε κάθε διάστημα* $[a,c]\subset[a,+\infty)$. *Αν* $|f(x)|\le|g(x)|\ \ \forall x>a$, *τότε*

$$\int_a^{+\infty}|g(x)|dx<\infty\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx<\infty.$$

Πόρισμα 1.1. Αν f *είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο* $[a,+\infty)$ *τότε είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,+\infty)$.

Παρατηρήσεις. (α) Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $(-\infty,b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx,\ \ (b<0).$$

(β) Αν μια πραγματική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[-M,N]\subset(-\infty,\infty)$, όπου N,M είναι τυχαίοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και είναι τέτοια ώστε

$$\int_N^{+\infty} f(x)dx<\infty \text{ και } \int_{-\infty}^{-M} f(x)dx<\infty,$$

τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx<\infty$.

Παράδειγμα Θα υπολογίσουμε τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

- $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left[\tau o\xi\varepsilon\phi x\right]_0^b=\lim_{b\to+\infty}\tau o\xi\varepsilon\phi(b)-0=\frac{\pi}{2}.$$

- $\int_{-\infty}^0 e^x dx$.

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx=\lim_{b\to-\infty}\int_b^0 e^x dx=\lim_{b\to-\infty}\left[e^x\right]_b^0=e^0-\lim_{b\to-\infty}e^b=1-0=1.$$

- $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln b-\ln 1=+\infty-0=+\infty. \qquad \square$$

1.4 Μιγαδικοί αριθμοί

Το σύνολο $\{(x,y): x,y \in \mathbb{R}\}$ όλων των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών στο οποίο έχουν ορισθεί οι πράξεις

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\,,$$

$$k\cdot(x_1,y_1)=(k\cdot x_1,\ k\cdot y_1),\ k\in\mathbb{R}\,,$$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)\,,$$

καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$. Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ καλούνται μιγαδικοί αριθμοί, συμβολικά

$$z=(x,y)\,.$$

Γεωμετρικά το άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών $z_1=(x_1,y_1)$ και $z_2=(x_2,y_2)$ αντιστοιχεί στο άθροισμα των αντιστοίχων διανυσμάτων με καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1,y_1) και (x_2,y_2), ενώ το γινόμενό $k\cdot z$ αντιστοιχεί στο γινόμενο πραγματικού αριθμού k με διάνυσμα που έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y). Αναφέρουμε εδώ ότι στο σύνολο $\mathbb{C}$ ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολ/σμού και ορίζονται και οι πράξεις της αφαίρεσης και διαίρεσης.

Προφανώς υπάρχει μια $1-1$ απεικόνιση του $\mathbb{C}$ επί του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ θεωρώντας ότι κάθε μιγαδικός αριθμός z έχει καρτεσιανές συντεταγμένες x και y. Κάθε μιγαδικός της μορφής $(x,0)$ παριστάνει έναν πραγματικό αριθμό x, συνεπώς ο οριζόντιος άξονας $x'x$ στη γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ παριστάνει την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$. Οσον αφορά τον άξονα $y'y$ που παράγεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $(0,1)$, παρατηρούμε ότι

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1\,.$$

Ο μιγαδικός αριθμός $(0,1)$ συμβολίζεται με i, καλείται **φανταστική μονάδα και ο άξονας** $y'y$ **καλείται φανταστικός άξονας**. Κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής

$$(0,y)=y\cdot(0,1)=y\cdot i$$

καλείται **φανταστικός αριθμός**. Προφανώς ισχύει η σχέση

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Με βάση τα παραπάνω κάθε μιγαδικός αριθμός $z = (x, y)$ μπορεί να γραφεί ως

$$z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1) = x\cdot 1 + y\cdot i = x + iy.$$

Η γραφή

$$z = x + iy,$$

καλείται **κανονική ή αλγεβρική γραφή** του z. Η τετμημένη x καλείται **πραγματικό μέρος** του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Re}(z)$, η τεταγμένη y καλείται **φανταστικό μέρος** του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}(z)$ και το επίπεδο της γεωμετρικής αναπαράστασης του z καλείται **μιγαδικό επίπεδο**.

Εστω $z = x + iy$ είναι μιγαδικός αριθμός. Τότε ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = x - iy$ καλείται **συζυγής** του z.

Καλούμε μέτρο $|z|$ του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ το μη αρνητικό αριθμό $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Γεωμετρικά ο αριθμός $|z|$ παριστάνει την απόσταση του $z = (x, y)$ ως σημείου του μιγαδικού επιπέδου από την αρχή των αξόνων και συμπίπτει με τη συνήθη απόλυτη τιμή όταν $y = 0$.

Πολική ή Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

Έστω $\rho > 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$ είναι οι πολικές συντεταγμένες σημείου $A = (x, y)$ του (μιγαδικού) επιπέδου που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$. Επειδή $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = \rho\eta\mu\theta$, ο μιγαδικός z μπορεί να γραφεί ως

$$z = x + iy = \rho\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta).$$

Είναι γνωστό ότι $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Τότε

$$\boxed{z = |z| \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta + i \cdot \eta\mu\theta)}$$

και έτσι παίρνουμε την **πολική ή τριγωνομετρική μορφή** του z. Λαμβάνοντας υπόψη την περιοδικότητα των συναρτήσεων $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ η παραπάνω ισότητα παίρνει τη μορφή

$$z = |z| \cdot (\sigma\upsilon\nu(\theta + 2k\pi) + i \cdot \eta\mu(\theta + 2k\pi)),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Για δοθέν $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $z = |z| \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta + i \cdot \eta\mu\theta)$, το σύνολο των γωνιών

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$$

καλείται **όρισμα** του z, συμβολικά $\arg(z)$. <u>Ορισμα δεν ορίζεται για το μιγαδικό αριθμό</u> $z = 0$. Αν *O* είναι η αρχή των αξόνων και A είναι εκείνο το σημείο στο μιγαδικό επίπεδο που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό z, γεωμετρικά το $\arg(z)$ είναι κάθε γωνία σε ακτίνια την οποία σχηματίζει ο θετικός ημιάξονας των πραγματικών αριθμών με το τμήμα OA.

Σημείωση Στο εξής θα λέμε ότι η γωνία θ διαγράφεται με τη θετική φορά αν η γωνία θ διαγράφεται από το θετικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών προς την ημιευθεία OA αντιωρολογιακά. Αν η φορά διαγραφής από το θετικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών προς την ημιευθεία OA είναι η ωρολογιακή, γράφουμε –θ. □

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι το $\arg(z)$ παίρνει άπειρες τιμές που όμως διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Μεταξύ των επιμέρους στοιχείων του συνόλου $\arg(z)$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο που ανήκει στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ (ή στο $[0, 2\pi)$). Αυτό το στοιχείο καλείται **πρωτεύουσα τιμή του ορίσματος** ή **πρωτεύον όρισμα** και συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}(z)$. □

Ο τύπος του Euler

Είναι γνωστό ότι $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$. Αν δεχθούμε ότι η παραπάνω ισχύει για $x = iy,\ y \in \mathbb{R}$, όπου i είναι η φανταστική μονάδα, τότε έχουμε:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!}\cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \sigma\upsilon\nu y + i \cdot \eta\mu y,$$

όπου τα δεξιά μέλη της προτελευταίας ισότητας είναι τα αναπτύγματα McLaurin των συναρτήσεων $\sigma\upsilon\nu y$ και $\eta\mu y$ αντίστοιχα. Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής ορισμό (**τύπος Euler**):

$$\boxed{e^{iy} = \sigma\upsilon\nu y + i \cdot \eta\mu y,\ \left(y \in \mathbb{R}\right)}.$$

- Προφανώς $|e^{iy}| = 1\ \ \forall y \in \mathbb{R}$.

- Η γεωμετρική ερμηνεία του e^{iy} είναι προφανής: Αν το $y \in [0, 2\pi)$ **τότε η e^{iy} διαγράφει το μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το (0,0) στο μιγαδικό επίπεδο κατά τη θετική φορά**. Για $y \in \mathbb{R}$ επαναδιαγράφουμε το μοναδιαίο κύκλο άπειρες φορές.

Από τον παραπάνω ορισμό γίνεται σαφές ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $z = |z|(\sigma\upsilon\nu\phi + i \cdot \eta\mu\phi)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\boxed{z = |z|\, e^{i\phi}}.$$

Αν $z_j = |z_j| e^{i\phi_j},\ j = 1, 2$ είναι δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

- $\overline{z_1} = |z_1| e^{-i\phi_1}$.

Με άλλα λόγια ο συζυγής $\overline{z} = x - iy$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο το συμμετρικό του σημείου $z = (x, y)$ ως προς τον πραγματικό άξονα. Επίσης:

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$.

Με άλλα λόγια το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 είναι ένας νέος μιγαδικός αριθμός με μέτρο ίσο με το γινόμενο των μέτρων των z_1, z_2 και όρισμα $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$ και $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ορίζουμε τη δύναμη μιγαδικού (με εκθέτη ακέραιο) ως εξής:

- $z^0 = 1$.

- $z^n = z \cdots z$, n-φορές.

- $z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n$.

Ισχύει ο **τύπος του Moivre**:

$$\boxed{z^n = |z|^n e^{in\phi} = |z|^n \left(\sigma\upsilon\nu(n\phi) + i \cdot \eta\mu(n\phi)\right),\ n \in \mathbb{Z}}.$$

Παραδείγματα

1. Δείξτε ότι $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0,\ n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Από την ιδιότητα $i^2 = -1$ έχουμε $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, άρα

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = i^n\left(1 + i + i^2 + i^3\right) = i^n\left(1 + i - 1 - i\right) = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

2. Δείξτε ότι αν $z, w \in \mathbb{C}$, τότε $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z-w)(\bar{z} - \bar{w}) \\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\
&= 2(|z|^2 + |w|^2).
\end{aligned}$$

3. Υπολογίστε τις παραστάσεις:

$$\left(1+i\right)^{12},\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^4,\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^8 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^8.$$

Λύση. (i) Γράφουμε το μιγαδικό αριθμό $z = 1 + i$ σε πολικές συντεταγμένες. ’Εχουμε $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\theta_0 = \tau o \xi \varepsilon \phi\left(\frac{|1|}{|1|}\right) = \frac{\pi}{4}$. Εφ’οσον ο z αντιστοιχεί σε σημείο του μιγαδικού επιπέδου στο 1ο τεταρτημόριο προκύπτει άμεσα ότι $Arg\left(z\right) = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$ και συνεπώς $1 + i = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi i}{4}}$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του De Moivre (1.4) παίρνουμε

$$\left(1+i\right)^{12} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} e^{\frac{12\pi i}{4}} = 2^6 e^{3\pi i} = -64.$$

(ii) Ομοια ο μιγαδικός αριθμός $w = 1 + i\sqrt{3}$ γράφεται σε πολικές συντεταγμένες ως $1 + i\sqrt{3} = 2\, e^{\frac{\pi i}{3}}$ και από τον τύπο του De Moivre έχουμε

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4 = \left(2e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^4 = 2^4 e^{\frac{4\pi i}{3}} = 16e^{\frac{4\pi i}{3}} = 16\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - 8\sqrt{3}\, i.$$

(iii) Παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός $1 - \sqrt{3}\, i$ είναι συζυγής του $1 + \sqrt{3}\, i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$ (βλέπε (ii)). Τότε

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^8 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^8 = \left(2e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^8 + \left(2e^{-\frac{\pi i}{3}}\right)^8 = 2^8 e^{\frac{8\pi i}{3}} + 2^8 e^{-\frac{8\pi i}{3}}$$

$$= 2^8\left(e^{\frac{8\pi i}{3}} + e^{-\frac{8\pi i}{3}}\right) = 2^8 \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -2^8 = -256$$