Κεφάλαιο 3

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης} (και ανώτερης) τάξης.

Στο Κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με γραμμικές δ.ε. 2^{ης} τάξης, διότι:

- οι γραμμικές δ.ε. 2^{ης} τάξης έχουν πολλές φυσικές εφαρμογές,
- η θεωρία των γραμμικών δ.ε. 2^{ης} τάξης γενικεύεται με φυσικό και ευκολονόητο τρόπο και για γραμμικές δ.ε. ανώτερης τάξης και
- οι μη γραμμικές δ.ε. 2^{ης} (και ανώτερης) τάξης επιλύονται γενικά με αριθμητικές μεθόδους.

3.1. Γραμμικές δ.ε. 2^{ης} τάξης με μεταβλητούς συντελεστές.

Ορισμός 3.1. *Καλούμε **γραμμική δ.ε. 2^{ης} τάξης**, κάθε δ.ε. της μορφής*

$$y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+q(x)y(x)=r(x),\ x\in I, \qquad (3.1)$$

όπου I είναι διάστημα της πραγματικής ευθείας, $p,q,r:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις και $y:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια άγνωστη, δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο I. Αν $r(x)=0\ \ \forall x$, δηλ.

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)y=0, \qquad (3.2)$$

*τότε μιλάμε για μια **ομογενή δ.ε. 2^{ης} τάξης**, διαφορετικά η (3.1) καλείται μη ομογενής. Επίσης αν*

$$p(x)=p,\ q(x)=q\quad \forall x,$$

*όπου p,q είναι πραγματικές σταθερές, τότε η (3.1) καλείται **γραμμική δ.ε. 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές**, διαφορετικά καλείται **γραμμική δ.ε. 2^{ης} τάξης με μεταβλητούς συντελεστές**.*

Ορισμός 3.2. *Δοθέντων πραγματικών αριθμών* x_0, y_0, y_1, *η εύρεση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης (3.1) που ικανοποιεί τις συνθήκες*

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_1 = y'(x_0) \end{cases} \qquad (3.3)$$

καλείται ***πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)*** *και οι σχέσεις (3.3) καλούνται* ***αρχικές συνθήκες***.

Ορισμός 3.3. *Οποιαδήποτε (τουλάχιστον δυο φορές παραγωγίσιμη) συνάρτηση* $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y = y(x)$ *που ικανοποιεί τη (3.1) για κάθε* x *σε διάστημα* I *καλείται λύση της (3.1). Επιπλέον, κάθε λύση της (3.1) που ικανοποιεί ταυτόχρονα δοθείσες αρχικές συνθήκες* $y_0 = y(x_0)$ *και* $y_1 = y'(x_0)$ *καλείται λύση του προβλήματος αρχικών τιμών της δ.ε.*

Οσον αφορά την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.1. *Εστω* $p, q, r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι* ***συνεχείς*** *συναρτήσεις σε διάστημα* I, $x_0 \in I$ *και* y_0, y_1 *δοθέντες πραγματικοί αριθμοί. Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.3) έχει μοναδική λύση στο* I.

Στο εξής πάντα θα θεωρούμε ότι οι p, q, r είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας εκτός αν κάτι άλλο δηλώνεται.

Για την εύρεση της γενικής λύσης της (3.1) έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2. *Η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής δ.ε. (3.1) ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς γραμμικής δ.ε. (3.2) και μιας οποιασδήποτε μερικής λύσης της (3.1).*

Απόδειξη. Εστω Y είναι μια συγκεκριμένη λύση της (3.1). Αν y είναι τυχαία λύση της (3.1), τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η $y - Y$ είναι λύση της ομογενούς δ.ε. (3.2). Αρα η $y - Y$ ανήκει στο σύνολο λύσεων της ομογενούς δ.ε. (3.2) και συνεπώς

$$y = Y + z,$$

όπου z ανήκει στο σύνολο λύσεων της (3.2). □

Με βάση λοιπόν το Θεώρημα 3.2, η εύρεση της λύσης της (3.1) ανάγεται

- στην εύρεση της γενικής λύσης της ομογενούς δ.ε. (3.2) και
- στην εύρεση μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς δ.ε. (3.1).

Αρχικά ασχολούμαστε με την εύρεση της γενικής λύσης της ομογενούς γραμμικής δ.ε. (3.2).

3.1.1. Ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης.

Ξεκινάμε με κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 3.4. *Θα λέμε ότι δυο μη μηδενικές πραγματικές συναρτήσεις* $\phi_1, \phi_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *πάνω σε διάστημα* I *της πραγματικής ευθείας είναι* ***γραμμικά εξαρτημένες*** *στο* I *αν υπάρχουν σταθερές* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ***<u>όχι και οι δυο ίσες με μηδέν</u>*** *έτσι ώστε*

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Σε αντίθετη περίπτωση θα λέμε ότι ϕ_1, ϕ_2 *είναι* ***γραμμικά ανεξάρτητες*** *στο* I.

Αν οι ϕ_1, ϕ_2 είναι παραγωγίσιμες στο I, τότε ένα χρήσιμο κριτήριο γραμμικής εξάρτησης/ανεξαρτησίας των ϕ_1, ϕ_2 μας δίνει η **ορίζουσα Wronsky** αυτών, συμβολικά W_{ϕ_1,ϕ_2}:

$$W_{\phi_1,\phi_2} = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = \phi_1 \cdot \phi_2' - \phi_1' \cdot \phi_2 . \tag{3.3}$$

Σημείωση. Η W_{ϕ_1,ϕ_2} είναι συνάρτηση και η $W_{\phi_1,\phi_2}(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix}$ είναι πραγματικός αριθμός, η τιμή της W_{ϕ_1,ϕ_2} στο x.

Πρόταση 3.1. *Εστω δυο μη μηδενικές πραγματικές συναρτήσεις* ϕ_1, ϕ_2 *είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο σε κάποιο διάστημα* I *της πραγματικής ευθείας. Αν*

$$W_{\phi_1,\phi_2}(x_0) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

σ' ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in I$*, τότε οι* ϕ_1, ϕ_2 *είναι* ***γραμμικά ανεξάρτητες*** *στο* I*.*

Απόδειξη. Εστω $c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0 \ \forall x \in I$. Με παραγώγιση αυτής και αντικατάσταση $x = x_0$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} c_1\phi_1(x_0) + c_2\phi_2(x_0) = 0 \\ c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) = 0 \end{cases},$$

το οποίο γράφεται με τη μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική $c_1 = c_2 = 0$ διότι εξ υποθέσεως $W_{\phi_1,\phi_2}(x_0) \neq 0$. Αρα από τον ορισμό 3.4 προκύπτει ότι οι ϕ_1, ϕ_2 *είναι* ***γραμμικά ανεξάρτητες*** *στο* I*.* □

Πόρισμα 3.1. *Αν οι* ϕ_1, ϕ_2 *είναι* ***γραμμικά εξαρτημένες*** *στο* I*, τότε*

$$W_{\phi_1,\phi_2}(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in I.$$

Απόδειξη. Αμεση. □

Πρόταση 3.2. ***(Abel-Liouville)*** *Δυο οποιεσδήποτε λύσεις της ομογενούς δ.ε. (3.2) έχουν ορίζουσα Wronsky είτε μηδενική για κάθε* x*, είτε διάφορη του μηδενός για κάθε* x*.*

Απόδειξη. Εστω ϕ_1, ϕ_2 είναι δυο λύσεις της ομογενούς δ.ε. (3.2),

$$\begin{cases} \phi_1'' + p(x)\cdot\phi_1' + q(x)\phi_1 = 0 \\ \phi_2'' + p(x)\cdot\phi_2' + q(x)\phi_2 = 0 \end{cases}.$$

Πολ/ζοντας την πρώτη εξίσωση με $-\phi_2$ και τη δεύτερη με ϕ_1 και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\left(\phi_1\cdot\phi_2'' - \phi_2\cdot\phi_1''\right) + p(x)\left(\phi_1\cdot\phi_2' - \phi_2\cdot\phi_1'\right) = 0 \Rightarrow W'_{\phi_1,\phi_2}(x) + p(x)W_{\phi_1,\phi_2}(x) = 0,$$

όπου W_{ϕ_1,ϕ_2} είναι η ορίζουσα Wronsky. Η παραπάνω είναι μια ομογενής γραμμική δ.ε. 1ης τάξης με γενική λύση

$$W_{\phi_1,\phi_2}(x) = c\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Αν $W_0 = W_{\phi_1,\phi_2}(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in I$, τότε παίρνουμε

$$W_{\phi_1,\phi_2}(x) = W_0\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \quad \forall x \in I.$$

Αν λοιπόν $W_0 = 0$ για κάποιο $x_0 \in I$, τότε $W_{\phi_1,\phi_2}(x) = 0 \ \forall x \in I$, διαφορετικά $W_{\phi_1,\phi_2}(x) \neq 0 \ \forall x \in I$. □

Θεώρημα 3.3. *Αν οι ϕ_1,ϕ_2 είναι δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς δ.ε. (3.2), τότε η γενική λύση της (3.2) δίνεται από τη σχέση*

$$y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Απόδειξη. Προφανώς η $y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ είναι λύση της ομογενούς δ.ε. (3.2). Αντίστροφα, έστω y είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (3.3) για κάποιο $x_0 \in I$ και δοθέντες πραγματικούς αριθμούς y_0, y_1. Τότε σχηματίζουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} c_1\phi_1(x_0) + c_2\phi_2(x_0) = y(x_0) = y_0 \\ c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) = y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

το οποίο γράφεται με τη μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή οι ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες ισχύει $W(x_0) \neq 0$ (βλέπε Πρόταση 3.2), άρα το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση ως προς $c_1 = c_1^0,\ c_2 = c_2^0$. Αναγκαστικά λοιπόν θα ισχύει ταυτοτικά

$$y \equiv c_1^0 \phi_1 + c_2^0 \phi_2$$

διότι από το θεώρημα 3.1 υπάρχει μοναδικότητα των λύσεων. □

Το παραπάνω θεώρημα μας παρέχει τη γενική λύση της ομογενούς γραμμικής δ.ε. (3.2) υπό την προϋπόθεση ότι είναι γνωστές δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της. Υπάρχουν όμως πάντα δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.2); Και αν ναι πως τις βρίσκουμε; Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι θετική όπως φαίνεται στην ακόλουθη:

Πρόταση 3.3. *Για την ομογενή δ.ε. (3.2) υπάρχουν πάντα δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της σε διάστημα I της πραγματικής ευθείας.*

Απόδειξη. Εστω $x_0 \in I$. Τότε από το θεώρημα 3.1 ύπαρξης και μοναδικότητας υπάρχει μοναδική λύση της (3.2) στο διάστημα I, έστω y_1 που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y_1(x_0) = 1$ και $y_1'(x_0) = 0$. Με την ίδια λογική υπάρχει μοναδική λύση της (3.2) στο διάστημα I, έστω y_2 που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y_2(x_0) = 0$ και $y_2'(x_0) = 1$. Τότε η τιμή της ορίζουσας Wronsky στο σημείο x_0 είναι $W_{\phi_1,\phi_2}(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ και συνδυάζοντας τις Προτάσεις 3.2 και 3.1 προκύπτει ότι οι y_1 και y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. □

Ορισμός 3.5. *Δυο **γραμμικά ανεξάρτητες** λύσεις της (3.2) λέμε ότι αποτελούν ένα **θεμελιώδες σύνολο λύσεων** της (3.2).*

Δυστυχώς η Πρόταση 3.3 δεν μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο

θα μπορέσουμε να βρούμε ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (3.2). Αν όμως ξέρουμε μια (μη μηδενική) λύση, έστω y, της ομογενούς δ.ε. (3.2), τότε μπορούμε να βρούμε μια γραμμικά ανεξάρτητη λύση αυτής χρησιμοποιώντας τη ***μέθοδο υποβιβασμού τάξης***. Σύμφωνα μ' αυτή τη μέθοδο, θεωρούμε μια άλλη λύση της (3.2) της μορφής

$$z = y \cdot u\,,$$

όπου $u = u(x)$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση που θα προσδιορίσουμε. Τότε με αντικατάσταση στην (3.2) παίρνουμε

$$(y \cdot u)'' + p \cdot (y \cdot u)' + q \cdot (y \cdot u) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y \cdot u'' + 2u' \cdot y' + p \cdot y \cdot u') + u(y'' + p \cdot y' + q \cdot y) = 0$$

$$\Leftrightarrow y \cdot u'' + 2u' \cdot y' + p \cdot y \cdot u' = 0\,.$$

Θέτουμε $u' = \zeta$, οπότε υποβιβάζουμε την τάξη της παραπάνω δ.ε. κατά 1 (σε 1ης τάξης στη συγκεκριμένη περίπτωση) και έχουμε

$$y \cdot \zeta' + (2y' + p \cdot y) \cdot \zeta = 0\,,$$

απ' όπου προκύπτει εύκολα η ζ και κατ' επέκταση η u και συνεπώς η λύση z της (3.2). Επειδή η ορίζουσα Wronsky

$$W_{y,z} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & u \cdot y \\ y' & (u \cdot y)' \end{vmatrix} = y^2 \cdot u'\,,$$

οι δυο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε διαστήματα της πραγματικής ευθείας που δεν περιέχουν τις ρίζες της $y(x) = 0$ και τις ρίζες της $u'(x) = 0$.

Σημείωση. Όλα τα παραπάνω θεωρήματα και μέθοδοι αυτής της παραγράφου γενικεύονται με φυσικό τρόπο και για ομογενείς γραμμικές δ.ε. τάξης 3,4,…

Παράδειγμα. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις e^x και e^{-x} είναι γραμμικά

ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$. Ποια ομογενής γραμμική δ.ε. έχει αυτές τις συναρτήσεις ως θεμελιώδες σύνολο λύσεων;

Λύση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronsky

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix}=-2$$

άρα οι e^{x} και e^{-x} είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$. Εστω

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$$

είναι η γενική λύση μιας ομογενούς δ.ε. (3.2). Τότε με δυο διαδοχικές παραγωγίσεις παίρνουμε

$$y'=c_1e^{x}-c_2e^{-x}$$

και

$$y''=c_1e^{x}+c_2e^{-x}=y\,.$$

Αρα η $y''-y=0$ είναι η ομογενής δ.ε. 2ης τάξης με θεμελιώδες σύνολο το $\{e^{x},e^{-x}\}$. □

Παράδειγμα. Δίνεται η δ.ε. $y''+5y'-6y=0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A=\{e^{x},\ e^{x}-e^{-6x}\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της δ.ε. Δείξτε ότι η $y=e^{-6x}$ είναι επίσης λύση της δ.ε. και εκφράστε την ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του A.

Λύση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronsky

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{x}-e^{-6x} \\ e^{x} & e^{x}+6e^{-6x} \end{vmatrix}=7e^{-5x}\neq 0\quad \forall x$$

άρα οι e^{x} και $e^{x}-e^{-6x}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$ και αφού είναι και λύσεις της δ.ε. (εύκολα προκύπτει με αντικατάσταση στη δ.ε. $y''+5y'-6y=0$) αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων αυτής. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $y=e^{-6x}$ είναι επίσης μια λύση της δ.ε. Τότε εφόσον η γενική λύση της $y''+5y'-6y=0$ είναι η

$$y = c_1 e^x + c_2\left(e^x - e^{-6x}\right),$$

με αντικατάσταση $y = e^{-6x}$ παίρνουμε

$$e^{-6x} = c_1 e^x + c_2\left(e^x - e^{-6x}\right)$$

και με παραγώγιση έχουμε

$$-6e^{-6x} = c_1 e^x + c_2\left(e^x + 6e^{-6x}\right).$$

Αρα

$$\begin{cases} e^{-6x} = c_1 e^x + c_2\left(e^x - e^{-6x}\right) \\ -6e^{-6x} = c_1 e^x + c_2\left(e^x + 6e^{-6x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+c_2)e^{-6x} = (c_1+c_2)e^x \\ -6(1+c_2)e^{-6x} = (c_1+c_2)e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+c_2) = (c_1+c_2) \\ -6(1+c_2) = (c_1+c_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Αν $y = x^2$ είναι μια λύση της δ.ε.

$$y'' - \frac{y'}{2x} - \frac{y}{x^2} = 0,\ (x > 0),$$

υπολογίστε τη γενική λύση της.

Λύση. Θα εργασθούμε με τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης. Εστω $z = u \cdot x^2$ είναι μια άλλη λύση της δ.ε. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\left(u \cdot x^2\right)'' - \frac{\left(u \cdot x^2\right)'}{2x} - u = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow u'' + \frac{7u'}{2x} = 0.$$

Θέτουμε $\zeta = u'$ και η παραπάνω γίνεται μια γραμμική δ.ε.

$$\zeta' + \frac{7\zeta}{2x} = 0 \Leftrightarrow \zeta = c \cdot x^{-\frac{7}{2}}.$$

Αρα (για π.χ. $c = 1$) παίρνουμε

$$u = -\frac{2x^{-\frac{5}{2}}}{5},$$

συνεπώς

$$z = u \cdot x^2 = -\frac{2}{5\sqrt{x}}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ορίζουσα Wronsky των λύσεων $y = x^2$ και $y = -\frac{2}{5\sqrt{x}}$ δε μηδενίζεται για $x > 0$, άρα η γενική λύση της δ.ε. είναι η

$$y = c_1 x^2 + c_2 \frac{2}{5\sqrt{x}}, \ (x > 0). \qquad \square$$

Ασκήσεις.

1. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις

(α) $\{x+1,\ x-1\}$ και

(β) $\{x+1,\ x^2+x,\ 2x^2-x-3\}$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$. **Απ.** (α) Ναι (β) Οχι

2. Υπολογίστε την ορίζουσα Wronsky των συναρτήσεων $\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x,\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$. **Απ.** 0

3. Δίνεται η δ.ε. Legendre

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ |x| < 1.$$

Αν η $y = x$ είναι μια λύση της, βρείτε τη γενική της λύση.

Απ. $y = c_1 x + c_2\left(\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\right)$

4. Δίνεται η δ.ε. $(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0\ (x > 2)$. Αν η $y = e^{2x}$ είναι μια λύση της, βρείτε τη γενική της λύση.

Απ. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)$

5. Υπολογίστε τη γενική λύση της δ.ε. $y'' - y = x^2$ αν μια μερική λύση της είναι η $y = -x^2 - 2$ και μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. είναι η $y = e^x$. **Απ.** $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \left(x^2 - 2\right)$

6. Υπολογίστε τη γενική λύση της δ.ε. $y''' - y'' - y = 4$ αν μια μερική λύση της είναι η $y = -4$ και τρεις λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. είναι οι $y = e^x, xe^x, e^{-x}$. **Απ.** $y = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 e^{-x} - 4$

3.1.2. Μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής δ.ε. 2ης τάξης. Η μέθοδος μεταβολής των σταθερών.

Ας ασχοληθούμε τώρα με την εύρεση μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς δ.ε. (3.1). Για το σκοπό αυτό θα εφαρμόσουμε τη ***μέθοδο μεταβολής των σταθερών.***

Απαραίτητη προϋπόθεση είναι να γνωρίζουμε δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, (έστω ϕ_1, ϕ_2), της ομογενούς δ.ε. (3.2) σε κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Εστω λοιπόν

$$y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$$

είναι η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. (3.2). Υποθέτουμε πως οι σταθερές c_1, c_2 στην παραπάνω έκφραση της γενικής λύσης είναι συναρτήσεις του x, έστω $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$ και προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$ ώστε η

$$y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$$

να είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς δ.ε. (3.1). Παραγωγίζοντας έχουμε

$$y' = c_1'\phi_1 + c_1\phi_1' + c_2'\phi_2 + c_2\phi_2' = \left(c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2\right) + \left(c_1\phi_1' + c_2\phi_2'\right).$$

Υποθέτουμε ότι

$$c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 = \mathbf{0}, \qquad (3.4)$$

($\mathbf{0}$ είναι η μηδενική συνάρτηση), οπότε

$$y' = c_1\phi_1' + c_2\phi_2'. \qquad (3.5)$$

Ξαναπαραγωγίζουμε:

$$y'' = c_1'\phi_1' + c_1\phi_1'' + c_2'\phi_2' + c_2\phi_2''. \qquad (3.6)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις τιμές των (3.5) και (3.6) στη δ.ε. (3.1). Τότε

$$\left(c_1'\phi_1' + c_1\phi_1'' + c_2'\phi_2' + c_2\phi_2''\right) + p\left(c_1\phi_1' + c_2\phi_2'\right) + q\left(c_1\phi_1 + c_2\phi_2\right) = r$$

$$\Leftrightarrow c_1\left(\phi_1'' + p\phi_1' + q\phi_1\right) + c_2\left(\phi_2'' + p\phi_2' + q\phi_2\right) + \left(c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2'\right) = r$$

$$\Leftrightarrow c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' = r\,, \tag{3.7}$$

διότι εξ υποθέσεως οι ϕ_1, ϕ_2 είναι λύσεις της ομογενούς δ.ε. (3.2). Από τις (3.4) και (3.7) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 = \mathbf{0} \\ c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Εφόσον οι ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες, το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση στο I (η ορίζουσα Wronski είναι μη μηδενική), έστω

$$\begin{cases} c_1' = a(x) \\ c_2' = b(x) \end{cases},$$

και με απλή ολοκλήρωση προκύπτουν οι ζητούμενες συναρτήσεις.

Παράδειγμα. Να βρεθεί μια μερική λύση της δ.ε. $y'' - 4y' + 4y = 2x + 3$, αν οι $y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = xe^{2x}$ είναι δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς δ.ε.

Λύση. Εστω $y = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)xe^{2x}$ είναι μια μερική λύση της δ.ε. Τότε το σύστημα (3.8) γίνεται

$$\begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x^2 + 3 \end{bmatrix},$$

οπότε από τη μέθοδο Cramer υπολογίζουμε

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ 2x^2 + 3 & (1+2x)e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} \end{vmatrix}} = -x\left(2x^2 + 3\right)e^{-2x},$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ xe^{2x} & 2x^2+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} \end{vmatrix}} = \left(2x^2+3\right)e^{-2x}.$$

Ετσι με απλή ολοκλήρωση (η σταθερά παραλείπεται) παίρνουμε

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{e^{-2x}}{2}\left(2x^3+3x^2+6x+3\right) \\ c_2 = e^{-2x}\left(x^2+2x+2\right) \end{cases}. \qquad \square$$

3.2 Γραμμικές δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Στην προηγούμενη παράγραφο αναπτύξαμε τη γενική θεωρία των γραμμικών δ.ε. 2ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές. Με προσεκτική μελέτη θα διαπιστώσει κάποιος ότι για την εύρεση της γενικής λύσης της δ.ε. (3.1) (πάντα με βάση τα θεωρήματα της ενότητας (3.1)) <u>είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε (ή να υποπτευθούμε) τουλάχιστον μια λύση της ομογενούς δ.ε. (3.2), το οποίο δεν είναι πάντα εύκολο</u>. Στην περίπτωση όμως μιας γραμμικής δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές τα πράγματα είναι αρκετά πιο απλά. Τότε πάντα έχουμε κλειστούς τύπους για την ομογενή δ.ε. και κατ' επέκταση μπορούμε πάντα να προσδιορίσουμε και τη γενική λύση της μη ομογενούς δ.ε. Στην ενότητα αυτή λοιπόν ασχολούμαστε με γραμμικές δ.ε. 2ης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = r(x), \tag{3.9}$$

όπου $p, q \in \mathbb{R}$ είναι γνωστές πραγματικές **σταθερές**. Αν $r = 0$, τότε η δ.ε

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \tag{3.10}$$

καλείται **ομογενής δ.ε. 2ης τάξης**, διαφορετικά καλείται μη ομογενής.

Αφού η δ.ε. (3.9) (ή (3.10)) είναι ειδική περίπτωση της δ.ε. (3.1) (ή (3.2)) ισχύουν όλα τα θεωρήματα της προηγούμενης ενότητας, οπότε ισχύει και το θεώρημα 3.2:

Η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής δ.ε. (3.9) ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς γραμμικής δ.ε. (3.10) και μιας οποιασδήποτε μερικής λύσης της (3.9).

Αρχικά λοιπόν ασχολούμαστε με την εύρεση της γενικής λύσης της (3.10).

3.2.1. Ομογενείς γραμμικές δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Ας θεωρήσουμε τη δ.ε. (3.10). Προφανής λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η $y=0$. Αναζητούμε λύση της μορφής $y(x)=e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}$ (τέχνασμα του Euler). Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$y'(x)=\lambda e^{\lambda x} \text{ και } y''(x)=\lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Αντικαθιστώντας στην (3.10) παίρνουμε

$$\lambda^2 e^{\lambda x}+p\lambda e^{\lambda x}+qe^{\lambda x}=0 \Leftrightarrow e^{\lambda x}\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)=0 \Leftrightarrow \lambda^2+p\lambda+q=0.$$

Δηλαδή για να υπάρχει λύση της μορφής $y(x)=e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}$ θα πρέπει το λ να είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\boxed{\lambda^2+p\lambda+q=0}.$$

Η παραπάνω καλείται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** της ομογενούς γραμμικής δ.ε. (3.10). Τότε το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τη γενική λύση της (3.10):

Θεώρημα 3.4. *Εστω*

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \qquad (3.11)$$

είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.10) και λ_1, λ_2 είναι οι δυο ρίζες αυτής (πραγματικές ή μιγαδικές). Τότε

(Α) *Αν οι λ_1, λ_2 είναι διακεκριμένες πραγματικές ρίζες της (3.11), τότε η γενική λύση της (3.10) δίνεται από τον τύπο:*

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

(Β) *Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ είναι διπλή ρίζα της (3.11), τότε η γενική λύση της (3.10) δίνεται από τον τύπο:*

$$y = \left(c_1 + c_2 x\right) e^{\lambda x},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

(Γ) *Αν $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$ $\left(a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0\right)$ είναι (συζυγείς) μιγαδικές ρίζες της (3.11), τότε η γενική λύση της (3.10) δίνεται από τον τύπο*

$$y = e^{ax}\left(c_1 \sigma\upsilon\nu\left(bx\right) + c_2 \eta\mu\left(bx\right)\right),$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Απόδειξη. (Α) Αν οι λ_1, λ_2 είναι διακεκριμένες πραγματικές ρίζες της (3.11), τότε οι συναρτήσεις $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ και $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ είναι λύσεις της ομογενούς δ.ε. (3.10) και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητες (ελέγξτε την ορίζουσα Wronsky αυτών). Αρα από τη γενική θεωρία (βλέπε θεώρημα 3.3 ενότητας 3.1) προκύπτει ότι η $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ είναι γενική λύση της (3.10).

(Β) Αν η $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ είναι διπλή ρίζα της (3.11), τότε η $y_1 = e^{\lambda x}$ είναι μια λύση της δ.ε. (3.10). Εφαρμόζουμε τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης (βλέπε παραπάνω) απ' όπου προκύπτει μια δεύτερη λύση της (3.10), η $y_2 = xe^{\lambda x}$. Οι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες (ελέγξτε την ορίζουσα Wronsky αυτών), οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

(Γ) Αν $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$ $\left(a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0\right)$ είναι (συζυγείς) μιγαδικές ρίζες της (3.11), τότε οι μιγαδικές συναρτήσεις $y_1 = e^{(a+ib)x}$ και $y_2 = e^{(a-ib)x}$ είναι επίσης λύσεις της ομογενούς δ.ε. (3.10). Λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο Euler

$$e^{iy} = \sigma\upsilon\nu y + i\eta\mu y,$$

και το γεγονός ότι αν μια μιγαδική συνάρτηση είναι λύση της (3.10) τότε το και το πραγματικό και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της είναι επίσης λύσεις της (3.10) προκύπτει ότι

$$y_1 = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}\left(\sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x\right) = e^{ax}\sigma\upsilon\nu x + ie^{ax}\eta\mu x\,,$$

συνεπώς οι $e^{ax}\sigma\upsilon\nu x$ και $e^{ax}\eta\mu x$ είναι λύσεις της (3.10) και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε παίρνουμε τη ζητούμενη λύση. □

Το θεώρημα αυτό γενικεύεται με φυσικό τρόπο και για ομογενείς δ.ε. με σταθερούς συντελεστές ανώτερης τάξης. Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε και τη γενίκευση αυτού.

Θεώρημα 3.5. (ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ) *Εστω*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0 \qquad (3.12)$$

είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y = 0 \qquad (3.13)$$

και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι n το πλήθος ρίζες της (3.12) (πραγματικές ή μιγαδικές). Τότε:

(i) *Για κάθε πραγματική ρίζα λ_k, $\left(1 \le k \le n\right)$ της (3.12) πολλαπλότητας n_k, οι (n_k το πλήθος) συναρτήσεις*

$$e^{\lambda_k x},\ xe^{\lambda_k x},\ x^2 e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{n_k - 1} e^{\lambda_k x},$$

αποτελούν (n_k το πλήθος) γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.13).

(ii) *Για κάθε ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών $\lambda_k = a_k \pm ib_k$, $\left(1 \le k \le n\right)$ της (3.12) πολλαπλότητας v_k, οι ($2v_k$ το πλήθος) συναρτήσεις*

$$e^{a_k x},\ x\sigma\upsilon\nu\left(b_k x\right)e^{a_k x},\ x^2\sigma\upsilon\nu\left(b_k x\right)e^{a_k x}, \ldots, x^{v_k - 1}\sigma\upsilon\nu\left(b_k x\right)e^{a_k x}$$

και

$$e^{a_k x},\ x\eta\mu\left(b_k x\right)e^{a_k x},\ x^2\eta\mu\left(b_k x\right)e^{a_k x}, \ldots, x^{v_k - 1}\eta\mu\left(b_k x\right)e^{a_k x}$$

αποτελούν ($2\nu_k$ το πλήθος) γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.13).

Η γενική λύση της (3.13) προκύπτει από το γραμμικό συνδυασμό όλων των γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων τύπου (i) και (ii) για κάθε μια από τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης (3.12). □

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Λύση. Εχουμε μια ομογενή γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής είναι η

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

και οι ρίζες της είναι οι

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1 \text{ ή } 2$$

οι οποίες είναι διακεκριμένες. Από το θεώρημα 3.4 παίρνουμε τη γενική λύση

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 2y' + y = 0$.

Λύση. Εχουμε ομογενή γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής είναι η

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

και οι ρίζες της είναι η

$$\lambda_{1,2} = 1 \ (\text{διπλή}).$$

Από το θεώρημα 3.4 παίρνουμε τη γενική λύση

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Λύση. Εχουμε ομογενή γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής είναι η

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

και οι ρίζες της είναι η

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \ .$$

Από το θεώρημα 3.4 παίρνουμε τη γενική λύση

$$y = e^x \left(c_1 \sigma\upsilon\nu(2x) + c_2 \eta\mu(2x) \right). \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $y''' - y'' + y' - y = 0$.

Λύση. Εχουμε ομογενή γραμμική δ.ε. 3ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής είναι η

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 .$$

Με παραγοντοποίηση (ή με σχήμα Horner) εντοπίζουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\lambda_1 = 1, \ \ \lambda_{2,3} = \pm i \ .$$

Από το θεώρημα 3.5 παίρνουμε τη γενική λύση

$$y = c_1 e^x + c_2 \sigma\upsilon\nu(x) + c_3 \eta\mu(x). \qquad \square$$

Παράδειγμα. Επιλύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ \quad y(0) = 0 \\ \quad y'(0) = 3 \end{cases} .$$

Λύση. Εχουμε ομογενής γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

και ρίζες

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i .$$

Κατά συνέπεια η γενική λύση της δ.ε. είναι η εξής:

$$y = e^{2x} \left(c_1 \sigma\upsilon\nu(3x) + c_2 \eta\mu(3x) \right).$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω και παίρνουμε

$$y' = 2c_1e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x) + 2c_2e^{2x}\eta\mu(3x) - 3c_1e^{2x}\eta\mu(3x) + 3c_2e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x).$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες στη γενική λύση και στην παράγωγό της και έχουμε

$$\begin{cases} 0 = c_1e^0\sigma\upsilon\nu(0) + c_2e^0\eta\mu(0) \\ 3 = 2c_1e^0\sigma\upsilon\nu(0) + 2c_2e^0\eta\mu(0) - 3c_1e^0\eta\mu(0) + 3c_2e^0\sigma\upsilon\nu(0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases},$$

συνεπώς η λύση είναι η $y = e^{2x}\eta\mu(3x)$. □

Ασκήσεις.

Να λυθούν οι ακόλουθες ομογενείς δ.ε.:

- $y'' - 6y' + 25y = 0$ **Απ.** $y = c_1e^{3x}\sigma\upsilon\nu(4x) + c_2e^{3x}\eta\mu(4x)$
- $y'' - 3y' - 4y = 0$ **Απ.** $y = c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$
- $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$
  Απ. $y = c_1\sigma\upsilon\nu(2x) + c_2x\sigma\upsilon\nu(2x) + c_3\eta\mu(2x) + c_4x\eta\mu(2x)$
- $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$
  Απ. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3\sigma\upsilon\nu(x) + c_4\eta\mu(x)$
- $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$
  Απ. $y = e^{-\frac{x}{2}}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)(c_1 + c_2x) + e^{-\frac{x}{2}}\eta\mu\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)(c_3 + c_4x)$
- $y'' + 5y' + 6y = 0$ με $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ **Απ.** $y = e^{-3x}\left(-3 + 3e^x\right)$

3.2.2. Μερική λύση μη ομογενούς γραμμικής δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.

Ασχολούμαστε τώρα με την εύρεση μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς δ.ε. (3.9):

$$y'' + p \cdot y' + q = r(x),$$

όπου p, q πραγματικές σταθερές και $r = r(x)$ γνωστή πραγματική συνάρτηση. Υπενθυμίζουμε ότι το άθροισμα μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς δ.ε. (3.9) μαζί με τη γενική λύση της ομογενούς δ.ε. (3.10) μας δίνει τη γενική λύση της $y'' + p \cdot y' + q = r(x)$.

Ηδη παραπάνω έχουμε περιγράψει μια γενική μέθοδο εύρεση μιας μερικής λύσης, τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών. Όταν όμως έχουμε σταθερούς συντελεστές στη δ.ε. (3.9), (**<u>και μόνον τότε</u>**) υπάρχει και μια άλλη μέθοδος προσδιορισμού μιας μερικής λύσης της (3.9) για ειδικές περιπτώσεις της γνωστής συνάρτησης r, η οποία καλείται ***μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών***.

Οι ειδικές μορφές της γνωστής συνάρτησης r είναι οι εξής:

<u>1η ειδική μορφή:</u> $r(x) = e^{\lambda x}\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m\right),\ \left(\lambda, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}\right).$

Αν P είναι άγνωστο πολυώνυμο βαθμού m, αναζητούμε μια μερική λύση της (3.9) της μορφής

$$\begin{cases} w = e^{\lambda x} P(x), & \lambda \ \delta\varepsilon\nu \text{ είναι ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης} \\ w = x^k e^{\lambda x} P(x), & \lambda \text{ είναι ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης πολ/τας } k \end{cases}.$$

<u>2η ειδική μορφή:</u> $r(x) = e^{\lambda x}\left(P_1(x)\sigma\upsilon\nu(\mu x) + P_2(x)\eta\mu(\mu x)\right),$
όπου P_1, P_2 είναι πολυώνυμα βαθμού ν_P και ν_Q αντίστοιχα.

Εστω Q_1, Q_2 είναι άγνωστα πολυώνυμα του ιδίου βαθμού και ίσου με $\max\{\nu_P, \nu_Q\}$. Τότε, αναζητούμε μια μερική λύση της (3.9) της μορφής

$$w = e^{\lambda x}\left(Q_1(x)\sigma\upsilon\nu(\mu x) + Q_2(x)\eta\mu(\mu x)\right)$$

στην περίπτωση που η $\lambda + i\mu$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής

εξίσωσης ή

$$w = x^k e^{\lambda x}\left(Q_1(x)\sigma\upsilon\nu(\mu x) + Q_2(x)\eta\mu(\mu x)\right)$$

στην περίπτωση που η $\lambda + i\mu$ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της ομογενούς δ.ε. πολ/τας k.

<u>3η ειδική μορφή:</u> $r(x) = f_1(x) + ... + f_n(x),$

όπου οι $f_1,..., f_n$ είναι της 1ης ή 2ης ειδικής μορφής. Τότε χωρίζουμε την αρχική δ.ε. στις δ.ε.

$$\begin{cases} y'' + p\cdot y' + q = f_1(x) \\ y'' + p\cdot y' + q = f_2(x) \\ \qquad\qquad \cdots \\ y'' + p\cdot y' + q = f_n(x) \end{cases}$$

και προσδιορίζουμε τη μερική λύση, έστω $w_i,\ i = 1,...,n$ κάθε μιας απ' αυτές με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Προφανώς η

$$w_1 + w_2 + ... + w_n$$

είναι μερική λύση της δ.ε. $y'' + p\cdot y' + q = f_1(x) + ... + f_n(x)$.

Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y' - 2y = -2x^2 - 2x + 1.$$

Λύση. Εχουμε μια μη ομογενή γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. είναι

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

και οι ρίζες της είναι:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1, 2.$$

Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς είναι η

$$z(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

Επιπλέον:

$$r(x) = -2x^2 - 2x + 1,$$

οπότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$w(x) = ax^2 + bx + c$$

(βλ. 1η ειδική περίπτωση). Παραγωγίζουμε τη w δυο φορές και αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε. Ετσι παίρνουμε

$$2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = -2x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c = -2x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow -2ax^2 - \left(2a + 2b\right)x + \left(2a - b - 2c\right) = -2x^2 - 2x + 1.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων δυνάμεων του x και προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2a - 2b = -2 \\ 2a - 2b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Αρα μια μερική λύση της αρχικής δ.ε. είναι η $w(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ και η ζητούμενη γενική λύση είναι

$$y(x) = z(x) + w(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + x^2 + \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' + 3y' - 4y = 3e^{2x}$.

Λύση. Εχουμε μια μη ομογενή γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = -4 \text{ ή } 1.$$

Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι η

$$z(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}.$$

Εφόσον $r(x) = 3e^{2x}$ και επειδή το 2 (συντελεστής του x στον εκθέτη του e) δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε μερική λύση της μορφής $w(x) = ae^{2x}$ (βλ. 1η ειδική περίπτωση). Παραγωγίζουμε τη w δυο φορές και αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε. και έχουμε

$$4ae^{2x} + 3(2ae^{2x}) - 4ae^{2x} = 3e^{2x} \Leftrightarrow 6ae^{2x} = 3e^{2x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Αρα μια μερική λύση της αρχικής δ.ε. είναι η $w(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ και συνεπώς η ζητούμενη γενική λύση που ψάχνουμε είναι η

$$y(x) = z(x) + w(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{2}e^{2x}. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 2y' - 3y = (x+1)e^{3x}$.

Λύση. Εχουμε μια μη ομογενή γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = -1, 3.$$

Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι η

$$w(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Επίσης $r(x) = (x+1)e^{3x}$ και εφόσον αφού το $\lambda = 3$ είναι (απλή) ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης αναζητούμε μερική λύση της αρχικής δ.ε. της μορφής

$$z(x) = x(ax+b)e^{3x}$$

(βλ. 1η ειδική περίπτωση). Παραγωγίζουμε τη w δυο φορές και αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε. Τότε έχουμε

$$\left(9ax^2+(9b+12a)x+6b+2a\right)e^{3x}-2\left(3ax^2+3bx+2ax+b\right)e^{3x}$$

$$-3x(ax+b)e^{3x}=(x+1)e^{3x}\Leftrightarrow(8ax+4b+2a)e^{3x}=(x+1)e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow 8ax+\left(4b+2a\right)=x+1.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων δυνάμεων του x προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 8a=1 \\ 4b+2a=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1/8 \\ b=3/16 \end{cases}.$$

Αρα μια μερική λύση της αρχικής δ.ε. είναι η

$$w=x\left(\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\right)e^{3x}=\frac{2x^2+3}{16}e^{3x}$$

και συνεπώς η ζητούμενη γενική λύση της αρχικής δ.ε. είναι η

$$y(x)=z(x)+w(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}+\frac{2x^2+3}{16}e^{3x}. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''+9y=\eta\mu\left(3x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(3x\right).$$

Λύση. Εχουμε μια μη ομογενή γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$\lambda^2+9=0,$$

με ρίζες

$$\lambda=\pm 3i.$$

Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι η

$$z(x)=c_1\sigma\upsilon\nu\left(3x\right)+c_2\eta\mu\left(3x\right).$$

Επίσης $r(x)=\eta\mu(3x)+\sigma\upsilon\nu(3x)$ και εφόσον $\lambda=3i$ είναι (απλή) ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης αναζητούμε μερική λύση της αρχικής δ.ε. της μορφής

$$w(x)=x\left(a\eta\mu(3x)+b\sigma\upsilon\nu(3x)\right)$$

(βλ. 2η ειδική περίπτωση). Παραγωγίζουμε τη w δυο φορές και αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε. Τότε έχουμε

$$6a\sigma\upsilon\nu(3x)-9bx\sigma\upsilon\nu(3x)-6b\eta\mu(3x)-9ax\eta\mu(3x)$$

$$+9x\left(a\eta\mu(3x)+b\sigma\upsilon\nu(3x)\right)=\eta\mu(3x)+\sigma\upsilon\nu(3x)$$

$$\Leftrightarrow 6a\sigma\upsilon\nu(3x)-6b\eta\mu(3x)=\eta\mu(3x)+\sigma\upsilon\nu(3x)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των $\eta\mu(3x)$ και $\sigma\upsilon\nu(3x)$ προκύπτει άμεσα ότι

$$a=-b=\frac{1}{6}.$$

Αρα μια μερική λύση της αρχικής δ.ε. είναι η

$$w(x)=\frac{x\left(\eta\mu(3x)-\sigma\upsilon\nu(3x)\right)}{6}$$

και η ζητούμενη γενική λύση της αρχικής δ.ε. είναι η

$$y(x)=z(x)+w(x)=c_1\sigma\upsilon\nu(3x)+c_2\eta\mu(3x)+\frac{x\left(\eta\mu(3x)-\sigma\upsilon\nu(3x)\right)}{6}. \quad \square$$

Ασκήσεις.

Επιλύστε τις ακόλουθες δ.ε.

- $y''-2y'+y=x^3-x^2+3x-1$

  Απ. $y=c_1e^x+c_2xe^x+x^3+5x^2+17x+23$

- $y'''-6y''+11y'-6y=x^4+2x^3+x^2-x+1$

Απ. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + \dfrac{-27x^4 - 252x^3 - 1089x^2 - 2562x - 2798}{162}$

- $y'' + 2y' + y = (x^2 - 1)e^x$

Απ. $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \dfrac{e^x\left(2x^2 - 4x + 1\right)}{8}$

- $y'' - 2y' + 5y = x - \cos x + e^x$

Απ. $y = c_1 e^x \sigma\upsilon\nu\left(2x\right) + c_2 e^x \eta\mu\left(2x\right) + \dfrac{2+5x}{25} + \dfrac{e^x}{4} + \dfrac{-\sigma\upsilon\nu\left(2x\right) + 4\eta\mu\left(2x\right)}{17}$

- $y''' - y'' + y' - y = e^x + 2\sigma\upsilon\nu x + x - 1$ με $y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1$

Απ. $y = \dfrac{-24e^x + 15xe^x - 30x + 20\sigma\upsilon\nu x + 55\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu\left(2x\right) - 8\eta\mu\left(2x\right)}{30}$

3.3. Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης.

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με κάποιες ειδικές μορφές δ.ε. ανώτερης τάξης. Υπενθυμίζουμε ότι η γενική μορφή μιας δ.ε. n τάξης δίνεται από τη σχέση

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0\,.$$

Α. Η απλούστερη μορφή είναι η

$$y^{(n)} = f(x)$$

η οποία επιλύεται με n διαδοχικές ολοκληρώσεις.

Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y^{(2000)} = e^x$.

Λύση. Με 2000 διαδοχικές ολοκληρώσεις παίρνουμε

$$\int y^{(2000)} dy = \int e^x dx \Rightarrow y^{(1999)} = e^x + c_1$$

$$\Rightarrow \int y^{(1999)} dy = \int \left(e^x + c_1\right) dx = e^x + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow \int y^{(1998)} dy = e^x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \Rightarrow ...$$

Ακολουθώντας την παραπάνω λογική η λύση της δ.ε. είναι

$$y = e^x + \sum_{k=1}^{2000} \frac{c_k x^{2000-k}}{(2000-k)!}. \qquad \square$$

Β. Διαφορικές εξισώσεις στις οποίες λείπει το y (και ενδεχομένως οι $y', ..., y^{(k)}$ για κάποιο $1 \le k < n$). Τέτοιες δ.ε. έχουν τη μορφή

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \le k < n).$$

Θέτουμε $y^{(\nu)} = z$ (**υποβιβασμός τάξης**), οπότε αναγόμαστε στην επίλυση μιας δ.ε. $n - \nu$ τάξης της μορφής

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-\nu)}) = 0$$

που ελπίζουμε ότι είναι ευκολότερο να λυθεί.

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$.

Λύση. Θέτουμε $y' = z$, οπότε η αρχική δ.ε. γίνεται

$$z' = \sqrt{1+z^2} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = x + c \Rightarrow z = \sinh(x+c).$$

Αρα

$$y' = z \Rightarrow y = \int \sinh(x+c) dx = \cosh(x+c) + d. \qquad \square$$

Γ. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Euler.

Ορισμός 3.8. *Οι γραμμικές δ.ε. της μορφής*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_k x^{n-k} y^{(n-k)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

όπου $a_1, a_2, ..., a_n$ *πραγματικές σταθερές,* $x > 0$ *(ή* $x < 0$*) και* f

συνεχής συνάρτηση καλούνται ***διαφορικές εξισώσεις Euler****.*

Με το μετασχηματισμό $x = e^t$ αν $x > 0$ (ή $x = -e^t$ αν $x < 0$) έχουμε

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = xy'(x) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d\left(xy'(x)\right)}{dt} = \dfrac{d\left(xy'(x)\right)}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \left(xy''(x) + y'(x)\right)x = x^2y''(x) + xy'(x) \\ \Rightarrow y''(t) - y'(t) = xy''(x) \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \ldots = \dfrac{y''' - 3y'' + 2y'}{x^3} \\ \ldots \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των παραγώγων στην αρχική δ.ε. και μετά από πράξεις προκύπτει μια γραμμική δ.ε. με σταθερούς συντελεστές την οποία και επιλύουμε.

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \ (x > 0)$.

Λύση. Θέτουμε $x = e^t$ και έχουμε

$$y'''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η γενική λύση της παραπάνω ομογενούς δ.ε. 3ης τάξης είναι η

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-2t}.$$

Εφόσον $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$ με αντικατάσταση στην παραπάνω παίρνουμε

$$y(x) = c_1x + c_2x\ln x + \frac{c_3}{x^2},\ x > 0. \qquad \square$$

Ασκήσεις Να λυθούν οι δ.ε.

- $(y'')^2 - y^2 = 0$ **Απ.** $\left(y - c_1e^x + c_2e^{-x}\right)\left(y - c_3\sigma\upsilon\nu x - c_4\eta\mu x\right) = 0$

- $y''' = e^x + \sigma\upsilon\nu x$ **Απ.** $y = e^x - \eta\mu x + c_1 \dfrac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

- $\left(1 + x^2\right) y'' + xy' + x = 0$ **Απ.** $y = -x + c_1 \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + c_2$

- $x^2 y'' - xy' + y = 0,\ \left(x > 0\right)$ **Απ.** $y = x\left(c_1 + c_2 \ln x\right)$

- $x^3 y''' + 2xy' - 2y = x^2 \ln x + 3x\ \left(x > 0\right)$

  Απ. $y = c_1 x + c_2 x \sigma\upsilon\nu\left(\ln x\right) + \dfrac{x^2\left(\ln x - 2\right)}{2} + 3x \ln x$