ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η κυματική εξίσωση.

3.1. Εισαγωγή.

Θα αναζητήσουμε το μαθηματικό νόμο που διέπει την ταλάντωση ελαστικού νήματος/χορδής για μικρές κατακόρυφες μετατοπίσεις. Υποθέτουμε ότι η χορδή έχει ομοιόμορφη πυκνότητα μάζας ρ, ομοιόμορφη τάση T σε κάθε σημείο της και σε κατάσταση πλήρους ηρεμίας καλύπτει όλη την πραγματική ευθεία.

Εστω $u = u(x,t)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση που περιγράφει την κατακόρυφη απομάκρυνση από τον οριζόντιο άξονα κάθε σημείου $x \in \mathbb{R}$ τη χρονική στιγμή t. Εστω στοιχειώδες τμήμα AB του γραφήματος της u τη χρονική στιγμή t μήκους δs και έστω $\varepsilon\varphi a$ και $\varepsilon\varphi b$ είναι οι κλίσεις στα σημεία A και B αντιστοίχως. Υπό την απουσία εξωτερικών δυνάμεων στο στοιχειώδες τμήμα AB, οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται οφείλονται στις τάσεις T_A και T_B στα άκρα A και B, οι οποίες αναπτύσσονται πάνω στις κατευθύνσεις των εφαπτομένων ευθειών της u στα σημεία A και B αντιστοίχως. Υποθέτουμε ότι έχουμε μόνον εγκάρσιες (κάθετες στον άξονα x) μετατοπίσεις, άρα αφενός όλες οι οριζόντιες συνιστώσες αλληλοαναιρούνται, δηλαδή

$$T_B \sigma\upsilon\nu b = T_A \sigma\upsilon\nu a = T = \text{σταθερό}, \qquad (1)$$

και αφετέρου για την κατακόρυφη μετατόπιση εφαρμόζουμε το 2ο Νόμο του Νεύτωνα και έχουμε:

$$\rho \delta s \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_B \eta\mu b - T_A \eta\mu a .$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με T και χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε

$$\frac{\rho}{T} \delta s \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T_B \eta\mu b}{T} - \frac{T_A \eta\mu b}{T} = \frac{T_B \eta\mu b}{T_B \sigma\upsilon\nu b} - \frac{T_A \eta\mu b}{T_A \sigma\upsilon\nu b} = \varepsilon\varphi b - \varepsilon\varphi a$$

$$= \frac{\partial u(x+\delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\delta x + \varepsilon\left(\delta^2(x)\right),$$

όπου $\varepsilon\left(\delta^2(x)\right) \to 0,\ \delta(x) \to 0$. Για πολύ μικρές κατακόρυφες μετατοπίσεις μπορούμε να θεωρήσουμε

$$\delta s = \delta x\ ,$$

συνεπώς

$$\frac{\rho}{T}\delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\delta x + \varepsilon\left(\delta(x)\right)$$

και τελικά

$$\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \varepsilon_1\left(\delta(x)\right).$$

Αφήνοντας το $\delta(x) \to 0$ παίρνουμε

$$u_{tt} = \frac{1}{c^2}u_{xx} \quad \left(c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right),$$

Αυτή είναι η **μονοδιάστατη κυματική εξίσωση**. Στον $\mathbb{R}^n$ η κυματική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$u_{tt}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{c^2}\nabla_{\mathbf{x}}^2 u(\mathbf{x},t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ .$$

Ετσι, στον $\mathbb{R}^2$ η εξίσωση αυτή περιγράφει τις κατακόρυφες ταλαντώσεις μιας μεμβράνης, στον $\mathbb{R}^3$ τη διάδοση ηχητικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων κλπ. Σημειώνουμε ότι η κυματική εξίσωση είναι μια υπερβολική εξίσωση. Με αλλαγή μεταβλητής $(\mathbf{x},\omega) = (\mathbf{x},ct),\ c > 0$ προκύπτει εύκολα η απλούστερη **ομογενής κυματική εξίσωση**

$$u_{\omega\omega}(\mathbf{x},\omega) = \nabla_{\mathbf{x}}^2 u(\mathbf{x},\omega),\ (\mathbf{x},\omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$$

την οποία θα χρησιμοποιούμε στο εξής για απλότητα. Η μη ομογενής κυματική εξίσωση ορίζεται ως εξής:

$$u_{\omega\omega}(\mathbf{x},\omega) - \nabla_{\mathbf{x}}^2 u(\mathbf{x},\omega) = f(\mathbf{x},\omega),\ (\mathbf{x},\omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ .$$

2.2. Το πρόβλημα Cauchy για τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση (στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+}$). Λύσεις D' Alembert.

Στην παράγραφο αυτή περιοριζόμαστε σε μια χωρική διάσταση. Ανατρέχοντας στην παράγραφο 1.3 του Κεφαλαίου 1 μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα τη γενική λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}$$

από τη σχέση

$$u_{o\mu}(x,t)=A(x-t)+B(x+t),$$

όπου A,B είναι αυθαίρετες δυο φορές παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Ετσι, αν $u_{\mu\varepsilon\rho}$ είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς κυματικής εξίσωσης, τότε η γενική λύση της μη ομογενούς κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t)$$

δίνεται από τη σχέση

$$u=u_{o\mu}+u_{\mu\varepsilon\rho}.$$

Εστω

$$u_{\mu\varepsilon\rho}(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\omega}^{x+t-\omega}f(y,\omega)dyd\omega=\int_0^t G(x,t,\omega)d\omega,$$

όπου

$$G(x,t,\omega)=\frac{1}{2}\int_{x-t+\omega}^{x+t-\omega}f(y,\omega)dy.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t G(t,x,\omega)d\omega\right)=G(x,t,t)+\int_0^t G_t(t,x,\omega)d\omega,$$

υπολογίζουμε

$$\frac{\partial u_{\mu\varepsilon\rho}(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\int_0^t\left[f(x+t-\omega,\omega)-f(x-t+\omega,\omega)\right]d\omega$$

και

$$\frac{\partial^2 u_{\mu\varepsilon\rho}(x,t)}{\partial t^2}=f(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[f'(x+t-\omega,\omega)+f'(x-t+\omega,\omega)\right]d\omega.$$

Απ' την άλλη μεριά:

$$\frac{\partial^2 u_{\mu\varepsilon\rho}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[f'(x+t-\omega,\omega) + f'(x-t+\omega,\omega) \right] d\omega .$$

Τελικά:

$$\frac{\partial^2 u_{\mu\varepsilon\rho}(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{\mu\varepsilon\rho}(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t),$$

συνεπώς η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{u(x,t) = A(x-t) + B(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\omega}^{x+t-\omega} f(y,\omega)\,dy\,d\omega,\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2}$$

Μελετούμε τώρα το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

όπου $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R})$ *είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις. Με άλλα λόγια μελετούμε την ταλάντωση μιας «άπειρης» χορδής, η οποία τη χρονική στιγμή* $t = 0$ *βρίσκεται στη θέση* g *και κάθε σημείο της έχει ταχύτητα* h.

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στη γενική λύση παίρνουμε

$$\begin{cases} g(x) = u(x,0) = A(x) + B(x) \\ h(x) = u_t(x,0) = -A'(x) + B'(x) \end{cases}.$$

Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη ισότητα παίρνουμε

$$\begin{cases} A(x) + B(x) = g(x) \\ -A(x) + B(x) = \int_{x_0}^{x} h(y)\,dy + C \end{cases},$$

απ' όπου προκύπτει

$$\begin{cases} A(x)=\dfrac{1}{2}\left(g(x)-\displaystyle\int_{x_0}^{x} h(y)dy-C\right) \\ B(x)=\dfrac{1}{2}\left(g(x)+\displaystyle\int_{x_0}^{x} h(y)dy+C\right) \end{cases}.$$

Ετσι προκύπτει η **γενική λύση D' Alembert**:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(A(x-t)+B(x+t)+\int_0^t\int_{x-t+\omega}^{x+t-\omega} f(y,\omega)dyd\omega\right)$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}\left(g(x-t)+g(x+t)+\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy+\int_0^t\int_{x-t+\omega}^{x+t-\omega} f(y,\omega)dyd\omega\right)}.$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική. Πράγματι, αν u,v είναι δυο διαφορετικές λύσεις του μη ομογενούς προβλήματος Cauchy, τότε η $w=u-v$ είναι λύση του προβλήματος Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}, \; x\in\mathbb{R},\; t\geq 0,$$

δηλαδή η μηδενική λύση $w=0$ όπως φαίνεται από τη λύση D' Alembert. Αρα $u=v$.

3.3. Το διδιάστατο και τρισδιάστατο πρόβλημα Cauchy για την κυματική εξίσωση.

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(\mathbf{x},t)-\nabla_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x},t)=0 \\ \quad u(\mathbf{x},0)=g(\mathbf{x}) \quad , \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t\geq 0\,, \\ \quad u_t(\mathbf{x},0)=h(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{2}$$

όπου $g\in C^2(\mathbb{R}^n), h\in C^1(\mathbb{R}^n)$ είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις. Εστω $u\in C^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+)$ είναι μια λύση του προβλήματος αυτού. Για σταθεροποιημένο $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε τους σφαιρικούς μέσους

$$U^{\mathbf{x}}(r,t)=\frac{1}{|\partial B(\mathbf{x},r)|}\int_{\partial B(\mathbf{x},r)}u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y}),$$

$$G^{\mathbf{x}}(r)=\frac{1}{|\partial B(\mathbf{x},r)|}\int_{\partial B(\mathbf{x},r)}g(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}),$$

$$H^{\mathbf{x}}(r)=\frac{1}{|\partial B(\mathbf{x},r)|}\int_{\partial B(\mathbf{x},r)}h(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}).$$

Πρόταση 3.1 (Εξίσωση Euler-Poisson-Darboux). Αν u είναι λύση της κυματικής εξίσωσης (2), τότε για σταθεροποιημένο $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{cases} U_{tt}^{\mathbf{x}}(r,t)-U_{rr}^{\mathbf{x}}(r,t)-\dfrac{n-1}{r}U_r^{\mathbf{x}}(r,t)=0,\ \ r,t>0 \\ \qquad U^{\mathbf{x}}(r,0)=G^{\mathbf{x}}(r),\ \ r>0 \\ \qquad U_t^{\mathbf{x}}(r,0)=H^{\mathbf{x}}(r),\ \ r>0 \end{cases}.$$

Απόδειξη. Από την απόδειξη της Πρότασης 1.1 του Κεφαλαίου 1 έχουμε

$$U_r^{\mathbf{x}}(r,t)=\frac{r}{n}\frac{1}{|B(\mathbf{x},r)|}\int_{B(\mathbf{x},r)}\nabla_{\mathbf{y}}^2u(\mathbf{y},t)d\mathbf{y}=\frac{1}{n|B(\mathbf{0},1)|r^{n-1}}\int_{B(\mathbf{x},r)}u_{tt}(\mathbf{y},t)d\mathbf{y}$$

$$\Rightarrow r^{n-1}U_r^{\mathbf{x}}(r,t)=\frac{1}{n\left|B(\mathbf{0},1)\right|}\int_{B(\mathbf{x},r)}u_{tt}(\mathbf{y},t)d\mathbf{y}=\frac{1}{n\left|B(\mathbf{0},1)\right|}\int_0^r\int_{\partial B(\mathbf{x},\rho)}u_{tt}(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y})d\rho$$

$$\Rightarrow\left(r^{n-1}U_r^{\mathbf{x}}(r,t)\right)_r=\frac{1}{n\left|B(\mathbf{0},1)\right|}\int_{\partial B(\mathbf{x},r)}u_{tt}(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y})$$

$$\Rightarrow(n-1)r^{n-2}U_r^{\mathbf{x}}(r,t)+r^{n-1}U_{rr}^{\mathbf{x}}(r,t)=\frac{r^{n-1}}{\left|\partial B(\mathbf{x},r)\right|}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_{\partial B(\mathbf{x},r)}u(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y})\right)$$

$$\Rightarrow(n-1)r^{n-2}U_r^{\mathbf{x}}(r,t)+r^{n-1}U_{rr}^{\mathbf{x}}(r,t)=r^{n-1}U_{tt}^{\mathbf{x}}(r,t)$$

$$\Rightarrow U_{tt}^{\mathbf{x}}(r,t)-U_{rr}^{\mathbf{x}}(r,t)-\frac{n-1}{r}U_r^{\mathbf{x}}(r,t)=0.$$ □

Περιοριζόμαστε τώρα στην επίλυση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης στον $\mathbb{R}^3$. Για $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ και $U^{\mathbf{x}}(r,t)$, $G^{\mathbf{x}}(r)$, $H^{\mathbf{x}}(r)$ όπως παραπάνω ορίζουμε

$$\begin{aligned}U^{\mathbf{x}}(r,t)&=rU^{\mathbf{x}}(r,t)\\G^{\mathbf{x}}(r)&=rG^{\mathbf{x}}(r)\\H^{\mathbf{x}}(r)&=rH^{\mathbf{x}}(r)\end{aligned}.$$

Τότε η $U^{\mathbf{x}}(r,t)$ λύνει το μονοδιάστατο πρόβλημα Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases}U_{tt}^{\mathbf{x}}(r,t)-U_{rr}^{\mathbf{x}}(r,t)=0,\ r,t>0\\U^{\mathbf{x}}(r,0)=G^{\mathbf{x}}(r),\ r>0\\U_t^{\mathbf{x}}(r,0)=H^{\mathbf{x}}(r),\ r>0\\U^{\mathbf{x}}(0,t)=0,\ t\geq 0\end{cases}.$$

Πράγματι:

$$U_{tt}^{\mathbf{x}}(r,t)=rU_{tt}^{\mathbf{x}}(r,t)=r\left(U_{rr}^{\mathbf{x}}(r,t)+\frac{2}{r}U_r^{\mathbf{x}}(r,t)\right)$$

$$=rU_{rr}^{\mathbf{x}}(r,t)+2U_r^{\mathbf{x}}(r,t)=\left(rU_r^{\mathbf{x}}+U^{\mathbf{x}}\right)_r(r,t)$$

$$=\left(rU^{\mathbf{x}}\right)_{rr}(r,t)=U_{rr}^{\mathbf{x}}(r,t).$$

Επιπλέον:

$$U^{\mathbf{x}}(r,0)=rU^{\mathbf{x}}(r,0)=rG^{\mathbf{x}}(r)=G^{\mathbf{x}}(r),$$

ομοίως και τα υπόλοιπα. Εφόσον η $U^{\mathbf{x}}(r,t)$ λύνει τη μονοδιάστατη ομογενή κυματική εξίσωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα D' Alembert

$$U^{\mathbf{x}}(r,t)=\frac{1}{2}\left(G^{\mathbf{x}}(r-t)+G^{\mathbf{x}}(r+t)+\int_{t-r}^{t+r}H^{\mathbf{x}}(y)dy\right).$$

Ετσι:

$$u(x,t)=\lim_{r\to 0^+}U^{\mathbf{x}}(r,t)=\lim_{r\to 0^+}\frac{U^{\mathbf{x}}(r,t)}{r}$$

$$=\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{2r}\left(G^{\mathbf{x}}(r-t)+G^{\mathbf{x}}(r+t)+\int_{t-r}^{t+r}H^{\mathbf{x}}(y)dy\right)$$

$$=\frac{dG^{\mathbf{x}}(t)}{dt}+H^{\mathbf{x}}(t)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\left|\partial B(\mathbf{x},t)\right|}\int_{\partial B(\mathbf{x},t)}g(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})\right)+\frac{t}{\left|\partial B(\mathbf{x},t)\right|}\int_{\partial B(\mathbf{x},t)}h(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}).$$

Αν η g είναι λεία, τότε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\left|\partial B(\mathbf{x},t)\right|}\int_{\partial B(\mathbf{x},t)}g(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})\right)=\frac{1}{\left|\partial B(\mathbf{x},t)\right|}\int_{\partial B(\mathbf{x},t)}g(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})$$

$$+t\left(\frac{1}{\left|\partial B(\mathbf{x},t)\right|}\int_{\partial B(\mathbf{x},t)}g(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})\right)_t$$

$$=\frac{1}{\left|\partial B(\mathbf{x},t)\right|}\int_{\partial B(\mathbf{x},t)}g(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})+\frac{t}{\left|\partial B(\mathbf{x},t)\right|}\int_{\partial B(\mathbf{x},t)}\nabla g(\mathbf{y})\bullet(\mathbf{y}-\mathbf{x})dS(\mathbf{y})$$

$$=\frac{1}{\left|\partial B(\mathbf{x},t)\right|}\left(\int_{\partial B(\mathbf{x},t)}g(\mathbf{y})+\nabla g(\mathbf{y})\bullet(\mathbf{y}-\mathbf{x})dS(\mathbf{y})\right),$$

άρα:

$$u(x,t)=\frac{1}{\left|\partial B(\mathbf{x},t)\right|}\left(\int_{\partial B(\mathbf{x},t)} g(\mathbf{y})+\nabla g(\mathbf{y})\bullet(\mathbf{y}-\mathbf{x})+t\cdot h(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})\right)$$

Τελικά:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{4\pi t^2}\left(\int_{\partial B(\mathbf{x},t)} g(\mathbf{y})+\nabla g(\mathbf{y})\bullet(\mathbf{y}-\mathbf{x})+t\cdot h(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})\right).}$$

Αυτή είναι η **φόρμουλα Kirchoff** για την επίλυση του προβλήματος Cauchy της ομογενούς κυματικής εξίσωσης στον $\mathbb{R}^3$. Οσον αφορά την επίλυση του αναλόγου προβλήματος στον $\mathbb{R}^2$, χρησιμοποιούμε τη **μέθοδο υποβιβασμού** και υπολογίζουμε λύση στο $\mathbb{R}^2$ αναγόμενοι στη φόρμουλα Kirchoff που υπολογίσαμε παραπάνω. Εστω $u\in C^2\left(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+\right)$ είναι λύση του προβλήματος Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(\mathbf{x},t)-\nabla_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x},t)=0 \\ \quad u(\mathbf{x},0)=g(\mathbf{x}) \\ \quad u_t(\mathbf{x},0)=h(\mathbf{x}) \end{cases},\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,\ t\geq 0\,,$$

όπου $g\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right),\ h\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} &u(x,y,z,t)=u(x,y,t) \\ &u(x,y,z,0)=g(x,y,z)=g(x,y)\,. \\ &u_t(x,y,z,0)=h(x,y,z)=h(x,y) \end{aligned}$$

Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η u αποτελεί λύση της τρισδιάστατης κυματικής εξίσωσης. Εχουμε λοιπόν από τη φόρμουλα Kirchoff:

$$u(x,y,0,t)=\frac{1}{\left|\partial B(\bar{\mathbf{x}},t)\right|}\left(\int_{\partial B(\bar{\mathbf{x}},t)} g(\mathbf{y})+\nabla g(\mathbf{y})\bullet(\mathbf{y}-\mathbf{x})+t\cdot h(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})\right),$$

όπου $\bar{\mathbf{x}}=(\mathbf{x},0)=(x,y,0)$. Αν $\mathbf{y}\in B(\bar{\mathbf{x}},t)$, όπου $\mathbf{y}=(\mathbf{y},y_3)$ με $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$, τότε

$$\left|\mathbf{y}-\bar{\mathbf{x}}\right| = t \Leftrightarrow y_3^2 = t^2 - \left|\mathbf{y}-\mathbf{x}\right|^2 .$$

Ετσι

$$\mathbf{y} = \left(y_1, y_2, \pm\gamma\left(y_1, y_2\right)\right),$$

όπου

$$\gamma\left(\mathbf{y}\right) = \sqrt{t^2 - \left|\mathbf{y}-\mathbf{x}\right|^2},\ \nabla\gamma\left(\mathbf{y}\right) = -\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\sqrt{t^2 - \left|\mathbf{y}-\mathbf{x}\right|^2}}$$

και με αλλαγή μεταβλητής παίρνουμε

$$\frac{1}{\left|\partial B\left(\bar{\mathbf{x}},t\right)\right|}\int_{\partial B\left(\bar{\mathbf{x}},t\right)} g\left(\mathbf{y}\right) dS\left(\mathbf{y}\right) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{B\left(\mathbf{x},t\right)} g\left(\mathbf{y}\right)\sqrt{1+\left|\nabla\gamma\left(\mathbf{y}\right)\right|^2}\, d\mathbf{y},$$

με

$$\sqrt{1+\left|\nabla\gamma\left(\mathbf{y}\right)\right|^2} = \left(\frac{t^2}{t^2 - \left|\mathbf{y}-\mathbf{x}\right|^2}\right)^{1/2}.$$

Τελικά:

$$\boxed{u\left(x,t\right) = \frac{1}{2\pi t^2}\left(\int_{B\left(\mathbf{x},t\right)} \frac{t\cdot g\left(\mathbf{y}\right) + t\cdot\nabla g\left(\mathbf{y}\right)\bullet\left(\mathbf{y}-\mathbf{x}\right) + t^2\cdot h\left(\mathbf{y}\right)}{\sqrt{t^2 - \left|\mathbf{y}-\mathbf{x}\right|^2}}\, d\mathbf{y}\right),}$$

είναι η λύση του προβλήματος Cauchy στο $\mathbb{R}^2$.

3.4. Ομογενείς εξισώσεις.

Στο εξής μελετούμε αποκλειστικά τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση.

3.4.1. Φραγμένα χωρία με ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Θα επιλύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t),\ 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x), 0 \leq x \leq L \\ u_t(x,0) = h(x),\ 0 \leq x \leq L \end{cases},$$

όπου $g \in C^3[0,L], h \in C^2[0,L]$ *είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις (με* $g(0) = g(L) = 0$ *και* $h(0) = h(L) = 0$*).*

Εφόσον έχουμε ομογενή ΜΔΕ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών. Αναζητούμε μη μηδενική λύση της μορφής:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Από τις ομογενείς συνθήκες Dirichlet έχουμε

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{X(0) = X(L) = 0}, \qquad (3)$$

αλλιώς $T(t) = 0\ \forall t > 0$, άρα η λύση μας u είναι η μηδενική. Οσον αφορά τις αρχικές συνθήκες, έχουμε

$$\begin{cases} u(x,0) = g(x) \Rightarrow X(x)T(0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \Rightarrow X(x)T'(0) = h(x) \end{cases}. \qquad (4)$$

Εφαρμόζουμε τη συγκεκριμένη μορφή της λύσης στην ομογενή κυματική εξίσωση και παίρνουμε:

$$u_{tt}=u_{xx}\Rightarrow X(x)T''(t)=X''(x)T(t)\overset{X(x)T(t)\neq 0}{\Longrightarrow}\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα για κάθε (x,t) θα πρέπει

$$\boxed{\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=\lambda} \tag{5}$$

για κάποια πραγματική σταθερά $\lambda\in\mathbb{R}$ κι έτσι το πρόβλημά μας ανάγεται στην επίλυση δυο συνήθων ομογενών ΔΕ 2ης τάξης

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ T''(t)-\lambda T(t)=0 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R},$$

μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (3) και (4). Ασχολούμαστε αρχικά με το ακόλουθο **πρόβλημα ιδιοτιμών** με ομογενείς αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(L)=0 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) $\boxed{\lambda=0}$. Τότε:

$$X(x)=Ax+B,\ A,B\in\mathbb{R}.$$

Από τις αρχικές συνθήκες $X(0)=X(L)=0$ προκύπτει άμεσα η λύση $X\equiv 0$, άρα και η τετριμμένη λύση $u=0$, άτοπο.

β) $\boxed{\lambda>0}$. Τότε:

$$X(x)=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x},\ A,B\in\mathbb{R}.$$

Πάλι με χρήση των αρχικών συνθηκών $X(0)=X(L)=0$ προκύπτει άμεσα η λύση $X\equiv 0$, άρα και η τετριμμένη λύση $u=0$, άτοπο.

γ) $\boxed{\lambda<0}$. Τότε:

$$X''(x)-\lambda X(x)=0\Rightarrow X(x)=A\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+B\eta\mu\left(\sqrt{-\lambda}x\right),\ A,B\in\mathbb{R}.$$

Με χρήση των αρχικών συνθηκών $X(0)=X(L)=0$ προκύπτει

$$\begin{cases} A=0 \\ 0=B\eta\mu\left(\sqrt{-\lambda}L\right) \end{cases} \overset{B\neq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} A=0 \\ \eta\mu\left(\sqrt{-\lambda}L\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ \sqrt{-\lambda}L=k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ -\lambda=\left(\dfrac{k\pi}{L}\right)^2, \ k=1,2,..., \end{cases}$$

όπου θεωρήσαμε $B\neq 0$ και $\lambda\neq 0$, διότι για $B=0$ ή $\lambda=0$ πάλι θα παίρναμε $X\equiv 0$, άρα και την τετριμμένη λύση $u=0$. Ετσι, για $\lambda<0$ προκύπτουν οι λύσεις

$$X_k(x)=B_k\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \ B_k\in\mathbb{R}, \ k=1,2,...$$

Τελικά, μη τετριμμένες λύσεις X παίρνουμε μόνον για τις **ιδιοτιμές** $-\lambda_k=\left(\dfrac{k\pi}{L}\right)^2$, $k=1,2,...,$ με **ιδιοσυναρτήσεις** $\eta\mu\left(\dfrac{k\pi x}{L}\right)$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές του λ στην (5) παίρνουμε

$$T''(t)-\lambda_k T(t)=0, \ \lambda_k=-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \ k=1,2,...$$

με λύσεις

$$T_k(t)=C_k\sigma\upsilon\nu\left(\frac{k\pi t}{L}\right)+D_k\eta\mu\left(\frac{k\pi t}{L}\right), \ C_k,D_k\in\mathbb{R}, \ k=1,2,....$$

Ετσι:

$$u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)=B_k\eta\mu\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\left(C_k\sigma\upsilon\nu\left(\frac{k\pi t}{L}\right)+D_k\eta\mu\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right)$$

$$=\eta\mu\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\left(C'_k\sigma\upsilon\nu\left(\frac{k\pi t}{L}\right)+D'_k\eta\mu\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right), \ \left(C'_k=B_kC_k, \ D'_k=B_kD_k\right)$$

είναι λύσεις που ικανοποιούν τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Από την αρχή της υπέρθεσης και η

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(C_k'\sigma\upsilon\nu\left(\frac{k\pi t}{L}\right)+D_k'\eta\mu\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right)\eta\mu\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right] \tag{6}$$

αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά είναι καλά ορισμένη. Μένει να ελέγξουμε τις συνθήκες (3) και (4):

$$\begin{cases} X(x)T(0)=g(x)\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}C_k'\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)=g(x) \\ X(x)T'(0)=h(x)\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}D_k'\frac{k\pi}{L}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)=h(x) \end{cases}. \tag{7}$$

Οι σειρές (7) θυμίζουν σειρές Fourier ημιτόνων των συναρτήσεων g και h. Θεωρούμε τις περιττές επεκτάσεις των g,h στο διάστημα $[-L,0]$ και στη συνέχεια τις επεκτείνουμε περιοδικά πάνω στην πραγματική ευθεία. Τότε υπάρχουν μοναδικές ακολουθίες συντελεστών

$$\begin{cases} C_k':=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}g(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)dy=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}g(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)dy \\ \frac{k\pi}{L}D_k':=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}h(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)dy=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}h(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)dy \end{cases}$$

τέτοια ώστε η (6) να συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στη u. Τελικά παίρνουμε τη μοναδική λύση:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_{0}^{L}g(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)dy\right)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k\pi}\int_{0}^{L}h(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)dy\right)\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Οι συνθήκες $g\in C^3[0,L],h\in C^2[0,L]$ διασφαλίζουν ότι η παραπάνω σειρά παραγωγίζεται όρο προς όρο δυο φορές και ως προς x και ως προς t.

3.4.2. Φραγμένα χωρία με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Θα επιλύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy – Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < L \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le L,\ \ a,b \in \mathbb{R}. \\ u(0,t) = a,\ u(L,t) = b,\ t \ge 0 \end{cases}$$

Η διαφορά με το προηγούμενο παράδειγμα είναι ότι οι συνοριακές συνθήκες είναι πλέον μη ομογενείς. Θα αναγάγουμε το πρόβλημα σε ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Εστω

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

είναι λύση του προβλήματός μας, όπου $v = v(x)$ έτσι ώστε

$$v(0) = a,\ v(L) = b.$$

Εστω

$$v(x) = a + \frac{x}{L}(b-a).$$

Τότε το πρόβλημά μας μετασχηματίζεται στο ακόλουθο:

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t) \\ w(0,t) = 0,\ w(L,t) = 0 \\ w(x,0) = g(x) - v(x),\ w_t(x,0) = h(x) \end{cases},$$

με $g(0) = v(a),\ g(L) = v(L),\ g'(0) = g'(L) = 0$. Ετσι από τα παραπάνω

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L \big(g(y) - v(y)\big)\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)dy\right)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k\pi}\int_0^L h(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)dy\right)\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

3.4.3. Μη φραγμένα χωρία.

Θα αναζητήσουμε λύση του ακόλουθου προβλήματος Cauchy – Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ t > 0,\ x > 0 \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x),\ x \geq 0, \\ u(0,t) = 0\ ,\ t \geq 0 \end{cases}$$

όπου $g \in C^2[0,+\infty),\ h \in C^1[0,+\infty)$ *(με* $g(0) = 0$ *και* $h(0) = 0$*).*

Εστω

$$\Omega_1 = \{(x,t):\ t > x\} \text{ και } \Omega_2 = \{(x,t):\ t < x\}.$$

Για κάθε σημείο $(x,y) \in \Omega_2$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο D' Alembert απ' ευθείας και έχουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-t) + g(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy\right),\ \forall (x,t) \in \Omega_2. \qquad (8)$$

Αυτό δε μπορούμε να το κάνουμε στο χωρίο Ω_1 διότι δεν έχουμε επαρκείς συνθήκες. Εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε g,h να είναι περιττές επεκτάσεις των συναρτήσεων f,g πάνω στην πραγματική ευθεία. Δηλαδή:

$$g(x) = \begin{cases} g(x),\ x \geq 0 \\ -g(-x),\ x \leq 0 \end{cases},\ h(x) = \begin{cases} h(x),\ x \geq 0 \\ -h(-x),\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Τότε η

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-t) + g(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy\right)$$

ορίζεται για κάθε $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) αποτελεί λύση του προβλήματος Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

(β) Στο χωρίο Ω_2 ταυτίζεται με τη λύση (8).

(γ) Ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη, διότι

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left(g(-t) + g(t) + \int_{-t}^{t} h(y)dy\right) = 0,$$

εφόσον οι g, h είναι περιττές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

(δ) Για κάθε $(x,y) \in \Omega_1$ έχουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-t) + g(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-g(t-x) + g(x+t) + \int_{t-x}^{t+x} h(y)dy\right).$$

Τελικά:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x-t) + g(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy\right),\ \forall (x,t) \in \Omega_2 \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x) + \int_{t-x}^{t+x} h(y)dy\right),\ \forall (x,t) \in \Omega_1 \end{cases}. \qquad (9)$$

Θα αναζητήσουμε τώρα λύση του προβλήματος Cauchy – Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ t > 0,\ x > 0 \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x),\ x \geq 0, \\ u(0,t) = \mu(t)\ ,\ t \geq 0 \end{cases}$$

όπου $g \in C^2[0,+\infty),\ h \in C^1[0,+\infty),\ \mu \in C^2[0,+\infty)$ *(και εμμέσως* $\mu(0) = g(0),\ \mu'(0) = h(0),\ \mu''(0) = g''(0)$*).*

Ψάχνουμε λύση

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

όπου

$$v(x,t) = \mu(0) + \mu'(0)(t-x) + \frac{\mu''(0)}{2}(t-x)^2$$

και η w είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx},\ t>0,\ x>0 \\ w(x,0) = g_1(x),\ w_t(x,0) = h_1(x),\ x \ge 0. \\ w(0,t) = \mu_1(t)\ ,\ t \ge 0 \end{cases}$$

όπου

$$\begin{cases} g_1(x) = g(x) - v(x,0) \\ h_1(x) = h(x) - v_t(x,0) \\ \mu_1(t) = \mu(t) - v(0,t) \end{cases}$$

και εμμέσως $\mu_1(0) = g_1(0) = 0,\ \mu_1'(0) = h_1(0) = 0,\ \mu_1''(0) = g_1''(0) = 0$. Αναλύουμε περεταίρω την w ως

$$w(x,t) = w_1(x,t) + w_2(x,t),$$

έτσι ώστε

$$\begin{cases} w_{1,tt} = w_{1,xx},\ t>0,\ x>0 \\ w_1(x,0) = g_1(x),\ w_{1,t}(x,0) = h_1(x),\ x \ge 0 \\ w_1(0,t) = 0\ ,\ t \ge 0 \end{cases} \qquad \textbf{(A)}$$

και

$$\begin{cases} w_{2,tt} = w_{2,xx},\ t>0,\ x>0 \\ w_2(x,0) = 0,\ w_{2,t}(x,0) = 0,\ x \ge 0. \\ w_2(0,t) = \mu_1(t)\ ,\ t \ge 0 \end{cases} \qquad \textbf{(B)}$$

Τότε η

$$u(x,t) = v(x,t) + w_1(x,t) + w_2(x,t)$$

είναι λύση του αρχικού μας προβλήματος. Μένει να υπολογίσουμε τις w_1, w_2. Αλλά το πρόβλημα (A) είναι όμοιο με αυτό που λύσαμε παραπάνω, οπότε η λύση του έχει τη μορφή (9)

$$w_1(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g_1(x-t) + g_1(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} h_1(y)dy \right),\ \forall (x,t) \in \Omega_2 \\ \frac{1}{2}\left(g_1(x+t) - g_1(t-x) + \int_{t-x}^{t+x} h_1(y)dy \right),\ \forall (x,t) \in \Omega_1 \end{cases}.$$

Οσον αφορά το πρόβλημα (B), ας ορίσουμε

$$\mu_1^+(t)=\begin{cases}\mu_1(t),\ t\ge 0\\ 0,\ t\le 0\end{cases},\ \mu_1^-(t)=\begin{cases}\mu_1(t),\ t\le 0\\ 0,\ t\ge 0\end{cases}$$

και

$$w_2(x,t)=\mu_1^+(t-x)+\mu_1^-(t+x).$$

Τότε η w_2 είναι λύση του προβλήματος (B) και συνεπώς η λύση του αρχικού μας προβλήματος είναι

$$u(x,t)=\mu(0)+\mu'(0)(t-x)+\frac{\mu''(0)}{2}(t-x)^2+\mu_1^+(t-x)+\mu_1^-(t+x).$$

$$+\begin{cases}\frac{1}{2}\left(g_1(x-t)+g_1(x+t)+\int_{x-t}^{x+t}h_1(y)dy\right),\ \forall(x,t)\in\Omega_2\\ \frac{1}{2}\left(g_1(x+t)-g_1(t-x)+\int_{t-x}^{t+x}h_1(y)dy\right),\ \forall(x,t)\in\Omega_1\end{cases}.$$

Τέλος, ας μελετήσουμε πάλι το πρόβλημα Cauchy:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}\\ u(x,0)=g(x),u_t(x,0)=h(x)\end{cases},\ t>0,\ x\in\mathbb{R},$$

όπου g,h είναι συνεχείς και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Fourier ως εξής: Προς στιγμήν σταθεροποιούμε τυχαίο $t>0$ και παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier της u ως προς x:

$$u(\xi,t)=\int_{\mathbb{R}}u(x,t)e^{-2\pi i\xi x}dx.$$

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (βλέπε Κεφ. 0) έχουμε:

$$u_{tt}-u_{xx}=0\Rightarrow u_{tt}(\gamma,t)-u_{xx}(\gamma,t)=0\Rightarrow\frac{d^2}{dt^2}u(\gamma,t)-(2\pi i\gamma)^2u(\gamma,t)=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(\gamma,t)+4\pi^2\gamma^2u(\gamma,t)=0.$$

Για σταθεροποιημένο γ, η παραπάνω είναι μια γραμμική δ.ε. 2ης τάξης ως προς t, με γενική λύση

$$u(\gamma,t)=A(\gamma)\cos\left(2\pi|\gamma|t\right)+B(\gamma)\sin\left(2\pi|\gamma|t\right),$$

όπου $A(\gamma),B(\gamma)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις. Λόγω των αρχικών συνθηκών έχουμε

$$u(\gamma,0)=g(\gamma),\ \frac{\partial}{\partial t}u(\gamma,0)=h(\gamma),$$

οπότε προκύπτει

$$A(\gamma)=g(\gamma),\ B(\gamma)=\frac{g(\gamma)}{2\pi|\gamma|}.$$

Τελικά

$$u(\gamma,t)=g(\gamma,t)\cos\left(2\pi|\gamma|t\right)+\frac{h(\gamma)}{2\pi|\gamma|}\sin\left(2\pi|\gamma|t\right).$$

Παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ως προς γ (αν αυτό είναι εφικτό, π.χ. αν οι $g(\gamma,t),h(\gamma,t)$ είναι ολοκληρώσιμες ως προς γ στην πραγματική ευθεία), τότε έχουμε

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\left(g(\gamma,t)\cos\left(2\pi|\gamma|t\right)+\frac{h(\gamma)}{2\pi|\gamma|}\sin\left(2\pi|\gamma|t\right)\right)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma\ .$$

Γίνεται αντιληπτό ότι η μέθοδος αυτή παρουσιάζει δυσκολίες όσον αφορά την αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier.

3.5 Μη ομογενείς εξισώσεις.

Θα αναζητήσουμε λύση στο ακόλουθο μη ομογενές πρόβλημα Cauchy – Dirichlet με μη ομογενείς αρχικές και συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t),\ t>0,\ 0<x<a \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x)\ \ 0 \le x \le a. \\ u(0,t) = A(t),\ u(a,t) = B(t)\ ,\ t \ge 0 \end{cases}$$

Προσαπαθούμε να ανάγουμε το πρόβλημά μας σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Αναζητούμε λύση της μορφής

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

έτσι ώστε

$$v(0,t) = A(t) \text{ και } v(a,t) = B(t).$$

Εστω

$$v(x,t) = A(t) + \frac{x}{a}\left(B(t) - A(t)\right).$$

Τότε το πρόβλημά μας ανάγεται στο ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = f_1(x,t),\ t>0,\ 0<x<a \\ w(x,0) = g_1(x), w_t(x,0) = h_1(x),\ 0 \le x \le a\ , \\ w(0,t) = 0,\ w(a,t) = 0\ ,\ t \ge 0 \end{cases}$$

όπου

$$\begin{cases} f_1(x,t) = f(x,t) - v_{tt}(x,t) \\ g_1(x) = g(x) - v(x,0) \\ h_1(x) = h(x) - v_t(x,0) \end{cases}$$

και $g_1(0) = g_1(a) = 0,\ h_1(0) = h_1(a) = 0$. Εμπνεόμενοι από το ανάλογο ομογενές πρόβλημα της παραγράφου 3.4.1, υποθέτουμε ότι η λύση w είναι της μορφής

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\eta\mu\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι η (γνωστή) συνάρτηση f_1 αναπτύσσεται σε σειρά ημιτόνων ως προς x

$$f_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{1,n}(t)\eta\mu\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε την περιττή επέκταση της f ως προς x στο διάστημα $(-a,0)$ και αν η f_1 είναι ολοκληρώσιμη, τότε υπολογίζουμε τη μοναδική ακολουθία συντελεστών $f_{1,n}$ από τη σχέση

$$f_{1,n}(t)=\frac{2}{a}\int_0^a f(y,t)\eta\mu\left(\frac{n\pi y}{a}\right)dy\,.$$

Με την επιπλέον υπόθεση ότι οι παράγωγοι της u μέχρι 2ης τάξης προκύπτουν από όρο προς όρο παραγώγιση της παραπάνω σειράς έχουμε:

$$w_{tt}=w_{xx}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(w_n''(t)+\frac{n^2\pi^2}{a^2}w_n(t)-f_{1,n}(t)\right)\eta\mu\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow w_n''(t)+\frac{n^2\pi^2}{a^2}w_n(t)-f_{1,n}(t)=0.$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών έχουμε:

$$\begin{cases} w(x,0)=g_1(x)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}w_n(0)\eta\mu\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=g_1(x) \\ w_t(x,0)=h_1(x)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}w_n'(0)\eta\mu\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=h_1(x)\end{cases}.$$

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των σειρών Fourier παίρνουμε

$$\begin{cases} a_n:=w_n(0)=\frac{2}{a}\int_0^a g_1(y)\eta\mu\left(\frac{n\pi y}{a}\right)dy \\ b_n:=w_n'(0)=\frac{2}{a}\int_0^a h_1(y)\eta\mu\left(\frac{n\pi y}{a}\right)dy\end{cases}.$$

Προκύπτει λοιπόν το πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} w_n''(t) + w_n(t) n^2\pi^2 / a^2 - f_{1,n}(t) = 0 \\ w_n(0) = a_n = \text{γνωστό} \\ w_n'(0) = b_n = \text{γνωστό} \end{cases}$$

το οποίο έχει μοναδική λύση για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ως προς w_n. Ετσι

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \eta\mu\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Τελικά:

$$u(x,t) = A(t) + \frac{x}{a}\big(B(t) - A(t)\big) + w(x,t).$$

3.6. Ασκήσεις.

1. Επιλύστε το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \\ u(x,0) = \eta\mu x \quad , \ x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0 \\ u_t(x,0) = x \end{cases}.$$

2. Επιλύστε το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 1 \\ u(x,0) = \eta\mu(2x) \quad , \ x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}.$$

3. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy – Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(x,0) = \eta\mu x, \ u_t(x,0) = \eta\mu(2x), \ 0 \leq x \leq \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0, \ t \geq 0 \end{cases}.$$

4. Επιλύστε την κυματική εξίσωση $u_{tt} = u_{xx}$ με αρχικές/συνοριακές συνθήκες της μορφής:

$$\begin{cases} u(0,t)=u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=\eta\mu(2x) \ , \ (0<x<\pi,\ t>0). \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

5. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy – Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx},\ x>0,\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=x^4,\ u_t(x,0)=\eta\mu x,\ x\geq 0,\ . \\ u(0,t)=t^3,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

6. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy – Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=1,\ 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0\leq x\leq\pi,\ t>0. \\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\ t\geq 0 \end{cases}$$

7. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy – Neumann:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(x,0)=\sigma\upsilon\nu x,\ u_t(x,0)=\sigma\upsilon\nu(2x),\ 0\leq x\leq\pi,\ t>0. \\ u_x(0,t)=0,\ u_x(\pi,t)=0,\ t\geq 0 \end{cases}$$

8. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy – Neumann:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\sigma\upsilon\nu x,\ 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0\leq x\leq\pi,\ t>0. \\ u_x(0,t)=0,\ u_x(\pi,t)=0,\ t\geq 0 \end{cases}$$