Νικόλαος Δ. Ατρέας

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη: 2016-2017

2η έκδοση: 2018-2019

Περιεχόμενα

Α. Ορολογία. 4

Β. Χρήσιμα στοιχεία θεωρίας. 6
Β1. Πολλαπλά ολοκληρώματα Riemann. 6
Β2. Μη γνήσια ολοκληρώματα Riemann σε μη φραγμένα χωρία. 10
Β3. Θεώρημα Απόκλισης. Ταυτότητες Green. 10
Β4. Σύντομη ανασκόπηση σειρών Fourier. 12
Β5. Το ολοκλήρωμα Fourier. 17
Β6. Ο Μετασχηματισμός Laplace. 20
Β7. Η μέθοδος των δυναμοσειρών. Διαφορικές εξισώσεις Bessel. 25

Κεφάλαιο 0: Εισαγωγή. 35

0.1. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης. 35
0.2. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις 2ης τάξης και ταξινόμησή τους. 46
0.3. Ασκήσεις. 48

Κεφάλαιο 1: Η εξίσωση Laplace. 51

1.1. Εισαγωγή. 51
1.2. Αρμονικές συναρτήσεις. 52
1.3. Διδιάστατη γενική λύση της εξίσωσης Laplace. 57
1.4. Θεμελιώδης εξίσωση Laplace στον $\mathbb{R}^n$. Εξίσωση Poisson στον $\mathbb{R}^n$. 61
1.5. Συνοριακές συνθήκες Dirichlet και μοναδικότητα λύσης. 67
1.6. Η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών σε προβλήματα Dirichlet. 69
1.6.1. Το πρόβλημα Dirichlet σε ορθογώνιο. 70
1.6.1.1. Το πρόβλημα Poisson σε ορθογώνιο. 74
1.6.2. Το πρόβλημα Dirichlet στο μοναδιαίο δίσκο. 77
1.7. Μη φραγμένα χωρία σε προβλήματα Dirichlet. 84
1.7.1 Το πρόβλημα Dirichlet. στο άνω ημιεπίπεδο. 84
1.7.2. Το πρόβλημα Dirichlet σε ημιάπειρη λωρίδα. 87
1.8. Συναρτήσεις Green. 91
1.9. Ασκήσεις. 97

Κεφάλαιο 2: Η εξίσωση θερμότητας. 104

2.1. Εισαγωγή. 104
2.2. Το πρόβλημα Cauchy στο μοναδιαίο κύκλο. 106
2.3. Το πρόβλημα Cauchy στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Θεμελιώδης λύση. 110
2.4. Μοναδικότητα λύσης. 114
2.5. Ομογενείς εξισώσεις. 117
2.5.1. Φραγμένα χωρία με ομογενείς αρχικές συνθήκες. 117
2.5.2. Φραγμένα χωρία με μη ομογενείς αρχικές συνθήκες. 121
2.5.3. Μη φραγμένα χωρία με ομογενείς αρχικές συνθήκες. 124
2.6. Μη ομογενείς εξισώσεις. 126
2.7. Ασκήσεις. 129

Κεφάλαιο 3: Η κυματική εξίσωση. 130

3.1. Εισαγωγή. 130
3.2. Το πρόβλημα Cauchy για τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση (στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$). Λύσεις D' Alembert. 141
3.3. Το διδιάστατο και τρισδιάστατο πρόβλημα Cauchy για την κυματική εξίσωση. 137
3.4. Ομογενείς εξισώσεις. 142
3.4.1. Φραγμένα χωρία με ομογενείς συνοριακές συνθήκες. 142
3.4.2. Φραγμένα χωρία με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες. 147
3.4.3. Μη φραγμένα χωρία. 147
3.5. Μη ομογενείς εξισώσεις. 152
3.6. Ασκήσεις. 154

Α. Ορολογία

Εστω $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Τότε:

- $C(\Omega)$: Είναι ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων f στο Ω.

- $C^n(\Omega)$ n=1,2,…: Είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων f με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι n-τάξης στο Ω.

- $C_c^n(\Omega)$: Είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων f με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι n-τάξης σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

- $B(\mathbf{x},r)$: Ανοικτή μπάλα κέντρου $\mathbf{x}$ και ακτίνας r στον $\mathbb{R}^n$.

- $|B(\mathbf{x},r)|$: Ο όγκος της μπάλας $B(\mathbf{x},r)$.

- $\partial\Omega$: Το σύνορο χωρίου Ω.

- $\mathbf{S}^{n-1}(r)$: Η $(n-1)-$σφαίρα $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\ |\mathbf{x}|=r\}$ στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r.

- $\mathbf{S}^{n-1}$: Η μοναδιαία $(n-1)-$σφαίρα $\mathbf{S}^{n-1}(1)$.

- w_{n-1}: Το εμβαδό της μοναδιαίας $(n-1)-$σφαίρας $\mathbf{S}^{n-1}$.

- $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$: Ο τελεστής κλίσης που δρα πάνω σε βαθμωτά ή διανυσματικά πεδία του $\mathbb{R}^n$. Με άλλα λόγια, αν $V_n(E)$ είναι ο χώρος των διαφορίσιμων αριθμητικών πεδίων $f:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{V}_{n,m}(E)$ είναι ο χώρος των διαφορίσιμων διανυσματικών συναρτήσεων $\mathbf{F}:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ (για $n=m$ γράφουμε απλά $\boldsymbol{V}_n(E)$ και μιλάμε για το χώρο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων), τότε:

$$\nabla : V_n(E) \to \boldsymbol{V}_n(E):\ \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) := \left(f_{x_1}, ..., f_{x_n} \right),$$

ή

$$\nabla : \boldsymbol{V}_n(E) \to \boldsymbol{V}_{n,\, n^2}(E):\ \nabla \mathbf{F} = \left(\mathbf{F}_{x_1}, ..., \mathbf{F}_{x_n} \right).$$

- ∇^2 (ή Δ): Ο τελεστής Laplace

$$\nabla^2 := \nabla \bullet \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

που δρα πάνω σε βαθμωτά ή διανυσματικά πεδία ως εξής:

$$\nabla^2 : V_n(E) \to V_n(E):\ \nabla^2 f := f_{x_1^2} + ... + f_{x_n^2},$$

ή αν $\mathbf{F} = \left(f_1, ..., f_n \right)$, τότε

$$\nabla : \boldsymbol{V}_n(E) \to \boldsymbol{V}_n(E):\ \nabla \mathbf{F} = \left(\nabla f_1, ..., \nabla f_n \right).$$

- $\int_\Omega f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$: Πολλαπλό ολοκλήρωμα συνεχούς πραγματικής συνάρτησης $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- $\int_\Sigma f dS$: Επιφανειακό ολοκλήρωμα συνεχούς πραγματικής συνάρτησης $f : \Sigma \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ επί λείας επιφάνειας Σ με παραμετροποίηση $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n : \mathbf{v} = \mathbf{r}(\mathbf{u})$. Αν $\mathbf{n}_0$ είναι η μοναδιαία κάθετος σε κάθε σημείο $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ της επιφάνειας Σ, τότε το διαφορικό

$$dS(\mathbf{v}) = \left| Det\left(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_{u_1}, ..., \mathbf{r}_{u_{n-1}} \right) \right| (\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

δηλώνει εμβαδόν στοιχειώδους επιφάνειας πάνω στη Σ. Ισχύει:

$$\int_\Sigma f(\mathbf{v}) dS(\mathbf{v}) = \int_A f(\mathbf{r}(\mathbf{u})) \left| Det\left(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_{u_1}, ..., \mathbf{r}_{u_{n-1}} \right) \right| (\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Β. Χρήσιμα στοιχεία θεωρίας.

Β1. Πολλαπλό ολοκλήρωμα Riemann.

Τα πολλαπλά ολοκληρώματα Riemann είναι φυσική γενίκευση των διπλών και τριπλών ολοκληρωμάτων. Εστω $f: R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση επί κλειστού ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

$$R = \left\{ \left(x_1, ..., x_n \right) : a_i \le x \le b_i,\ i = 1, ..., n \right\}$$

και $\Delta = \left(\Delta_1, ..., \Delta_n \right)$ είναι μια διαμέριση του R, όπου $\Delta_i,\ i = 1, ..., n$ είναι διαμερίσεις των κλειστών διαστημάτων $\left[a_i, b_i \right]$. Τότε το R διαμερίζεται σε στοιχειώδη ορθογώνια παραλληλεπίπεδα $\Omega(\mathbf{j})$, $\mathbf{j} = \left(j_1, ..., j_n \right)$, $1 \le j_k \le \left| \Delta_k \right|$, $k = 1, ..., n$, όγκου

$$V(\mathbf{j}) = \left(x_{1, j_1+1} - x_{1, j_1} \right) \left(x_{2, j_2+1} - x_{2, j_2} \right) \cdots \left(x_{n, j_n+1} - x_{n, j_n} \right) = dx_{1, j_1} \cdots dx_{n, j_n} .$$

Αν

$$M(\mathbf{j}) = \sup \left\{ f(\mathbf{x}) :\ \mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{j}) \right\}$$

και

$$m(\mathbf{j}) = \inf \left\{ f(\mathbf{x}) :\ \mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{j}) \right\},$$

τότε ορίζουμε

$$L_f = \sup \left\{ \sum_{\mathbf{j}} \left(m(\mathbf{j}) \cdot V(\mathbf{j}) \right) : \Delta \text{ οποιαδήποτε διαμέριση του } R \right\}$$

και

$$U_f = \inf \left\{ \sum_{\mathbf{j}} \left(m(\mathbf{j}) \cdot V(\mathbf{j}) \right) : \Delta \text{ οποιαδήποτε διαμέριση του } R \right\}.$$

Σημειώνουμε ότι οι αριθμοί U_f, L_f υπάρχουν πάντα και καλούνται ανώτερο και κατώτερο ολοκλήρωμα Darboux της *f* επί του R.

Ορισμός. Έστω $f: R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση πάνω σε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R όπως παραπάνω. Αν

$$U_f = L_f = \lambda \in \mathbb{R},$$

τότε λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη κατά Riemann** επί του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου R και γράφουμε

$$\int_R f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Θεώρημα. Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση πάνω σε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann επεκτείνεται και σε μη ορθογώνια χωρία ως εξής:

Εστω $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση πάνω σε κλειστό και φραγμένο χωρίο S με το σύνορό του ∂S να είναι σύνολο αμελητέου όγκου. Τότε υπάρχει ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R που καλύπτει εξ ολοκλήρου το στερεό S. Ετσι, ορίζουμε την **επέκταση** της f στο S ως εξής:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S \\ 0, & \mathbf{x} \in R \setminus S \end{cases}.$$

Αν η g είναι ολοκληρώσιμη στο R, τότε ορίζουμε

$$\int_S f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_R g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Σημείωση. Αποδεικνύεται ότι η τιμή του ολοκληρώματος $\int_R g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του R.

Θεώρημα (Επαναληπτική ολοκλήρωση). Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση πάνω σε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R. Αν $R = R_1 \times R_2$, όπου $R_1 \in \mathbb{R}^k$, $R_2 \in \mathbb{R}^m$ είναι κλειστά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με $k + m = n$ και αν $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ τότε η συνάρτηση

$$F(\mathbf{x}) = \int_{R_2} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)d\mathbf{x}_2$$

είναι συνεχής στο R_1 και

$$\int_R f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{R_1}\left(\int_{R_2} f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)d\mathbf{x}_2\right)d\mathbf{x}_1.$$

Εστω $\mathbf{g}: A\subset\mathbb{R}^n \to B\subset\mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμο και αντιστρέψιμο πεδίο με $\mathbf{g}^{-1}: B\to A$ επίσης συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Εστω $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας (παράγωγος) σε κάθε σημείο του πεδίου $\mathbf{g}$. Τότε:

Θεώρημα (Αλλαγή μεταβλητής). Εστω $\mathbf{g}$ πεδίο όπως παραπάνω και A,B είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αν f είναι συνεχής πραγματική συνάρτηση πάνω στο σύνολο B, τότε:

$$\int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))\left|Det\left(\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})\right)\right|d\mathbf{y}.$$

Μια σημαντική εφαρμογή της φόρμουλας αλλαγής μεταβλητής είναι ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^2$, σε σφαιρικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$ και η γενίκευση στο $\mathbb{R}^n$. Ετσι, το σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})$$

στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_2 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ x_2 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2} \\ \qquad\vdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ x_n = r\cos\theta_1 \end{cases}, \ 0\le\theta_i\le\pi \ (i=1,...,n-2), \ 0\le\theta_{n-1}\le 2\pi$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού αυτού δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{J}(r,\boldsymbol{\theta}) = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}, \ \boldsymbol{\theta} = (\theta_1,...,\theta_{n-1}).$$

Κάθε σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$, με $\mathbf{y} \in \mathbf{S}^{n-1}$. Αν

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y}) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f\left(\mathbf{g}(1,\boldsymbol{\theta})\right)\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2}\,d\theta_{n-1}\cdots d\theta_1$$

τότε για κάθε μπάλα $B(\mathbf{0},N)$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε τη φόρμουλα

$$\int_{B(\mathbf{0},N)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_0^N r^{n-1}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(r\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y})\,dr\,.$$

Ορίζουμε δε το εμβαδόν της μοναδιαίας σφαίρας $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$w_{n-1} = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} dS(\mathbf{y})\,.$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε τις κάτωθι ιδιότητες:

(α) $$\left|B(\mathbf{x},r)\right| = \left|B(\mathbf{0},r)\right| \text{ και } \left|\partial B(\mathbf{x},r)\right| = \left|\partial B(\mathbf{0},r)\right|,$$

διότι όγκος και εμβαδόν είναι αναλλοίωτες ποσότητες ως προς την παράλληλη μεταφορά.

(β) $$\left|B(\mathbf{0},r)\right| = r^n\left|B(\mathbf{0},1)\right|,$$

διότι $\left|B(\mathbf{0},r)\right| = \int_{B(\mathbf{0},r)} d\mathbf{y} \overset{\mathbf{y}=r\mathbf{w}}{=} \int_{B(\mathbf{0},1)} r^n d\mathbf{w} = r^n\int_{B(\mathbf{0},1)} d\mathbf{w} = r^n\left|B(\mathbf{0},1)\right|$.

(γ) $$dS_r = r^{n-1}dS_1\,,$$

όπου dS_r είναι το στοιχειώδες εμβαδόν της σφαίρας $\mathbf{S}^{n-1}(r)$, ενώ dS_1 είναι το στοιχειώδες εμβαδόν της μοναδιαίας σφαίρας $\mathbf{S}^{n-1}$.

(δ) $$\left|B(\mathbf{0},1)\right| = \frac{w_{n-1}}{n}\,,$$

διότι με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\left|B(0,1)\right| = \int_{B(0,1)} d\mathbf{y} = \int_0^1\int_{\mathbf{S}^{n-1}} r^{n-1}dr\,dS = \frac{1}{n}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} dS = \frac{w_{n-1}}{n}\,.$$

B2. Μη γνήσιο πολλαπλό ολοκλήρωμα Riemann σε μη φραγμένα χωρία.

Εστω $N \in \mathbb{N}$ και $f : Q_N \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση πάνω στους κύβους

$$Q_N = \left\{ \left(x_1, ..., x_n \right) : \ \left| x_i \right| \le N/2, \ i = 1, ..., n \right\}.$$

Αν το όριο

$$\lim_{N \to \infty} \int_{Q_N} f\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}$$

υπάρχει, τότε το όριο αυτό το συμβολίζουμε με

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}.$$

Μια χρήσιμη κλάση συνεχών συναρτήσεων των οποίων το $\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}$ υπάρχει, περιλαμβάνει τις συναρτήσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\left| f\left(\mathbf{x}\right) \right| \le \frac{A}{1 + \left| \mathbf{x} \right|^{n+d}}, \ \ \forall d > 0$$

για κάποια θετική σταθερά A που εν γένει εξαρτάται απ' την f.

B3. Θεώρημα Απόκλισης. Ταυτότητες Green.

Θεώρημα (Απόκλισης Gauss). Εστω Ω είναι ένα φραγμένο κανονικό στερεό του $\mathbb{R}^n$ με το σύνορό του $\partial\Omega$ να είναι μία λεία υπερεπιφάνεια με τη μοναδιαία κάθετο $\mathbf{n}_0$ αυτής να έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική όψη της και έστω $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω και στο εσωτερικό της υπερεπιφάνειας $\partial\Omega$. Τότε η ροή του πεδίου $\mathbf{F}$ διαμέσου της επιφάνειας $\partial\Omega$ δίνεται απ' τη σχέση

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}_0 dS = \int_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{F}\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}.$$

Εστω τώρα $u, v \in C^2\left(\Omega\right)$, όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι όπως παραπάνω. Τότε:

$$\nabla \bullet \left(v \nabla u \right) = \nabla v \bullet \nabla u + v \nabla \bullet \nabla u = \nabla v \bullet \nabla u + v \nabla^2 u.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη της παραπάνω ισότητας και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα απόκλισης παίρνουμε

$$\int_{\Omega} \nabla \bullet (v \nabla u)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla v \bullet \nabla u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v \nabla^2 u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} v \nabla u \bullet \mathbf{n}_0 dS = \int_{\Omega} \nabla v \bullet \nabla u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v \nabla^2 u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_0} dS = \int_{\Omega} \nabla v \bullet \nabla u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v \nabla^2 u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}.$$

Η παραπάνω καλείται **1η ταυτότητα Green**. Απ' την άλλη μεριά έχουμε:

$$v \nabla^2 u - u \nabla^2 v = \nabla \bullet (v \nabla u - u \nabla v).$$

Ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη της παραπάνω ισότητας και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα απόκλισης παίρνουμε

$$\int_{\Omega} \left(v \nabla^2 u - u \nabla^2 v\right)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \bullet (v \nabla u - u \nabla v)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$= \int_{\partial\Omega} (v \nabla u - u \nabla v) \bullet \mathbf{n}_0 dS$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_0} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_0} \right) dS\,.$$

Τελικά:

$$\boxed{\int_{\Omega} \left(v \nabla^2 u - u \nabla^2 v\right)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_0} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_0} \right) dS.}$$

Η παραπάνω καλείται 2η **ταυτότητα Green**.

B4. Σύντομη ανασκόπηση σειρών Fourier.

Ορισμός. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι μια $T-$περιοδική και απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[-T/2,T/2]$, δηλαδή $\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|dx<\infty$. Ο χώρος αυτών των συναρτήσεων συμβολίζεται με $\mathbf{L}_1$.

Ορισμός. Εστω $f\in\mathbf{L}_1$. Ορίζουμε μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $\boldsymbol{f}:=\left\{\hat{f}(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ έτσι ώστε

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{\frac{-2\pi inx}{T}}dx.$$

Η τριγωνομετρική σειρά (όποτε αυτή έχει νόημα)

$$S[f](x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{\frac{2\pi in\pi x}{T}},$$

καλείται **σειρά Fourier σε μιγαδική μορφή** της συνάρτησης f και η ακολουθία $\boldsymbol{f}$ καλείται **ακολουθία συντελεστών Fourier της** f.

Εστω $n\geq 0$. Τότε:

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{\frac{-2\pi inx}{T}}dx=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\left(\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right)dx$$

$$=\frac{a_n-ib_n}{2},$$

όπου

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(x)dx \\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\left(\dfrac{2\pi nx}{T}\right)dx,\quad n=1,2,... \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\left(\dfrac{2\pi nx}{T}\right)dx \end{cases}$$

Θέτοντας όπου n το $-n$ βρίσκουμε εύκολα

$$\hat{f}(-n) = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} = \frac{a_n + ib_n}{2},$$

οπότε παίρνουμε

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n \pi x}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n \pi x}{T}} + \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n \pi x}{T}}$$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\hat{f}(-n) e^{-\frac{2\pi i n \pi x}{T}} + \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n \pi x}{T}} \right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right) \right.$$

$$\left. + \frac{a_n - ib_n}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right) \right)$$

και μετά από στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει μια ισοδύναμη μορφή του αναπτύγματος Fourier της f:

$$\boxed{S[f](x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right)},$$

όπου οι συντελεστές $a_n, b_n,\ n = 0,1,\ldots$ είναι όπως παραπάνω και καλούνται επίσης συντελεστές Fourier της f. Το άθροισμα

$$S_N[f](x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right)$$

καλείται N-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier $S[f](x)$ της συνάρτησης f στο σημείο x. Σημειώνουμε ότι η σειρά Fourier δε συγκλίνει απαραίτητα και όταν συγκλίνει δεν συγκλίνει υποχρεωτικά στη συνάρτηση f. Παρ' όλα αυτά ισχύει το ακόλουθο:

Λήμμα (Μοναδικότητας). *Αν* f, g *είναι συνεχείς* $T-$*περιοδικές συναρτήσεις, τότε*

$$\hat{f}(n) = \hat{g}(n) \ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = g.$$

Οσον αφορά τη συμπεριφορά της ακολουθίας των συντελεστών Fourier ισχύει το ακόλουθο:

Λήμμα (Riemann-Lebesgue). Αν $f \in \mathbf{L}_1$, τότε η ακολουθία των συντελεστών Fourier της f είναι μηδενική, δηλαδή

$$\lim_{|n| \to +\infty} \hat{f}(n) = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0.$$

Σημειώνουμε ότι η συνέχεια της f δε διασφαλίζει τη σημειακή σύγκλιση της σειράς Fourier.

Ορισμός. Εστω f είναι μια $T-$περιοδική συνάρτηση.

(α) Εάν για κάθε $x \in [-T/2, T/2]$ ορίζονται τόσο το εκ δεξιών όριο $f(x^+)$ όσο και το εξ αριστερών όριο $f(x^-)$ της f στο σημείο x και είναι πεπερασμένοι (αλλά όχι κατ' ανάγκην ίσοι) αριθμοί, λέμε ότι η f είναι **τμηματικά συνεχής** στο $[-T/2, T/2]$.

(β) Εάν η f είναι **τμηματικά συνεχής** στο $[-T/2, T/2]$ και επιπλέον για κάθε x ορίζονται τα όρια

$$\begin{cases} f'_+(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x^+)}{h} \\ f'_-(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x^-)}{h} \end{cases}$$

και είναι πραγματικοί αριθμοί, λέμε ότι η f είναι **τμηματικά λεία** στο $[-T/2, T/2]$.

Θεώρημα (Σημειακή σύγκλιση). Αν η f είναι μια $T-$περιοδική και τμηματικά λεία συνάρτηση στο $[-T/2,T/2]$, τότε:

$$\lim_{N\to\infty} S_N[f](x) = \frac{f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)}{2}.$$

Πρόταση (Παραγώγιση και ολοκλήρωση όρο προς όρο).

(α) Αν f είναι συνεχής Τ-περιοδική συνάρτηση με $f' \in L_1$, τότε η σειρά Fourier της f' προκύπτει από τη σειρά Fourier της f με παραγώγιση όρο προς όρο.

(β) Η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_1$ ολοκληρώνεται πάντοτε όρο προς όρο (ανεξαρτήτως αν η σειρά Fourier της f συγκλίνει ή όχι) σε μια συγκλίνουσα σειρά.

Δυστυχώς δεν είναι αληθές ότι κάθε μηδενική ακολουθία μπορεί να γραφεί ως ακολουθία συντελεστών Fourier μιας απόλυτα ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Τότε όμως πως μπορούμε να ξεχωρίσουμε πότε μια τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier μιας συνάρτησης; Μια ικανή συνθήκη μας δίνει το ακόλουθο

Θεώρημα (Riesz-Fischer). Εστω $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ είναι μια τετραγωνικά αθροίσιμη ακολουθία μιγαδικών αριθμών, δηλαδή

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Τότε υπάρχει τετραγωνικά ολοκληρώσιμη $T-$περιοδική συνάρτηση f (δηλαδή $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty$) τέτοια ώστε

$$c_n = \hat{f}(n).$$

Ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων $T-$περιοδικών συναρτήσεων συμβολίζεται με $\mathbf{L}_2$ και είναι πολύ σημαντικός. Κατ' αρχήν περιέχεται στον $\mathbf{L}_1$. Στο χώρο $\mathbf{L}_2$ μπορούμε να ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο ως εξής:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\overline{g(x)}dx\,.$$

Τότε, σε αναλογία με την ευκλείδια γεωμετρία ορίζεται μια νόρμα $\|f\|$ στον $\mathbf{L}_2$ έτσι ώστε

$$\|f\|^2=\langle f,f\rangle=\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2\,dx\,.$$

Τότε λέμε ότι τα στοιχεία $f,g\in\mathbf{L}_2$ είναι κάθετα αν και μόνον αν $\langle f,g\rangle=0$. Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}e^{\frac{2\pi inx}{T}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του χώρου αυτού, άρα για κάθε $f\in\mathbf{L}_2$ υπάρχει μοναδική ακολουθία συντελεστών $\{c_n(f)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ έτσι ώστε

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(f)e^{\frac{2\pi inx}{T}}\Rightarrow\left\langle f,e^{\frac{2\pi imx}{T}}\right\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(f)\left\langle e^{\frac{2\pi inx}{T}},e^{\frac{2\pi imx}{T}}\right\rangle$$

$$\Rightarrow\left\langle f,e^{\frac{2\pi imx}{T}}\right\rangle=T\cdot c_m(f)\Rightarrow c_m(f)=\hat{f}(m).$$

Επιπλέον ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα (Ταυτότητα του Parseval). Αν $f\in\mathbf{L}_2$,τότε

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2dx=|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right),$$

όπου $\{a_n\},\{b_n\}$ είναι όπως παραπάνω. Ισοδύναμα:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2\,.$$

Σημείωση. Αν f είναι μια $T-$περιοδική και **άρτια** συνάρτηση, τότε η σειρά Fourier της f παίρνει τη μορφή

$$S[f](x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

και μιλούμε για **σειρά συνημιτόνων της** f. Αν η f είναι μια $T-$περιοδική και περιττή συνάρτηση, τότε η σειρά Fourier της f παίρνει τη μορφή

$$S[f](x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

και μιλούμε για **σειρά ημιτόνων της** f.

Συμπερασματικά, η σειρά Fourier είναι ένας μετασχηματισμός που αναλύει μια περιοδική συνάρτηση στο φάσμα συχνοτήτων της (διακριτών). Δηλαδή από μια (συνεχή) συνάρτηση f προκύπτει μια διακριτή ακολουθία $\hat{f}(n),\ n\in\mathbb{Z}$. Το n είναι η συχνότητα που μετρά το πλήθος των ταλαντώσεων ανά περίοδο. Ετσι ο αριθμός $\left|\hat{f}(n)\right|$ μας δίνει ένα μέτρο του κατά πόσο η n-ιοστή συχνότητα είναι ουσιώδης στην αναπαράσταση της συνάρτησης μέσω της σειράς Fourier αυτής.

B5. Μετασχηματισμός Fourier.

Ορισμός. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f\in L_1:=L_1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της f ως εξής:

$$f(\gamma)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\gamma}dx,\ \gamma\in\mathbb{R}.$$

Κατ' αρχήν αναφέρουμε χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier που αποδεικνύονται εύκολα:

Πρόταση. Εστω $f,g\in L_1$. Εχουμε:

F1. $(af+bg)=a\hat{f}+b\hat{g},\quad a,b\in\mathbb{C}$ (γραμμικότητα).

F2. Αν $f_\tau=f(\cdot-\tau)$, τότε

$$f_\tau(\gamma)=\hat{f}(\gamma)e^{-2\pi i\gamma\tau}\ \text{(μετάθεση στο χρόνο).}$$

F3. Για $\omega\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{2\pi i\omega\bullet} f(\gamma) = \hat{f}(\gamma - \omega)$$ (μετάθεση στις συχνότητες).

F4. Για $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει::

$$f(a\cdot)(\gamma) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\gamma}{a}\right)$$ (διαστολή στο χρόνο).

F6. Αν $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ και $F \in L_1$, τότε

$$\hat{F}(\gamma) = \frac{\hat{f}(\gamma)}{2\pi i\gamma}, \quad \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$$ (αντιπαράγωγος στο χρόνο).

F7. Αν $f, f', ..., f^{(k)} \in L_1$ και $f, f', ..., f^{(k)} \to 0, \ |x| \to \infty$, τότε:

$$f^{(k)}(\gamma) = (2\pi i\gamma)^k \ \hat{f}(\gamma)$$ (παράγωγοι στο χρόνο).

F8. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$ και $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη και:

$$(-2\pi i) \ xf(\gamma) = \left(f\right)'(\gamma)$$ (παράγωγος στις συχνότητες).

F9. Αν $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$ είναι η συνέλιξη των f, g, τότε

$$f * g(\gamma) = f(\gamma)g(\gamma), \ \gamma \in \mathbb{R}$$ (συνέλιξη στο χρόνο).

Λήμμα. Αν $f, g \in L_1$, τότε $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$.

Αναφέρουμε το μετασχηματισμό Fourier συναρτήσεων ορισμένων χρήσιμων συναρτήσεων.

- Αν $f = \chi_{[-A/2,A/2]} \ (A > 0)$, τότε $f(\gamma) = \dfrac{\eta\mu(\pi A\gamma)}{\pi\gamma}$.
- Αν $f(x) = \dfrac{\eta\mu(\pi Ax)}{\pi x} \ (A > 0)$, τότε $f(\gamma) = \chi_{[-A/2,A/2]}(\gamma)$.

- Αν $f=\left(1-\frac{|x|}{A}\right)\chi_{[-A,A]}\ (A>0)$, τότε $f(\gamma)=\frac{1}{A}\frac{\eta\mu^2(\pi A\gamma)}{(\pi\gamma)^2}$.
- Αν $f(x)=\frac{\eta\mu^2(\pi Ax)}{A(\pi x)^2}$, τότε $f(\gamma)=\left(1-\frac{|\gamma|}{A}\right)\chi_{[-A,A]}(\gamma)\ (A>0)$.
- Αν $f(x)=e^{-|x|}$, τότε $f(\gamma)=\frac{2}{1+(2\pi\gamma)^2}$ και αντιστρόφως.
- Αν $f(x)=e^{-\pi x^2}$, τότε $f(\gamma)=e^{-\pi\gamma^2}$.

Θεώρημα. Εστω $f\in L_1(\mathbb{R})$ και f είναι ο μετασχηματισμός Fourier της f. Τότε:

(α) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

(β) (Αντιστροφής): Αν $f\in L_1$, ισχύει

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}} f(\gamma)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma$$

σε κάθε σημείο συνέχειας της f. Η συνάρτηση $\int_{\mathbb{R}} f(\gamma)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma$ καλείται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της f.

(γ) (Μοναδικότητας): Αν $f(\gamma)=0\ \forall\gamma\in\mathbb{R}$, τότε $f(x)=0$ σε κάθε σημείο συνέχειας της f.

(δ) (Riemann-Lebesgue): $\lim\limits_{|\gamma|\to\infty}\hat{f}(\gamma)=0$.

Σημείωση. (α) Είναι εύκολο να δούμε ότι το θεώρημα αντιστροφής μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i\gamma y}dy\right)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma$$

$$=2\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\gamma(x-y)\right]dy\right)d\gamma.$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left[\sigma\upsilon\nu(2\pi\gamma x)\sigma\upsilon\nu(2\pi\gamma y)+\sin(2\pi\gamma x)\sin(2\pi\gamma y)\right]dy\right)d\gamma$$

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{\cos}(\gamma)\sigma\upsilon\nu(2\pi\gamma y)d\gamma+\int_{-\infty}^{\infty} f^{\sin}(\gamma)\sin(2\pi\gamma y)d\gamma$$

όπου ορίζουμε το **συνημιτονικό μετασχηματισμό** Fourier της f ως εξής:

$$f^{\cos}(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sigma\upsilon\nu(2\pi\gamma x)dx$$

και επιπλέον, ορίζουμε τον **ημιτονικό μετασχηματισμό** Fourier της f ως εξής:

$$f^{\sin}(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi\gamma x)dx\,.$$

Προφανώς, αν f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$, τότε από τον παραπάνω τύπο αντιστροφής, παίρνουμε:

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{\cos}(\gamma)\sigma\upsilon\nu(2\pi\gamma y)d\gamma=2\int_{0}^{\infty} f^{\cos}(\gamma)\sigma\upsilon\nu(2\pi\gamma y)d\gamma\,,$$

ενώ, αν f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, τότε πάλι από τον παραπάνω τύπο αντιστροφής, παίρνουμε:

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{\sin}(\gamma)\sin(2\pi\gamma y)d\gamma=2\int_{0}^{\infty} f^{\sin}(\gamma)\sin(2\pi\gamma y)d\gamma\,.$$

Β6. Μετασχηματισμός Laplace.

Ορισμός. Εστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$. Καλούμε μετασχηματισμό Laplace της f, συμβολικά $\mathcal{L}(f)$ τη συνάρτηση

$$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(t)e^{-st}dt$$

για όλες τις τιμές του $s\in\mathbb{C}$ για τις οποίες το μη γνήσιο ολοκλήρωμα της $f(t)e^{-st}$ συγκλίνει.

Ο μετασχηματισμός Laplace απεικονίζει μια συνάρτηση f ορισμένη **στο πεδίο του χρόνου** t σε μια νέα συνάρτηση $F(s)$. Δηλαδή:

$$f\xrightarrow{\mathcal{L}}F\,.$$

Εφόσον ο μετασχηματισμός Laplace απεικονίζει συναρτήσεις σε συναρτήσεις, είναι λογικό να αναρωτηθούμε αν υπάρχει αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}$ που να απεικονίζει το μετασχηματισμό Laplace στην αρχική συνάρτηση f. Πράγματι υπό κατάλληλες συνθήκες υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}$ όπως θα δούμε παρακάτω. Ετσι για το μετασχηματισμό Laplace γράφουμε:

$$f \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F \ .$$

Μια ικανή συνθήκη ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace δίνει το ακόλουθο

Θεώρημα. Εστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση:

(i) τμηματικά συνεχής (δηλαδή είναι συνεχής παντού πλην πεπερασμένου πλήθος σημείων $t_1,...,t_N$ για τα οποία υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{t\to t_i^+} f(t)$ και $\lim\limits_{t\to t_i^-} f(t),\ i=1,...,N$ και είναι πεπερασμένα) και

(ii) εκθετικής τάξης α (δηλαδή $e^{-at}\left|f(t)\right|\le M\ \ \forall t>c$, όπου M,a,c είναι πραγματικές σταθερές με $M,c>0$).

Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f ορίζεται για κάθε $\mathrm{Re}(s)>a$ και επιπλέον $\lim\limits_{s\to\infty} F(s)=0$.

Αναφέρουμε το μετασχηματισμό Laplace ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων.

- $\mathcal{L}(1)=\dfrac{1}{s},\ \mathrm{Re}(s)>0$.
- $\mathcal{L}\left(e^{at}\right)=\dfrac{1}{s-a},\ \mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(a)$.
- $\mathcal{L}\left(t^n\right)=\dfrac{n!}{s^{n+1}},\ \mathrm{Re}(s)>0,\ \ n\in\mathbb{N}$.
- $\mathcal{L}\left(\eta\mu(at)\right)=\dfrac{a}{s^2+a^2},\ \mathrm{Re}(s)>0$.
- $\mathcal{L}\left(\sigma\upsilon\nu(at)\right)=\dfrac{s}{s^2+a^2},\ \mathrm{Re}(s)>0$.

Αν εξαιρέσουμε τέτοιες στοιχειώδεις συναρτήσεις των οποίων ο μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται με απ' ευθείας ολοκλήρωση, για συναρτήσεις με πιο πολύπλοκο τύπο τα πράγματα δυσκολεύουν. Απ' την άλλη μεριά ένα κριτήριο χρησιμότητας ενός μετασχηματισμού είναι οι ιδιότητες αυτού που διευκολύνουν τους υπολογισμούς. Εχουμε:

Γραμμικότητα.

$$\mathcal{L}(af \pm bg)(s) = a\mathcal{L}(f)(s) \pm b\mathcal{L}(g)(s).$$

Μετάθεση στο πεδίο των συχνοτήτων s.

$$\mathcal{L}\left(f(t)e^{bt}\right) = \mathcal{L}(f)(s-b).$$

Μετάθεση στο πεδίο του χρόνου.

Αν

$$g(t) = \begin{cases} f(t-b) & t \geq b \\ 0 & t < b \end{cases}, \ t \geq 0, \ b > 0$$

τότε

$$\mathcal{L}(g(t))(s) = e^{-bs}\mathcal{L}(f)(s).$$

Σημείωση. Εστω

$$u_b(t) = \begin{cases} 1, & t > b \\ 0, & t < b \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \ b > 0$$

είναι η **μοναδιαία συνάρτηση βήματος Heaviside**. Τότε η παραπάνω ιδιότητα γράφεται ως εξής:

$$\boxed{\mathcal{L}\left(u_b f(t-b)\right) = e^{-bs}\mathcal{L}(f), \ \mathrm{Re}(s) > a}.$$

Διαστολή/Στάθμιση.

$$\mathcal{L}(f(bt)) = \frac{1}{b}\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{b}\right).$$

Moments.

$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n \mathcal{L}\left(f\right)^{(n)}(s).$$

Παράγωγοι.

Αν $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι $n-$φορές παραγωγίσιμη με εκθετικής τάξης a παραγώγους $f',...,f^{(n-1)}$ για κάθε $t\geq 0$ και τμηματικά συνεχή παράγωγο $f^{(n)}$, τότε

$$\mathcal{L}\left(f^{(k)}\right) = s^k \mathcal{L}\left(f\right) - s^{k-1} f\left(0\right) - ... - s f^{(k-2)}\left(0\right) - f^{(k-1)}\left(0\right).$$

Συνέλιξη

Αν

$$f * g\left(t\right) = \int_0^{+\infty} f\left(\omega\right) g\left(t-\omega\right) d\omega.$$

τότε:

$$f * g\left(t\right) = \int_0^{t} f\left(\omega\right) g\left(t-\omega\right) d\omega.$$

Ορισμός. Εστω $F: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}:\ F=F(s)$. Αν υπάρχει συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}:\ f=f(t)$ τέτοια ώστε $\mathcal{L}\left(f\right)(s)=F\left(s\right)$, τότε η f καλείται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F και γράφουμε

$$f=\mathcal{L}^{-1}\left(F\right).$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left(f\right)=F \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(F\right)=f.$$

Αν F,G είναι οι μετασχηματισμοί Laplace δυο συνεχών συναρτήσεων $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, τότε με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace αποδεικνύονται άμεσα οι ακόλουθες ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

Γραμμικότητα.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(aF \pm bG\right) = a\mathcal{L}^{-1}\left(F\right) \pm b\mathcal{L}^{-1}\left(G\right).$$

Μετάθεση στο πεδίο συχνοτήτων.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s-b\right)\right) = f(t)e^{bt},\ t\geq 0.$$

Μετάθεση στο πεδίο χρόνου.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-bs}F\left(s\right)\right)=u_b f(t-b),\ \left(t\geq 0,\ b>0\right).$$

Διαστολή.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(bs\right)\right)=\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right),\ t\geq 0,\ b>0.$$

Moments.

$$\mathcal{L}^{-1}\left((-1)^n F^{(n)}\right)=t^n f(t),\ t\geq 0.$$

Συνέλιξη.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(\omega\right)G\left(\omega\right)\right)=f*g\ .$$

B7. Η μέθοδος των δυναμοσειρών. Διαφορικές εξισώσεις Bessel.

Εστω γραμμική δ.ε. 2ης τάξης **με μεταβλητούς συντελεστές**

$$y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = R(x).$$

Το βασικό πρόβλημα στην εύρεση της γενικής λύσης μιας τέτοιας δ.ε. είναι η εύρεση δυο γραμμικά ανεξάρτητα λύσεων της ομογενούς δ.ε.

$$y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = 0.$$

Απ' την άλλη μεριά, σε πολλές εφαρμογές μας αρκεί να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση «τοπικά», δηλαδή σε μια περιοχή δοθέντος σημείου $x_0 \in \mathbb{R}$. Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε μ' αυτό το πρόβλημα αναπτύσσοντας τη μέθοδο των δυναμοσειρών.

Ορισμός. Εστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Το x_0 καλείται **ομαλό** ή σύνηθες σημείο της ομογενούς δ.ε. $y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = 0$, εάν οι συντελεστές P,Q είναι **αναλυτικές** συναρτήσεις στο x_0. Αν τουλάχιστον κάποια από τις P,Q δεν είναι αναλυτική συνάρτηση στο x_0, τότε το x_0 καλείται **ανώμαλο** σημείο.

Υπενθυμίζουμε ότι οι συναρτήσεις P,Q είναι αναλυτικές στο x_0, αν οι P,Q έχουν παραγώγους κάθε τάξης στο x_0 και αναπτύσσονται σε σειρά Taylor

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \forall x \in I_P$$

και

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \forall x \in I_Q$$

αντιστοίχως, όπου I_P και I_Q είναι διαστήματα κέντρου x_0 της μορφής

$$I_P = (x_0 - R_P, x_0 + R_P) \text{ και } I_Q = (x_0 - R_Q, x_0 + R_Q).$$

Οι αριθμοί $0 \le R_P, R_Q \le +\infty$ είναι οι ακτίνες σύγκλισης των αντιστοί-

χων δυναμοσειρών.

Θεώρημα. *Αν* x_0 *είναι ομαλό σημείο της δ.ε.* $y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = 0$, *τότε η γενική λύση της είναι της μορφής*

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_2 y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

για κάθε $|x - x_0| < \min\{R_P, R_Q\}$, *όπου* a_0, a_1 *είναι αυθαίρετες σταθερές και* y_1, y_2 *είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις.*

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο δυναμοσειρών με το ακόλουθο

Παράδειγμα. Να επιλυθεί η δ.ε. $(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0$ σε μια περιοχή του μηδενός.

Προφανώς οι $P(x) = 3x/(x^2 - 1)$ και $Q(x) = x/(x^2 - 1)$ είναι (ως ρητές) αναλυτικές συναρτήσεις για $x_0 = 0$ με κοινή ακτίνα σύγκλισης $R = 1$. Συνεπώς, το $x_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο της δ.ε., οπότε η γενική λύση είναι της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

Παραγωγίζουμε την αρχική δ.ε. όρο προς όρο δυο φορές και αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε.:

$$(x^2 - 1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow -2a_2 + (a_0 + 3a_1 - 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(-(n+1)(n+2)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1}\right)x^n = 0$$

Λόγω μοναδικότητας του αναπτύγματος, έχουμε

$$\begin{cases} -2a_2 = 0 \\ a_0 + 3a_1 - 6a_3 = 0 \\ -(n+1)(n+2)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = \dfrac{a_0}{6} + \dfrac{a_1}{2} \\ a_{n+2} = \dfrac{n(n+2)a_n + a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \end{cases}.$$

Από τον αναδρομικό τύπο βρίσκουμε

$$a_4 = \frac{a_1}{12},\ a_5 = \frac{a_0}{8} + \frac{3a_1}{8}, \ldots$$

Αρα η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2}\right)x^3 + \frac{a_1}{12}x^4 + \left(\frac{a_0}{8} + \frac{3a_1}{8}\right)x^5 + \ldots$$

$$= a_0\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{8} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^3}{8} + \ldots\right),\quad |x| < 1. \qquad \square$$

Σημείωση. Για τη γενική λύση της δ.ε. $y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = R(x)$ ισχύει η βασική θεωρία, δηλ. ότι είναι το άθροισμα μιας μερικής της λύσης και της γενικής λύσης της ομογενούς, υπό την προϋπόθεση όμως ότι ο «σταθερός όρος» R είναι αναλυτική συνάρτηση σε μια περιοχή του x_0. Τότε, μπορούμε απευθείας να βρούμε τη λύση της δ.ε. εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα Να λυθεί η δ.ε. $y'' + y\cdot \eta\mu x = e^{x^2}$.

Το $x_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο της δ.ε. και είναι γνωστό ότι οι σειρές McLaurin των συναρτήσεων $\eta\mu x$ και e^{x^2} είναι οι

$$\begin{cases} \eta\mu x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots \\ e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{3!} + \ldots \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Εστω

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

είναι η γενική λύση της δ.ε. Παραγωγίζουμε την παραπάνω δυναμοσειρά όρο προς όρο δυο φορές και αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε. μαζί με τις σειρές McLaurin των $\eta\mu x$ και e^{x^2} και έχουμε

$$\left(2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\ldots\right)$$

$$+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots\right)=1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3!}+\ldots$$

Μηδενίζοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων δυνάμεων του x παίρνουμε

$$2a_2=1,\ 6a_3+a_0=0,\ 12a_4+a_1=1,\ 20a_5+a_2-\frac{a_0}{3!}=0,\ldots,$$

οπότε

$$a_2=\frac{1}{2},\ a_3=-\frac{a_0}{6},\ a_4=\frac{1-a_1}{12},\ a_5=\frac{a_0}{120}-\frac{1}{40},\ldots$$

και άρα η γενική λύση είναι

$$y=a_0+a_1x+\frac{x^2}{2}-\frac{a_0}{6}x^3+\frac{1-a_1}{12}x^4+\left(\frac{a_0}{120}-\frac{1}{40}\right)x^5+\ldots$$

$$=a_0\left(1-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots\right)+a_1\left(x-\frac{x^4}{12}+\ldots\right)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\ldots\right).\quad\square$$

Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που το x_0 είναι ανώμαλο σημείο της δ.ε.;

Ορισμός. Εστω $x_0\in\mathbb{R}$ είναι ανώμαλο σημείο της ομογενούς δ.ε $y''+P(x)\cdot y'+Q(x)\cdot y=0$. Το x_0 καλείται **σύνηθες ανώμαλο** σημείο, εάν οι συναρτήσεις

$$(x-x_0)P(x)\ \text{και}\ (x-x_0)^2Q(x)$$

είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο x_0. Αν τουλάχιστον μια από τις παραπάνω συνθήκες δεν ικανοποιείται, τότε το x_0 καλείται **ουσιώδες ανώμαλο** σημείο.

Θεώρημα. Εστω x_0 είναι σύνηθες ανώμαλο σημείο της ομογενούς δ.ε. $y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = 0$. Τότε η δ.ε. έχει πάντα μια λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

για κάθε x σε κατάλληλο διάστημα κέντρου x_0, όπου r είναι πραγματική ή μιγαδική σταθερά που προσδιορίζεται παρακάτω. Επιπλέον, εάν β_0, γ_0 είναι οι σταθερές των αναπτυγμάτων Taylor των συναρτήσεων $(x - x_0)P(x)$ και $(x - x_0)^2 Q(x)$ αντιστοίχως και r_1, r_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$r^2 + (\beta - 1)r + \gamma = 0,$$

έχουμε:

α) $|r_1 - r_2| \neq 0,1,2,...$ Τότε οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (a_0 \neq 0)$$

και

$$y_2(x) = |x - x_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad (b_0 \neq 0),$$

αποτελούν δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε.

β) $|r_1 - r_2| = 1,2,...$ Τότε, για $r_1 > r_2$, οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (a_0 \neq 0)$$

και

$$y_2(x) = c_0 \ln x \, y_1(x) + |x - x_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad (b_0 \neq 0, c_0 = \sigma\tau\alpha\theta.),$$

αποτελούν δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε. Η c_0

προσδιορίζεται επακριβώς.

γ) $r_1 = r_2$. Τότε οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (a_0 \neq 0)$$

και

$$y_2(x) = \ln x \, y_1(x) + |x - x_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad (b_0 \neq 0),$$

αποτελούν δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε.

Παράδειγμα. Να λυθεί σε μια περιοχή του μηδενός η δ.ε. **Bessel**

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2) y = 0, \ (x \geq 0, \ \lambda \geq 0 \text{ σταθερά}).$$

Προφανώς το $x_0 = 0$ είναι σύνηθες ανώμαλο σημείο της δ.ε., οπότε αναζητούμε λύση της μορφής

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \geq 0).$$

Παραγωγίζοντας δυο φορές την y, αντικαθιστώντας στη δ.ε. και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων δυνάμεων του x με μηδέν παίρνουμε

$$\begin{cases} (r^2 - \lambda^2) a_0 = 0 \\ ((r+1)^2 - \lambda^2) a_1 = 0 \\ \dots \\ ((r+k)^2 - \lambda^2) a_k + a_{k-2} = 0 \end{cases}, \ k = 2, 3, 4, \dots$$

Για $a_0 \neq 0$, έχουμε $r_{1,2} = \pm\lambda$ και εφ' όσον $\lambda \geq 0$ έχουμε $r = \lambda$. Τότε

$$\begin{cases} r=\lambda \\ (2\lambda+1)a_1=0 \\ \dots \\ k(2\lambda+k)a_k+a_{k-2}=0 \end{cases}, \; k=2,3,4,\dots \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_k=-\dfrac{a_{k-2}}{k(2\lambda+k)} \end{cases}.$$

Αρα, για $k=$περιττό έχουμε $0=a_3=a_5=\dots$ ενώ για $k=$άρτιο έχουμε

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2\lambda+2)},\; a_4=-\frac{a_2}{4(2\lambda+4)}=\frac{a_0}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot 2\cdot 2\cdot 4}$$

και γενικότερα

$$a_{2n}=\frac{(-1)^{n+1}a_0}{2\cdot 4\cdot 6\dots\cdot 2n\cdot(2(\lambda+1))(2(\lambda+2))\dots(2(\lambda+n))}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις των συντελεστών παίρνουμε τη λύση

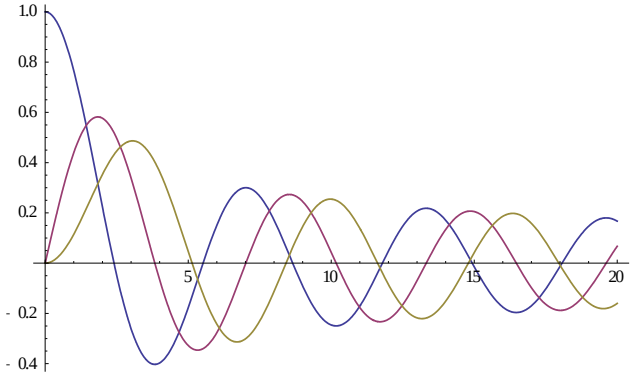
$$y(x)=a_0\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+\lambda}}{4^n n!(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Αν θεωρήσουμε $a_0=\dfrac{1}{2^{\lambda/2}\Gamma(\lambda+1)}$, όπου

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-x}e^{\lambda-1}dx \;\; (\lambda>0)$$

είναι η γάμμα συνάρτηση, τότε παίρνουμε τις **συναρτήσεις Bessel 1ου είδους τάξης λ:**

$$J_\lambda(x)=\frac{1}{2^{\lambda/2}\Gamma(\lambda+1)}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+\lambda}}{4^n n!(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

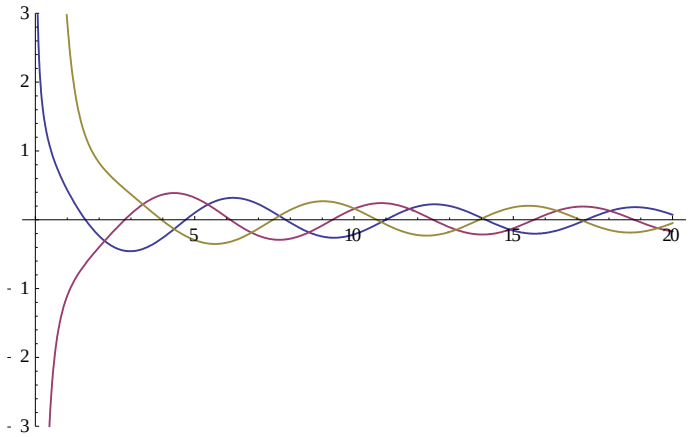


Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων J_0, J_1, J_2 **.**

Για $\lambda > 0$ αλλά $\lambda \notin \mathbb{N} = \{1,2,...\}$, ορίζεται η συνάρτηση

$$J_{-\lambda}(x) = \frac{1}{2^{-\lambda/2}\Gamma(-\lambda+1)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-\lambda}}{4^n n!(-\lambda+1)(-\lambda+2)...(-\lambda+n)} \quad (x \neq 0)$$

που αποκλίνει στο μηδέν.



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $J_{-0.5}, J_{-1.5}, J_{-2.5}$ **.**

Τότε, οι J_λ και $J_{-\lambda}$ αποτελούν δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε. Bessel και άρα η γενική της λύση είναι η

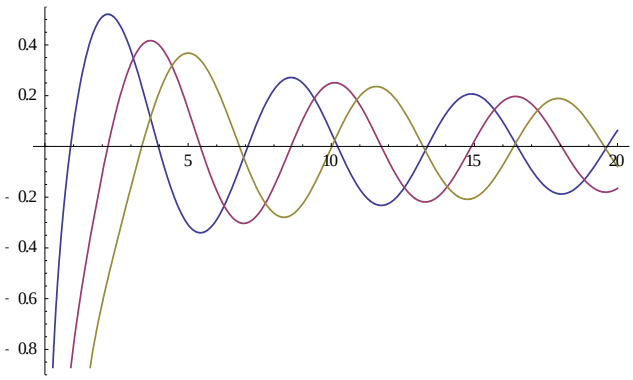
$$y = c_1 J_\lambda(x) + c_2 J_{-\lambda}(x).$$

Σημείωση. (α) Αν ο λ είναι φυσικός αριθμός, τότε ο τύπος της J_λ απλοποιείται στη μορφή

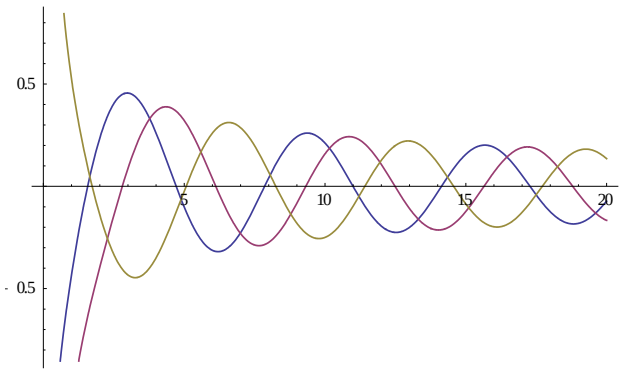
$$J_\lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\lambda+n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Σ' αυτή την περίπτωση η $J_{-\lambda}$ δεν ορίζεται. Τότε, μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση της δ.ε. Bessel δίνεται μέσω των συναρτήσεων **Bessel 2ου είδους τάξης** λ που ορίζονται ως εξής:

$$\mathrm{Y}_\lambda(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi\lambda)J_\lambda(x)-J_{-\lambda}(x)}{\cos(\pi\lambda)}, & \lambda\notin\mathbb{Z}\\ \lim\limits_{k\to\lambda}\mathrm{Y}_k(x), & \lambda\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Y_0, Y_1, Y_2 **.**



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $Y_{0.5}, Y_{1.5}, Y_{-1.2}$ **.**

(β) Η δ.ε.

$$x^2y''+xy'-\left(x^2+\lambda^2\right)y=0,\ \left(x\geq 0,\ \lambda\ \text{σταθερά}\right)$$

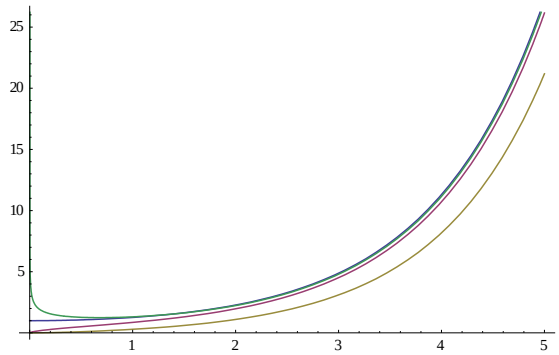
καλείται τροποποιημένη εξίσωση Bessel και έχει δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής:

$$I_\lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma\left(\lambda+n+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}\qquad\left(\lambda\in\mathbb{C}\right)$$

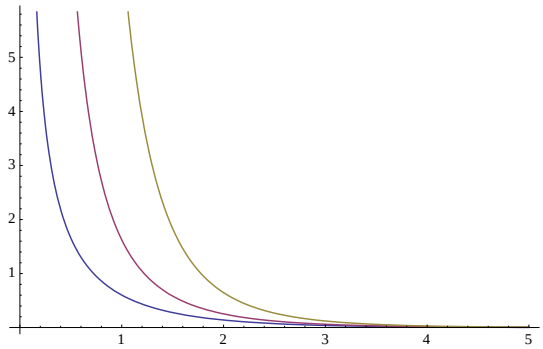
και

$$\mathrm{K}_\lambda(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi\left(-\mathrm{I}_\lambda(x)+\mathrm{I}_{-\lambda}(x)\right)}{2\eta\mu(\pi\lambda)}, & \lambda\notin\mathbb{Z}\\ \lim\limits_{k\to\lambda}\mathrm{K}_k(x), & \lambda\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

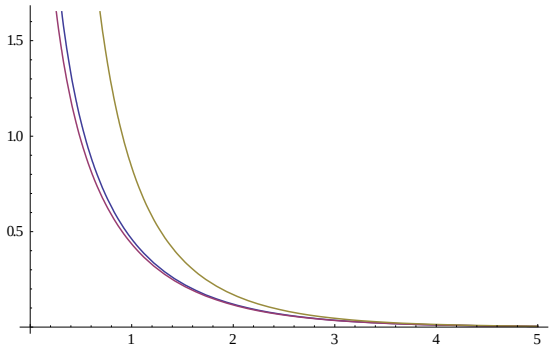
Σημειώνουμε ότι αυτές οι λύσεις είναι μη φραγμένες.



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $I_0, I_{0.6}, I_{-0.3}, I_{1.5}$ **.**



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων K_0, K_1, K_2 **.**



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $K_{-0.5}, K_{0.3}, K_{1.4}$ **.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Εισαγωγή.

0.1. Μερικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Γενικά. Καλούμε μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ), ή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (ΔΕΜΠ), μια εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη πραγματική συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών και τουλάχιστον μια από τις μερικές παραγώγους της. Τάξη ΜΔΕ καλείται η τάξη της μεγαλύτερης μερικής παραγώγου που περιέχεται στη διαφορική εξίσωση. Για παράδειγμα, αν $u \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, τότε η γενική μορφή των ΜΔΕ 1ης τάξης είναι

$$\boxed{F\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0}.$$

Για παράδειγμα, οι

$$u_x + u_y = x + y + 1, \quad 2u_x + u_y - u = 0, \quad \left(x+u\right)u_x + \left(x-y\right)u_y - xyu = y,$$

είναι ΜΔΕ 1ης τάξης.

Ορισμός 0.1. Λύση ΜΔΕ καλείται κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τη ΜΔΕ.

Ορισμός 0.2. Γενική λύση ΜΔΕ καλείται μια οικογένεια λύσεων που περιέχει αυθαίρετες συναρτήσεις, το πλήθος των οποίων είναι ίσο με την τάξη της.

Ορισμός 0.3. Μερική λύση ΜΔΕ καλείται κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τη ΜΔΕ και προκύπτει από τη γενική λύση της με συγκεκριμένη επιλογή των αυθαίρετων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 1. Εστω $u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ τέτοια ώστε

$$u_{xy} = 2(x+y).$$

Η γενική λύση αυτής υπολογίζεται με απευθείας ολοκληρώσεις:

$$u_{xy} = 2(x+y) \Leftrightarrow u_x = \int 2(x+y)dy = 2xy + y^2 + a(x)$$

$$\Leftrightarrow u = \int \left(2xy + y^2 + a(x)\right)dx = x^2y + xy^2 + \int a(x)dx + b(y)$$

$$\Leftrightarrow u = x^2y + xy^2 + a_1(x) + b(y).$$

Θεωρούμε ότι $a_1, b \in C^2(\mathbb{R})$.

Υπάρχουν δυο βασικές κατηγορίες ΜΔΕ: **οι γραμμικές** και οι **μη γραμμικές**. Υπενθυμίζουμε ότι αν V είναι ένας (πραγματικός ή μιγαδικός) διανυσματικός χώρος, τότε ένας τελεστής $\mathcal{L}: V \to V$ καλείται γραμμικός, αν

$$\mathcal{L}(au + bv) = a\mathcal{L}(u) + b\mathcal{L}(v),\ a,b \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C},\ u,v \in V.$$

Ετσι, για τη διδιάστατη περίπτωση, αν $A, B, \Gamma : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι γνωστές συναρτήσεις και $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια άγνωστη $C^1(\Omega)$-συνάρτηση, τότε κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + \Gamma(x,y)u = 0$$

καλείται **<u>ομογενής</u> γραμμική ΜΔΕ 1ης τάξης**, διότι αν ορίσουμε

$$\mathcal{L} = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + \Gamma,$$

τότε

$$\mathcal{L}(au + bv) = a\mathcal{L}(u) + b\mathcal{L}(v).$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν u, v είναι δυο λύσεις μιας ομογενούς ΜΔΕ, τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι επίσης λύση της ίδιας ΜΔΕ. Αυτή είναι η αρχή της **υπέρθεσης**. Κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + \Gamma(x,y)u = f(x,y),$$

όπου $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι γνωστή συνάρτηση, καλείται **<u>μη ομογενής</u> γραμμική ΜΔΕ 1ης τάξης**. Στην περίπτωση αυτή, αν αθροίσουμε τη γενική λύση της ομογενούς ΜΔΕ και μια μερική

λύση της μη ομογενούς ΜΔΕ, παίρνουμε τη γενική λύση της μη ομογενούς ΜΔΕ.

Κάθε ΜΔΕ

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y,u),$$

όπου A,B είναι γνωστές συναρτήσεις και η C είναι συνάρτηση των *x,y* και της άγνωστης συνάρτησης *u*, καλείται **ημι-γραμμική ΜΔΕ 1ης τάξης**. Πρόκειται για μια κλάση μη γραμμικών ΜΔΕ. Αν

$$C(x,y,u) = \Gamma(x,y)u - f(x,y)$$

τότε η παραπάνω ανάγεται σε μια γραμμική ΜΔΕ. Μια πιο ευρεία κλάση από τις ημιγραμμικές ΜΔΕ είναι οι **σχεδόν γραμμικές** ΜΔΕ που έχουν τη μορφή

$$A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u),$$

Παρακάτω θα δούμε μεθόδους επίλυσης τέτοιων ΜΔΕ 1ης τάξης.

Παράδειγμα 2. Εστω $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και $u_x + \alpha\, u_y = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$u_x + \alpha\, u_y = 0 \Leftrightarrow (1,\alpha)\bullet(u_x,u_y) = 0 \Leftrightarrow (1,\alpha)\bullet\nabla u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}} = 0,$$

όπου $\mathbf{a} = (1,\alpha)$. Εφόσον η παράγωγος της u κατά την κατεύθυνση του (σταθερού) διανύσματος $\mathbf{a}$ ισούται με μηδέν, η γενική λύση u της ΜΔΕ είναι σταθερή κατά μήκος οποιασδήποτε ευθείας παράγεται απ' το διάνυσμα $\mathbf{a}$, δηλαδή κατά μήκος όλων των ευθειών της μορφής

$y = \alpha x + b$, $b \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά.

Αυτές καλούνται **ισοσταθμικές καμπύλες** της ΜΔΕ. Ετσι, ισχύει $u(x,y) = C$ πάνω σε κάθε ευθεία $y = \alpha x + b$, όπου C σταθερά κατά μήκος συγκεκριμένης ευθείας, η οποία μεταβάλλεται κάθε φορά που αλλάζει η ευθεία, δηλαδή εξαρτάται απ' το b, συνεπώς το C είναι συνάρτηση του b. Αρα η γενική λύση της ΜΔΕ είναι:

$$u(x,y) = C(b) = C(y - \alpha x),$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3. Υπολογίστε τη γενική λύση $u \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ της ΜΔΕ

$$e^x u_x + x u_t = 0.$$

Θα εφαρμόσουμε μια γενική μέθοδο επίλυσης, τη μέθοδο των **χαρακτηριστικών καμπύλων**. Εστω γ είναι μια λεία καμπύλη με τύπο $\mathbf{r}(s) = \left(x(s), t(s)\right)$, $s \in \mathbb{R}$ και $u(s) = u\left(x(s), t(s)\right)$ είναι οι τιμές της *u* πάνω στην καμπύλη. Τότε, απ' τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds}.$$

Θεωρώντας ότι

$$\begin{cases} dx/ds = e^x \\ dt/ds = x \end{cases},$$

προκύπτει ότι

$$\frac{du}{dt} = e^x u_x + x u_y = 0 \Leftrightarrow u(\mathbf{r}(s)) = C.$$

Δηλαδή, η λύση της ΜΔΕ είναι σταθερή κατά μήκος οποιασδήποτε χαρακτηριστικής καμπύλης $\mathbf{r}$. Η οικογένεια αυτών των **χαρακτηριστικών καμπύλων** προκύπτει από τη λύση της συνήθους δ.ε.

$$\frac{dt/ds}{dx/ds} = \frac{x}{e^x} \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{x}{e^x}$$

και έχει τη μορφή

$$t = -xe^{-x} - e^{-x} + a,\ a \in \mathbb{R} \text{ αυθαίρετη σταθερά.}$$

Ετσι, $u(x,t) = C$ πάνω σε κάθε καμπύλη $t = xe^{-x} + e^{-x} + a$, όπου C σταθερά που μεταβάλλεται κάθε φορά που αλλάζει η καμπύλη, δηλαδή εξαρτάται απ' το a, συνεπώς είναι συνάρτηση του a. Αρα η γενική λύση της ΜΔΕ είναι η εξής:

$$u(x,t) = C(a) = C\left(t + xe^{-x} + e^{-x}\right),$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη παραγωγίσιμη παραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4. Εστω $u \in C^1\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\right)$ και

$$xu_x + yu_y = 2u^2$$

είναι μια ημι-γραμμική ΜΔΕ με μη σταθερούς συντελεστές. Εστω γ είναι λεία καμπύλη με τύπο $\mathbf{r}(s) = \left(x(s), y(s)\right)$ και $u(s) = u\left(x(s), y(s)\right)$. Τότε απ' τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds}. \qquad (1)$$

Αν

$$\begin{cases} dx/ds = x \\ dy/ds = y \end{cases},$$

τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = cx. \qquad (2)$$

Ετσι, κατά μήκος κάθε τέτοιας καμπύλης (2) έχουμε λόγω (1):

$$\frac{du}{ds} = 2u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}\frac{dx}{ds} = 2u^2 \Rightarrow x\frac{du}{dx} = 2u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2u^2}{x}.$$

Η λύση αυτής είναι

$$z = -\frac{1}{2\ln x + d(c)},$$

(κατά μήκος της καμπύλης $y = cx$), όπου $d(c)$ σταθερά που μεταβάλλεται κάθε φορά που αλλάζει η καμπύλη $y = cx$. Αρα, η γενική λύση είναι:

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\ln x + d\left(\frac{y}{x}\right)},$$

όπου d είναι αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^*$.

Συχνά θέλουμε να υπολογίσουμε συγκεκριμένες λύσεις ΜΔΕ που ικανοποιούν επιπλέον συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές είναι:

- **είτε αρχικές συνθήκες (Cauchy)**, αν το πρόβλημά μας είναι χρονο-εξαρτώμενο (δίνουν πληροφορία στην αρχή του χρόνου),

- **είτε συνοριακές συνθήκες (Dirichlet)**, αν το πρόβλημα αναφέρεται σ' ένα φραγμένο χωρίο (δίνουν πληροφορία για την κατάσταση στο σύνορο),

- είτε συνδυασμός αυτών.

Μια ΜΔΕ μαζί με τις επιπλέον συνθήκες λέμε ότι αποτελεί ένα **πρόβλημα**. Ενα πρόβλημα είναι **καλώς τεθιμένο** αν έχει μοναδική και **ευσταθή** λύση, δηλαδή μικρή μεταβολή των συνθηκών, επιφέρει εξίσου μικρή μεταβολή στη λύση.

Εάν οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι λείες (*δηλαδή σε κάθε σημείο των χαρακτηριστικών καμπύλων υπάρχει συνεχής και μη μηδενική παράγωγος*), η επίλυση μιας γραμμικής ΜΔΕ 1ης τάξης με τη μέθοδο χαρακτηριστικών καμπύλων είναι πάντα εφικτή. Επιπλέον, το Πρόβλημα Αρχικών τιμών (ΠΑΤ) για μια τέτοια ΜΔΕ 1ης τάξης έχει μοναδική λύση, ***υπό την προϋπόθεση ότι η καμπύλη επί της οποίας ορίζεται η αρχική συνθήκη, τέμνει όλες τις χαρακτηριστικές καμπύλες της ΜΔΕ σε μοναδικό σημείο***.

Παράδειγμα 5. Εστω $u \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ και $\begin{cases} u_x + 3u_t = 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$, $x,t \in \mathbb{R}$ είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Υπολογίστε τη μοναδική λύση του.

Εστω γ είναι λεία καμπύλη με τύπο $\mathbf{r}(s) = \left(x(s), t(s)\right)$, $s \in I := [a,b]$ και $u(s) = u\left(x(s), t(s)\right)$ είναι οι τιμές της *u* πάνω στην καμπύλη. Τότε, απ' τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds}.$$

Εστω

$$\begin{cases} dx/ds = 1 \\ dt/ds = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 3 \Leftrightarrow \boxed{t = 3x + c}.$$

Τότε

$$\frac{du}{ds} = 0 \Leftrightarrow u(x, 3x + c) = A(c) = A(t - 3x).$$

Αρα η γενική λύση της ΜΔΕ είναι η εξής:

$$u(x,t) = A(t - 3x),$$

όπου *A* είναι μια αυθαίρετη παραγωγίσιμη παραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη, παρατηρούμε ότι μας δίνεται η τιμή της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ κατά μήκος του άξονα των x (δηλαδή κατά μήκος της ευθείας t=0). Εφόσον η ευθεία t=0 τέμνει όλες τις χαρακτηριστικές καμπύλες της ΜΔΕ σε μοναδικό σημείο, αναμένουμε μοναδική λύση. Πράγματι, έχουμε:

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow A(-3x) = \frac{1}{1+x^2} \overset{y=-3x}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow A(y) = \frac{1}{1+\left(-\frac{y}{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A(y) = \frac{9}{9+y^2}.}$$

Τελικά:

$$u(x,t) = A(t - 3x) = \frac{9}{9 + (t - 3x)^2}.$$

Το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy/Dirichlet, μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο χαρακτηριστικών καμπύλων (αφήνεται ως άσκηση). Αντί αυτής, θα χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μέθοδο επίλυσης, με χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Η μέθοδος αυτή αποτελεί μια εναλλακτική για προβλήματα αρχικών τιμών σε ημιάπειρα χωρία με ομογενή αρχική συνθήκη (και για γραμμικές ΜΔΕ).

Παράδειγμα 6. Επιλύστε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, \quad x,t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}.$$

Εστω

$$F(x,s) = \mathcal{L}^t\left(u(x,t)\right)$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της u ως προς t (υπό την προϋπόθεση ότι η u και η u_x είναι και οι δυο συναρτήσεις εκθετικής τάξης ως προς t) και $x > 0$ σταθεροποιημένο προς στιγμήν. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}^t$ και στα δυο μέλη της ΜΔΕ, στη συνέχεια χρησιμοποιούμε ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace (βλέπε παράγραφο Β.6) και παίρνουμε:

$$\mathcal{L}^t\left(u_t + xu_x\right) = \mathcal{L}^t\left(x\right) \Leftrightarrow sF(x,s) - u(x,0) + x\frac{d}{dx}F(x,s) = \frac{x}{s}$$

$$\underset{x>0}{\overset{u(x,0)=0}{\Leftrightarrow}} \frac{d}{dx}F(x,s) + \frac{s}{x}F(x,s) = \frac{1}{s}.$$

Για σταθεροποιημένο s, η παραπάνω είναι μια γραμμική ΔΕ 1ης τάξης ως προς $x > 0$ με γενική λύση:

$$F(x,s) = e^{-\int \frac{s}{x}dx}\left(C(s) + \int \frac{1}{s}e^{\int \frac{s}{x}dx}dx\right) = |x|^{-s}\left(C(s) + \frac{1}{s}\int |x|^s\, dx\right)$$

$$= x^{-s}\left(C(s) + \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\right) = \frac{C(s)}{x^s} + \frac{x}{s(s+1)}.$$

Αλλά

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}^t\left(u(0,t)\right) = \mathcal{L}^t(0) \Rightarrow F(0,s) = 0.$$

Πρέπει λοιπόν $C(s) = 0$, συνεπώς:

$$F(x,s) = \frac{x}{s(s+1)} \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-t}\left(F(x,s)\right) = \mathcal{L}^{-t}\left(\frac{x}{s(s+1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow u(x,t) = x\mathcal{L}^{-t}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = x\left[\mathcal{L}^{-t}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-t}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right]$$

$$= x\left(1-e^{-t}\right),\ t,x \geq 0\,.$$

Παράδειγμα 7. Επιλύστε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_y + cu_x = 0 \\ u(0,y) = f(y) \end{cases},\ x,y \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}^*,$$

(υπό την προϋπόθεση ότι η $u \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\lim\limits_{|y|\to\infty} u(x,y) = 0$, $u, u_x, u_y,\ u(x,.)$ (ο μετασχηματισμός Fourier της u ως προς y) είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και η $f \in C^1(\mathbb{R})$ είναι μια γνωστή απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και ο μετασχηματισμός Fourier f είναι επίσης ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$).

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier. Εστω

$$u(x,\gamma) = \mathcal{F}^y\left(u(x,y)\right),$$

όπου $\mathcal{F}^y$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της u ως προς y και είναι καλά ορισμένος. Σταθεροποιούμε προς στιγμήν κάποιο $x \in \mathbb{R}$ και εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}^y$ και στα δυο μέλη της ΜΔΕ. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (βλέπε παράγραφο Β.5) και παίρνουμε:

$$\mathcal{F}^y\left(u_y + cu_x\right) = \mathcal{F}^y(0) \Leftrightarrow 2\pi i\gamma u(x,\gamma) + c\frac{d}{dx}u(x,\gamma) = 0$$

$$\overset{c\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{d}{dx}u(x,\gamma) + \frac{2\pi i\gamma}{c}u(x,\gamma) = 0\,.$$

Για σταθεροποιημένο γ, η παραπάνω είναι μια ομογενής γραμμική ΔΕ 1ης τάξης ως προς $x \in \mathbb{R}$ με γενική λύση:

$$u(x,\gamma) = C(\gamma)e^{-2\pi i\gamma x}\,.$$

Αλλά

$$u(0,y) = f(y) \Rightarrow u(x,\gamma) = f(\gamma) \Rightarrow C(\gamma) = f(\gamma).$$

Ετσι:

$$u(x,\gamma) = f(\gamma)e^{-2\pi i\gamma x} \Rightarrow \mathcal{F}^{-y}\big(u(x,\gamma)\big) = \mathcal{F}^{-y}\big(f(\gamma)\big)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = f\left(x - \frac{y}{c}\right).$$

Σημείωση. (α) Το παράδειγμα 7 μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο χαρακτηριστικών χωρίς τις επιπλέον συνθήκες που απαιτούνται για τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier.

(β) Οι μέθοδοι Laplace και Fourier μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνον σε προβλήματα αρχικών/συνοριακών συνθηκών που σχετίζονται με γραμμικές ΜΔΕ. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών είναι πιο γενική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση κάποιων μη γραμμικών ΜΔΕ 1ης τάξης.

Παράδειγμα 8. Εστω $\rho \in C^1\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\right)$: $\rho = \rho(x,t)$. Υπολογίστε τη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \rho\,\rho_x + \rho_t = 0 \\ \rho(x,0) = \tanh x \end{cases}.$$

Εστω γ είναι λεία καμπύλη με τύπο $\mathbf{r}(s) = \big(x(s),t(s)\big)$ και $\rho(s) = \rho\big(x(s),t(s)\big)$ είναι οι τιμές της *ρ* πάνω στην καμπύλη. Τότε, απ' τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{d\rho}{ds} = \rho_x\frac{dx}{ds} + \rho_t\frac{dt}{ds}.$$

Εστω

$$\begin{cases} dx/ds = \rho \\ dt/ds = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \rho. \qquad (3)$$

Τότε

$$\frac{d\rho}{ds} = 0 \Leftrightarrow \rho(x(t),t) = C. \qquad (4)$$

Θέτουμε στην (4) όπου t=0 και x_0=x(0), οπότε παίρνουμε:

$$\rho(x(0),0)=C \Leftrightarrow \rho(x_0,0)=C \Leftrightarrow \boxed{\tanh x_0 = C,}$$

με $x_0 \in \mathbb{R}$, $|C|<1$. Αντικαθιστούμε την (4) στην (3) και έχουμε

$$\frac{dx}{dt}=\rho \Rightarrow \frac{dx}{dt}=C \Leftrightarrow x=Ct+d\ ,$$

δηλαδή οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες. Οι ευθείες αυτές διέρχονται από το σημείο (x_0,0), άρα

$$x_0 = C\cdot 0 + d \Leftrightarrow d = x_0\,,$$

συνεπώς

$$x=\left(\tanh x_0\right)\cdot t + x_0\,.$$

Οι ευθείες αυτές αποτελούν πράγματι χαρακτηριστικές καμπύλες για κάθε $t \geq 0$ (η tanhx είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και λόγω του γεγονότος αυτού οι ευθείες αυτές δεν τέμνονται για $t \geq 0$ και $x \geq 0$). Επιπλέον, αν θεωρήσουμε την εξίσωση

$$\Phi(x,t,x_0)=0 \Leftrightarrow x-\left(\tanh x_0\right)\cdot t - x_0 = 0\,,$$

τότε, εφόσον $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_0} = -\dfrac{t}{\cosh^2 x_0} - 1 < 0$ για κάθε $t \geq 0$, από το θεώρημα πλεγμένων συναρτήσεων, υπάρχει λύση της παραπάνω εξίσωσης της μορφής

$$x_0 = g(x,t)$$

τοπικά σε μια περιοχή του *(x,t)*. Δηλαδή, η λύση του ΠΑΤ είναι της μορφής:

$$\rho(x(t),t)=C=\tanh x_0 \Rightarrow \rho(x,t)=\tanh(g(x,t))\,.$$

Ετσι, θεωρώντας ότι $\tanh x_0 \approx x_0$ για x_0 κοντά στο μηδέν, έχουμε

$$x-\left(\tanh x_0\right)\cdot t - x_0 = 0 \approx x - x_0\cdot t - x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{x}{1+t}\,,$$

οπότε για $|x| << 1+t$ έχουμε

$$\rho(x(t),t)=C=\tanh x_0 \Rightarrow \rho(x,t)=\tanh\left(\frac{x}{1+t}\right).$$

0.2. Γραμμικές Μερικές Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης και ταξινόμησή τους.

Στον $\mathbb{R}^2$, κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + \Gamma(x,y)u_{yy} + \Delta(x,y)u_x + E(x,y)u_y + Z(x,y)u = 0$$

καλείται **ομογενής γραμμική ΜΔΕ 2ης τάξης**, ενώ η

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + \Gamma(x,y)u_{yy} + \Delta(x,y)u_x + E(x,y)u_y + Z(x,y)u = f(x,y)$$

καλείται **μη ομογενής γραμμική ΜΔΕ 2ης τάξης**. Στις παραπάνω ισότητες οι $A, B, ..., Z$ και f είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις δυο μεταβλητών. Μια διδιάστατη γραμμική ΜΔΕ 2ης τάξης καλείται:

- **Ελλειπτική σε σημείο** (x_0, y_0), αν $(4A\Gamma - B^2)(x_0, y_0) > 0$.
- **Υπερβολική σε σημείο** (x_0, y_0), αν $(4A\Gamma - B^2)(x_0, y_0) < 0$.
- **Παραβολική σε σημείο** (x_0, y_0), αν $(4A\Gamma - B^2)(x_0, y_0) = 0$.

Η ταξινόμηση αυτή μας θυμίζει την ταξινόμηση δευτεροβάθμιων καμπύλων στο επίπεδο.

Αν η ΜΔΕ είναι π.χ. ελλειπτική σε κάθε σημείο χωρίου $E \subset \mathbb{R}^2$, τότε λέμε ότι η ΜΔΕ είναι ελλειπτική στο E. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις π.χ. ελλειπτικών γραμμικών ΜΔΕ 2ης τάξης είναι οι εξισώσεις Laplace και Poisson που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός γενικεύεται και για $n > 2$. Εστω $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ και $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$: $u = u(\mathbf{x})$ είναι πραγματική συνάρτηση. Κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{n} B_r(\mathbf{x}) u_{x_r}(\mathbf{x}) + \Gamma(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

όπου

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} A_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & A_{1n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(\mathbf{x}) & \cdots & A_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

είναι γνωστός $n\times n$ συμμετρικός πίνακας πραγματικών συναρτήσεων $n-$μεταβλητών και $B_r=B_r(\mathbf{x})$, $\Gamma=\Gamma(\mathbf{x})$, $f=f(\mathbf{x})$ είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις $n-$μεταβλητών, καλείται **μη ομογενής γραμμική ΜΔΕ n-τάξης**. Εστω $\mathbf{x}_0=\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ και $N_+(\mathbf{x}_0)$, $N_-(\mathbf{x}_0)$, $N_0(\mathbf{x}_0)$ είναι το πλήθος των θετικών, αρνητικών ή μηδενικών ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)$ αντιστοίχως. Τότε λέμε ότι η ανωτέρω ΜΔΕ είναι:

- **Ελλειπτική** στο σημείο $\mathbf{x}_0$, αν $N_+(\mathbf{x}_0)=n$, ή $N_-(\mathbf{x}_0)=n$.

- **Υπερβολική** στο σημείο $\mathbf{x}_0$, αν $N_+(\mathbf{x}_0)=n-1$ και $N_-(\mathbf{x}_0)=1$, ή $N_-(\mathbf{x}_0)=n-1$ και $N_+(\mathbf{x}_0)=1$.

- **Παραβολική** στο σημείο $\mathbf{x}_0$, αν $N_+(\mathbf{x}_0)=n-1$ και $N_0(\mathbf{x}_0)=1$, ή $N_-(\mathbf{x}_0)=n-1$ και $N_0(\mathbf{x}_0)=1$.

0.3. Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε την τάξη των κάτωθι ΜΔΕ:

Α) $2u_x + 3u_{y^2} + 2u_{x^2y^2} = u$, **Β)** $2u_{xz} - 3xu_{yz} + 2u_x - u_{x^3} = u^6 - 2x^2y$,

Γ) $-u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{y^2} = u^3$, **Δ)** $-u^3u_{xy} + u^2u_y + 2uu_{x^2y^2} = 1 + 2xyu$.

Απάντ. Α: 4, **Β:** 3, **Γ:** 2, **Δ:** 4.

2. Ποιες από τις παρακάτω ΜΔΕ είναι γραμμικές ημι-γραμμικές και σχεδόν γραμμικές;

Α) $2u_x + 3u_y - zu_z = 4u$, **Β)** $xu_x - yu_y = xyu$, **Γ)** $u^2u_x + 2xyu_y = 0$,

Δ) $2u_x + 3u_{y^2} + 2u_{x^2y^2} = u$, **Ε)** $2u_{xz} - 3xu_{yz} + 2u_x - u_{x^3} = u^6 - 2x^2y$,

Ζ) $-u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{y^2} = u^3$, **Η)** $-u^3u_{xy} + u^2u_y + 2uu_{x^2y^2} = 1 + 2xyu$.

Απάντ. Γραμμικές είναι οι Α, Β, Δ. Ημιγραμμικές είναι οι Ε και Ζ. Σχεδόν γραμμικές είναι οι Γ και Η.

3. Υπολογίστε τη γενική λύση των ΜΔΕ:

Α) $u_{xy} = xy$, **Β)** $u_{xyz} = z^2$, **Γ)** $u_x + u_y = 1$, **Δ)** $\begin{cases} u_x + 5u_y = 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$,

Ε) $xu_x - yu_y = 0,\ (x, y > 0)$, **Ζ)** $u_x + u_y - u = y$, **Η)** $\begin{cases} 3u_x + u_y = -3u \\ u(x,0) = |\eta\mu x| + 1 \end{cases}$,

Θ) $yu_x - xu_y = 2xyu,\ (x, y > 0)$, **Ι)** $x^2u_x + y^2u_y = (x+y)u,\ (x, y > 0)$,

Κ) $(y+u)u_x + u_y = -1$.

Απάντ. Α) $u(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{4} + a(x) + b(y)$,

Β) $u(x,y,z)=xy\dfrac{z^3}{3}+A(x,y)+B(x,z)+\Gamma(y,z)$,

Γ) $u(x,y)=x+a(x-y)$, **Δ)** $u(x,y)=\dfrac{25}{25+(y-3x)^2}$, **Ε)** $u(x,y)=A(xy)$,

Ζ) $u(x,y)=e^y a(x-y)-y-1$, **Η)** $u(x,y)=e^{-3y}\left(1+\eta\mu\left|x-3y\right|\right)$

Θ) $u(x,y)=e^{x^2}a(x^2+y^2)$, **Ι)** $u(x,y)=xyA\left(\dfrac{x-y}{xy}\right)$,

Κ) $u(x,y)=-y+A(g(x,y))$, για κατάλληλη A με συνεχή παράγωγο και τέτοια ώστε η εξίσωση $\phi(x,c,y)=x-A(c)y-y=0$ να επιλύεται ως προς *c* σε μια περιοχή του *(x,y)*, δηλαδή $c=g(x,y)$.

4. Ταξινομήστε τις γραμμικές ΜΔΕ 2ης τάξης:

Α) $3u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}+xu_y=0$, **Β)** $u_{xx}+xu_{yy}=0$, **Γ)** $u_{tt}=c^2u_{xx},\ c>0$,

Δ) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$, **Ε)** $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+3u_x+4u_y=0$,

Ζ) $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$, **Θ)** $(1+x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$.

Απάντ. Οι Α, Δ είναι ελλειπτικές στο $\mathbb{R}^2$.

- Η Β είναι ελλειπτική στο ημιεπίπεδο x>0, υπερβολική στο ημιεπίπεδο x<0 και παραβολική πάνω στην ευθεία x=0.
- Οι Γ και Ζ είναι υπερβολικές στο $\mathbb{R}^2$.
- Η Ε είναι παραβολική στο $\mathbb{R}^2$.
- Η Θ είναι παραβολική πάνω στην ευθεία y=0 και υπερβολική σε όλα τα υπόλοιπα σημεία.

5. Με χρήση του μετασχηματισμού $\begin{cases} u=y-3x \\ v=x+y \end{cases}$ επιλύστε στο $\mathbb{R}^2$ τη ΜΔΕ $\rho_{xx}+2\rho_{xy}-3\rho_{yy}=0$.

Απάντ.: $\rho(u,v)=A(u)+B(v)$, όπου $A,B\in C^2(\mathbb{R})$.

6. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} xu_t - 2u_x = 0 \\ u(x,0) = x \ , \ x,t \geq 0 \\ u(0,t) = 2\sqrt{t} \end{cases}.$$

Απάντ.: $u(x,t) = 2\sqrt{t + \frac{x^2}{4}}$.

7. Να επιλυθεί με τη μέθοδο Fourier το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,0) = e^{-|x|} \end{cases}, \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Απάντ.: $u(x,y) = e^{-\left|x+\frac{y}{3}\right|}$.