Νικόλαος Δ. Ατρέας

Αρμονική Ανάλυση

Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη 2015

Περιεχόμενα

Περίληψη. 4

Βιβλιογραφία. 6

Κεφάλαιο 0: Χώροι L_p.

0.1. Σύνοψη χώρων L_p. Ορισμοί και ιδιότητες αυτών. 15
0.2 Ασκήσεις. 17

Κεφάλαιο 1: Σειρές Fourier.

1.1 Εισαγωγή 17
1.2 Συντελεστές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. 19
1.3 Σειρές Fourier στον $L_2(\mathbf{T})$. 26
1.4 Θεώρημα Hausdorff-Young. Παρεμβολή Riesz-Thorin. 31
1.5 Προσεγγιστικές μονάδες και σύγκλιση. 34
1.6 Ο μετασχηματισμός Hilbert. Σύγκλιση κατά νόρμα σειρών Fourier στον $L_p(\mathbf{T})$. 39
1.7 Ο τελεστής Hilbert ως ιδιάζον ολοκληρωτικός τελεστής. 46
1.8 Συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις και μετασχ. Hilbert. 48
1.9 Ασκήσεις. 52

Κεφάλαιο 2: Μεγιστικές συναρτήσεις/τελεστές.

2.1 Εισαγωγή. 58
2.2 Το Θεώρημα Marcinkiewicz. 59
2.3 Μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood. 64
2.4 Προσεγγιστικές μονάδες και μεγιστικοί τελεστές. 67
2.5 Ασκήσεις. 72

Κεφάλαιο 3: Ολοκλήρωμα Fourier.

3.1 Εισαγωγή. 76
3.2 Ο μετασχηματισμός Fourier ολοκληρ. συναρτήσεων. 78
3.3 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L_2(\mathbb{R})$. 85
3.4 Ο Μετασχηματισμός Fourier στον $L_p(\mathbb{R})$. Γενικευμένες συναρτήσεις. 91

3.5 Θεώρημα αντιστροφής μέσω προσεγγιστικών μονάδων. 98
3.6 Ο μετασχηματισμός Hilbert. Ανάλυση Calderon-Zygmund. 101
3.7 Σύγκλιση ολοκληρωμάτων Fourier στον $L_p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$. 106
3.8 Συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις και μετασχ. Hilbert. 109
3.9 Χώροι Paley-Wiener. 111
3.10 Τελεστές Calderon-Zygmund. 115
3.11 Ασκήσεις. 119

Κεφάλαιο 4: Ανάλυση χρόνου/συχνότητας.

4.1 Εισαγωγή. 125
4.2 Ο συνεχής μετασχηματισμός Gabor. 126
4.3 Ο μετασχηματισμός Fourier βραχέος χρόνου. 131
4.4 Αρχή αβεβαιότητας. 134
4.5 Διακριτοποίηση. 136
4.6 Ο συνεχής μετασχηματισμός κυματιδίων. 139
4.7 Διακριτοποίηση. 146
4.8 Πολυδιακριτή Ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$. 148
4.9 Ασκήσεις. 160

Παράρτημα Α Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου και Ολοκλήρωσης. 162

Παράρτημα Β Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης. 176

Παράρτημα Γ 190

Περίληψη

Οι παρούσες σημειώσεις αποτελούν μια εισαγωγή στην Αρμονική Ανάλυση στην πραγματική ευθεία. Αφορμή για τη συγγραφή αυτών ήταν η ανάθεση διδασκαλίας του μαθήματος «Αρμονική Ανάλυση» του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ. γαι το Ακαδημαϊκό έτος 2015/16.

Στόχος των σημειώσεων είναι να καταλάβει ο φοιτητής πώς δομείται η βασική θεωρία της Αρμονικής Ανάλυσης όσον αφορά τόσο το θεωρητικό όσο και το εφαρμοσμένο κομμάτι αυτής και να διαπιστώσει τον τρόπο με τον οποίο η Αρμονική Ανάλυση φτάνει να αλληλεπιδρά με άλλους κλάδους της Ανάλυσης και όχι μόνον. Προφανώς υπάρχουν τμήματα θεωρίας που δεν καλύπτουν οι σημειώσεις, όπως π.χ. η θεωρία των πολλαπλασιαστών και η θεωρία Littlewood-Paley. Επίσης η θεωρία ιδιαζόντων τελεστών στον $\mathbb{R}^n$ και γενικότερα η θεωρία για τον $\mathbb{R}^n$. Η ενασχόληση με την πραγματική ευθεία έγινε για δυο λόγους: για να διευκολυνθεί ο φοιτητής και για να μπορέσει πιο ώριμα να γενικεύσει στον $\mathbb{R}^n$ κατανοώντας και αναγνωρίζοντας καλύτερα τις διαφορές με τον $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}$ κατ' ουσίαν υπάρχει ένας μόνον ιδιάζον τελεστής, ο τελεστής Hilbert, αλλά η θεωρία των ιδιαζόντων τελεστών στον $\mathbb{R}^n$ είναι πολύ πιο εκτεταμένη, π.χ. βλέπε δυναμικά Riesz κλπ.

Η δομή του συγγράμματος είναι η εξής:

Στο **Κεφάλαιο 0** παραθέτουμε μια σύντομη σύνοψη των χώρων L_p.

Στο **Κεφάλαιο 1** παραθέτουμε τη θεωρία των σειρών Fourier σε χώρους L_p. Μέσω αυτής βλέπουμε τη χρήση της παρεμβολής Riesz-Thorin και το φυσικό τρόπο με τον οποίο προκύπτει ο τελεστής Hilbert ως συνδετικός κρίκος με τους χώρους $H_p(\mathbf{T})$ της μιγαδικής ανάλυσης.

Στο **Κεφάλαιο 2** ορίζουμε και μελετούμε μεγιστικές συναρτήσεις και τελεστές. Παραθέτουμε το Θεώρημα παρεμβολής Marcinkiewicz ως βασικό εργαλείο μελέτης (και) τέτοιων τελεστών. Αναφέρουμε κλάσεις μεγιστικών τελεστών και αναδεικνύουμε το ρόλο τους όσον αφορά τη σύγκλιση σχεδόν παντού σε χώρους L_p.

Στο **Κεφάλαιο 3** μελετούμε το μετασχηματισμό Fourier σε χώρους $L_p(\mathbb{R})$ ως γενίκευση των σειρών Fourier. Βλέπουμε πώς προκύπτει με φυσικό τρόπο η θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων, ο ιδιάζον τελεστής Hilbert, οι χώροι H_p και οι χώροι Paley-Wiener με το Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon. Επίσης παίρνουμε μια πρώτη γεύση της θεωρίας ιδιαζόντων τελεστών ως φυσική γενίκευση του τελεστή Hilbert.

Στο **Κεφάλαιο 4** βλέπουμε πώς οι αδυναμίες του μετασχηματισμού Fourier μας ωθούν να ορίσουμε νέους μετασχηματισμούς οδηγώντας μας στην ανάλυση χρόνου/συχνότητας. Μελετούμε κυρίως τον ολοκληρωτικό μετασχηματικό Fourier βραχέος χρόνου και το μετασχηματισμό κυματιδίων και κάνουμε μια πολύ σύντομη εισαγωγή σε διακριτούς μετασχηματισμούς μέσω της πολυδιακριτής ανάλυσης κυματιδίων που χρησιμοποιείται ευρύτατα σε πλήθος εφαρμογών της σύγχρονης τεχνολογίας επικοινωνιών.

Βιβλιογραφία

1. John Benedetto, Harmonic Analysis and Applications, CRC Press, 1997.

2. Ingrid Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, CBMS Regional Conference series in Applied Mathematics Philadelphia, 1992.

3. Javier Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics, Vol .29, AMS, 2001.

4. H. Dym and H. P. McKean, Fourier series and Integrals, Academic Press, 1992.

5. Loukas Grafakos, Classical Fourier Analysis, Third edition, Springer.

6. Karlheinz Grochenig, Foundations of Time-Frequency Analysis, Birkhauser, Boston 2001.

7. Christopher Heil, Introduction to Harmonic analysis, Springer, 2010.

8. Yitzhak Katznelson, An Introduction to Harmonic analysis, Dover Publications, Inc New York, Second Edition.

9. Steven Krantz, Explorations in Harmonic Analysis with applications to Complex Function Theory and the Heisenberg Group, 2007.

10. W. Rudin, Real and Complex analysis, McGraw-Hill, 3rd Edition,1987.

11. E. Stein and R. Shakarchi. Fourier Analysis: An Introduction, Princeton University Press, 2003.

12. E. Stein. Harmonic Analysis: Real variable methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.

13. E. C. Titchmarch, Introduction to the theory of Fourier Series and Integrals, Oxford university Press, Second Edition.

Κεφάλαιο 0

Χώροι L_p

0.1. Σύνοψη χώρων L_p. Ορισμοί και ιδιότητες αυτών.

Εστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ είναι χώρος μέτρου. Συμβολίζουμε με $L_p(X,\mu)$, $1 \le p < \infty$ το χώρο Banach όλων των μετρήσιμων $p-$***ολοκληρώσιμων*** συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ με νόρμα

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Με $L_\infty(X,\mu)$ συμβολίζουμε το χώρο όλων των μετρήσιμων και ***ουσιωδώς φραγμένων*** συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$, δηλαδή

$$L_\infty = \left\{ f : X \to \mathbb{C} : \ \exists\, C > 0 : \ |f(x)| \le C \text{ μ-σχεδόν παντού στο } X \right\},$$

με νόρμα

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf\left\{ C > 0 : \ |f(x)| \le C \text{ μ-σχεδόν παντού στο } X \right\}.$$

Σημείωση. (α) Στο εξής όταν ο χώρος μέτρου είναι σαφής γράφουμε απλά L_p ή $L_p(X)$ αντί $L_p(X,\mu)$. Επίσης πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε για απλότητα και το συμβολισμό $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p}$ όταν αυτός δε δημιουργεί παρανοήσεις.

(β) Αν X είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο με το σύνηθες μέτρο αθροισιμότητας (βλ. Παράρτημα 1, ενότητα Α.1) χρησιμοποιούμε συνήθως το συμβολισμό $\ell_p(X)$ (αντί $L_p(X)$) με

$$\|f\|_{\ell_p} = \begin{cases} \left(\sum_{n\in X} |f(n)|^p\right)^{1/p} & 1 \le p < \infty \\ \sup\left\{ |f(n)| : \ n \in X \right\} & p = \infty \end{cases}.$$

Για λόγους ομοιογένειας, πολλές φορές θα συνεχίσουμε να γράφουμε $L_p(X,\mu)$ έστω κι αν το σύνολο X είναι το πολύ αριθμήσιμο,

έχοντας όμως κάθε φορά στο μυαλό μας τη σωστή ερμηνεία της νόρμας.

(γ) Αν X είναι μη αριθμήσιμο σύνολο, κάθε στοιχείο $f \in L_p$ είναι στην πραγματικότητα ένας αντιπρόσωπος μιας κλάσης ισοδυναμίας που περιλαμβάνει όλες τις συναρτήσεις που είναι $\mu-$σχεδόν παντού ίσες με την f στο X. **<u>Για απλότητα</u>** θεωρούμε τον $L_p(X,\mu)$ ως χώρο συναρτήσεων αντί χώρου κλάσεων ισοδυναμίας. Ετσι λοιπόν γράφουμε $f \in L_p$ έχοντας όμως στο μυαλό μας ότι η γραφή αυτή υπονοεί όλες τις συναρτήσεις που είναι $\mu-$σχεδόν παντού ίσες με την f.

(δ) Με βάση τα όσα είπαμε παραπάνω εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ο $\ell_\infty(X)$ είναι ο χώρος όλων των φραγμένων ακολουθιών στο X. Επίσης κάθε φραγμένη συνάρτηση f είναι αντιπρόσωπος μιας κλάσης ισοδυναμίας στο χώρο L_∞. Με άλλα λόγια, αν η f είναι φραγμένη στο X τότε

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup\left\{|f(x)|:\ x \in X\right\}.$$

(ε) Για κάθε $0 < p < 1$, οι χώροι L_p δεν είναι χώροι Banach ως προς την $\|\cdot\|$, αλλά είναι οιονεί χώροι Banach (quasi Banach spaces). Θεωρώντας ως μετρική την $d(f,g) = \|f-g\|_p^p$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι. Δεν θ' ασχοληθούμε με τέτοιους χώρους. Στα παρακάτω θεωρούμε πάντα $1 \le p \le \infty$.

Ορισμός 0.1 *Εστω $1 \le p,q \le \infty$. Οι p,q καλούνται **συζυγείς** ή **δυϊκοί εκθέτες** αν*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ας θυμηθούμε ορισμένες χρήσιμες ανισότητες στους χώρους L_p.

Πρόταση 0.1 (Ανισότητα Holder)

Εστω $1 \le p,q \le \infty$ είναι συζυγείς εκθέτες. Αν $f \in L_p(X,\mu)$ και $g \in L_q(\mathrm{X},\mu)$ τότε $fg \in L_1(X,\mu)$ και

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q .$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την Πρόταση για $1 < p,q < \infty$. Η περίπτωση $p=1,\ q=\infty$ (ή $p=\infty,\ q=1$) αφήνεται ως άσκηση. Η απόδειξη βασίζεται σε μια γενίκευση της ανισότητας αριθμητικού/γεωμετρικού μέσου: Αν $a,b \ge 0$ και $0 \le \theta \le 1$ τότε

$$a^{\theta} b^{1-\theta} \le a\theta + b(1-\theta) \qquad (1)$$

(για $\theta = 1/2$ παίρνουμε τη συνήθη ανισότητα αριθμητικού/γεωμετρικού μέσου). Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρούμε $\|f\|_p \ne 0$ και $\|g\|_q \ne 0$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $F = \dfrac{f}{\|f\|_p}$ και $G = \dfrac{g}{\|g\|_p}$ ικανοποιούν την ανισότητα $\|FG\|_1 \le 1$. Θέτουμε $a = |F|^p$, $b = |G|^q$ και $\theta = 1/p \Rightarrow 1-\theta = 1/q$ στην (1), οπότε

$$|F||G| \le \frac{1}{p}|F|^p + \frac{1}{q}|G|^q .$$

Με ολοκλήρωση προκύπτει το ζητούμενο. ■

Σημείωση. Στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, dx)$ έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|\, dx \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q\, dx\right)^{1/q} .$$

Στο χώρο μέτρου $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}, \mu)$ έχουμε:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)g(n)| \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^q\right)^{1/q} .$$

Πρόταση 0.2 (Ανισότητα Minkowski)

Αν $1 \le p \le \infty$ *και* $f,g \in L_p(X,\mu)$, *τότε:*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την Πρόταση για $1 \le p < \infty$. Η περίπτωση $p = \infty$ αφήνεται ως άσκηση. Προφανώς $f + g \in L_p(X, \mu)$. Εστω q είναι ο συζυγής εκθέτης του p όπως στον ορισμό 0.1. Τότε $p - 1 = \dfrac{p}{q}$ και $(f+g)^{p-1} \in L_q(X, \mu)$. Απ' την άλλη μεριά:

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \le |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}. \qquad (2)$$

Εφόσον $(f+g)^{p-1} \in L_q$, ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη της (2) και εφαρμόζοντας την ανισότητα Holder και στους δυο όρους του δεξιού μέλους της (2) για τους συζυγείς εκθέτες p, q, παίρνουμε

$$\|f+g\|_p^p \le \|f\|_p \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q + \|g\|_p \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q.$$

Αλλά $\left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q = \|f+g\|_p^{p/q}$. Διαιρώντας και τα δυο μέλη με την ποσότητα $\|f+g\|_p^{p/q}$ παίρνουμε το ζητούμενο. ■

Σημείωση. (α) Η ανισότητα Minkowski δεν ισχύει για $0 < p < 1$.

(β) Στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, dx)$ έχουμε:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p},$$

ενώ στο χώρο μέτρου $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}, \mu)$ έχουμε:

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n) + g(n)|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^p\right)^{1/p}.$$

Η ανισότητα Minkowski έχει και την ακόλουθη «εκδοχή» που καλούμε ***ολοκληρωτική ανισότητα Minkowski:*** Αν $f \in L_p(X, \mu)$, $g \in L_p(Y, \nu)$, τότε:

$$\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \le \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y).$$

Ας εστιάσουμε τώρα στους χώρους $L_p(X) := L_p(X,m)$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}$. Μιλώντας μη αυστηρά, ο χώρος $L_1(\mathbb{R})$ των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων περιλαμβάνει (μεταξύ άλλων) και συναρτήσεις με «τοπικά απότομες μεταβολές» (φραγμένες ή μη) που μπορεί να φθίνουν ή και να μη φθίνουν στο μηδέν όταν $|x| \to \infty$. Απ' την άλλη μεριά ο χώρος $L_\infty(\mathbb{R})$ περιλαμβάνει πιο «ομαλές» συναρτήσεις με την έννοια ότι παραμένουν πάντα (ουσιωδώς) φραγμένες. Ετσι για $1 \le p < q \le \infty$, υπό μια έννοια μετακινούμαστε σταδιακά από τις τοπικά απότομες προς τις πιο ομαλές περιπτώσεις. Αν $\mu(X) < \infty$, τότε $L_\infty(X) \subseteq L_1(X)$, οπότε διαισθητικά αναμένουμε ότι ο $L_1(X)$ θα πρέπει να περιέχει όλους τους «ενδιάμεσους» $L_p(X)$ χώρους. Πράγματι ισχύει η ακόλουθη:

Πρόταση 0.3

Εστω $X \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(X) < \infty$. Για κάθε $1 \le p < q \le \infty$ έχουμε

$$L_\infty(X) \subseteq L_q(X) \subseteq L_p(X) \subseteq L_1(X)$$

και

$$\|f\|_p \le \mu(X)^{1/p - 1/q} \ \|f\|_q .$$

Απόδειξη. Εστω $f \in L_q(X,\mu)$. Θεωρούμε $F = |f|^p$, $G = \chi_X$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα Holder για συζυγείς εκθέτες p_0, q_0 με $p_0 = \dfrac{q}{p} > 1$. Τότε:

$$\|F\ G\|_1 = \|f\|_p^p \le \|F\|_{p_0} \|\chi_X\|_{q_0} = \|f\|_q^p \, \mu(X)^{1-p/q} . \qquad \blacksquare$$

Αν $X = \mathbb{N}$ ή $X = \mathbb{Z}$ με το μέτρο αθροισιμότητας μ, τότε για κάθε $1 \le p < \infty$ η ποσότητα $\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty$ υπονοεί ότι $x_n \to 0$, άρα η $x = (x_n)$ είναι φραγμένη κι έτσι διαισθητικά νιώθουμε ότι όλοι οι χώροι ℓ_p θα πρέπει να είναι μέσα στον ℓ_∞. Πράγματι έχουμε:

Πρόταση 0.4

Αν $X=\mathbb{N}$ ή $X=\mathbb{Z}$ *και* $1\le p<q\le\infty$, *τότε:*

$$\ell_1(X)\subseteq\ell_p(X)\subseteq\ell_q(X)\subseteq\ell_\infty(X).$$

Απόδειξη. Εστω $x\in\ell_p(X)$. Τότε $\sup_n|x_n|\le\|x\|_p^p$. Απ' την άλλη μεριά

$$|x_n|^q=|x_n|^p|x_n|^{q-p}\le\left(\sup_n|x_n|\right)^{q-p}\|x\|_p^p\le\|x\|_p^{q-p}\|x\|_p^p=\|x\|_p^q\Leftrightarrow\|x\|_q\le\|x\|_p.\ \blacksquare$$

Αν $\mu(X)=\infty$ τότε η Πρόταση 0.3 δεν ισχύει. Με παραδείγματα μπορούμε να δούμε ότι κανένας χώρος $L_p(\mathbb{R})$ δεν περιέχεται αυστηρώς εντός κάποιου χώρου $L_q(\mathbb{R})$ και το αντίστροφο. Ισχύει όμως η ακόλουθη:

Πρόταση 0.5

Εστω $1\le p<r<q\le\infty$. *Τότε:*

$$L_p(\mathbb{R})\bigcap L_q(\mathbb{R})\subseteq L_r(\mathbb{R})\subseteq L_p(\mathbb{R})+L_q(\mathbb{R})$$

και

$$\|f\|_r\le\|f\|_p^\theta\ \|f\|_q^{1-\theta},\ \theta\in(0,1).$$

Απόδειξη. Εστω $f\in L_p(\mathbb{R})\bigcap L_q(\mathbb{R})$. Εφόσον $\frac{1}{p}>\frac{1}{r}>\frac{1}{q}$, υπάρχει μοναδικό $\theta\in(0,1)$ έτσι ώστε $\frac{1}{r}=\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{q}$. Μάλιστα

$$\theta=\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\quad\text{και}\quad 1-\theta=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Παρατηρούμε ότι $1=\frac{r\theta}{p}+\frac{r(1-\theta)}{q}$, άρα οι $\frac{p}{r\theta},\frac{q}{r(1-\theta)}$ είναι συζυγείς εκθέτες. Τότε από την ανισότητα Holder έχουμε

$$\|f\|_r = \left\|f^{\theta} f^{1-\theta}\right\|_r = \left\|f^{r\theta} f^{r(1-\theta)}\right\|_1^{1/r} \le \left\|f^{r\theta}\right\|_{p/(r\theta)}^{\theta/p} \left\|f^{r(1-\theta)}\right\|_{q/(r(1-\theta))}^{(1-\theta)/q} = \|f\|_p^{\theta} \|f\|_q^{1-\theta}.$$

Απ‘ την άλλη μεριά έστω $f \in L_r(\mathbb{R})$ και $A = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \ge 1\}$. Τότε

$$f = f\chi_A(x) + f\chi_{\mathbb{R}-A}(x) = g + h$$

Και

$$\begin{cases} |g|^p = |f|^p \chi_A(x) \le |f|^r \chi_A(x) \le |f|^r \Rightarrow \|g\|_p^p \le \|f\|_r^r < \infty \Rightarrow g \in L_p \\ |h|^q = |f|^q \chi_{\mathbb{R}-A}(x) \le |f|^r \chi_{\mathbb{R}-A}(x) \le |f|^r \Rightarrow \|h\|_q^q \le \|f\|_r^r < \infty \Rightarrow h \in L_q \end{cases}. \quad \blacksquare$$

Τέλος, υπενθυμίζουμε ορισμένα χρήσιμα θεωρήματα προσέγγισης στους χώρους L_p που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Πρόταση 0.6

Εστω $f \in L_p(X,\mu)$, όπου $1 \le p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων πάνω σε φραγμένο φορέα έτσι ώστε

$$\|\phi_n - f\|_p \to 0,\ n \to \infty.$$

Με άλλα λόγια ο χώρος των φραγμένων απλών συναρτήσεων πάνω σε φραγμένο φορέα είναι πυκνός στον $L_p(X,\mu)$.

Απόδειξη. Η f είναι εξ ορισμού μετρήσιμη. Οπως ήδη έχουμε δείξει στο Πόρισμα Α.1 του Παραρτήματος 1, υπάρχει ακολουθία $\{\phi_n\}$ απλών συναρτήσεων πάνω σε φραγμένο φορέα τέτοια ώστε

$$|\phi_n| \le |\phi_{n+1}| \le |f| \ \forall n \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \phi_n = f \ \text{σημειακά.}$$

Απ’ την άλλη μεριά:

$$|\phi_n - f|^p \le 2^p |f|^p \in L_1(X,\mu).$$

Απ’ το Θεώρημα Κυριαρχούμενης σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\|\phi_n - f\|_p \to 0,\ n \to \infty. \quad \blacksquare$$

Σημείωση. Αν $X = \mathbb{R}$ με το μέτρο Lebesgue, η παραπάνω πρόταση ισχύει αν αντί απλών συναρτήσεων χρησιμοποιήσουμε φραγμένες κλιμακωτές συναρτήσεις πάνω σε φραγμένο φορέα. Επειδή η χαρακτηριστική συνάρτηση σε φραγμένο σύνολο προσεγγίζεται από μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση 0.7

Εστω $f \in L_p(\mathbb{R})$, όπου $1 \le p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $\{g_n\}$ πάνω σε φραγμένο φορέα τέτοια ώστε

$$\|g_n - f\|_p \to 0,\ n \to \infty.$$

Τέλος υπενθυμίζουμε την ακόλουθη σημαντική πρόταση που σχετίζεται με τη δυϊκότητα των χώρων L_p:

Θεώρημα 0.1

Εστω $1 \le p < \infty$ και p,q είναι συζυγείς εκθέτες όπως στον ορισμό 0.1. Τότε ο δυϊκός του χώρου $L_p(X,\mu)$ είναι ο χώρος $L_q(X,\mu)$. Με άλλα λόγια

$$L_p^* = L_q$$

με την ακόλουθη έννοια: για κάθε φραγμένο συναρτησιακό $\Lambda \in L_p^*$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $g \in L_q$ τέτοιο ώστε

$$\Lambda f = \int_X fg\ d\mu \quad \forall f \in L_p\ .$$

Επιπλέον:

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p = 1} \left\{ \left| \int_X fg d\mu \right| \right\} = \|\Lambda\|.$$

Παρατήρηση 2. Ο δυϊκός χώρος του L_∞ **<u>δεν</u>** είναι ο L_1.

0.2. Ασκήσεις

1. Δείξτε τη γενικευμένη ανισότητα Holder: Αν $p,q,r \in [0,+\infty]$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, τότε: $\|fg\|_{L_r(X,\mu)} \le \|f\|_{L_p(X,\mu)} \|g\|_{L_q(X,\mu)}$.

Υπόδειξη: Σχηματίστε συζυγούς εκθέτες και εφαρμόστε την ανισότητα Holder.

2. Για $1 \le p,q < \infty$ δείξτε την ολοκληρωτική ανισότητα Minkowski:

Αν $f \in L_p(X,\mu)$, $g \in L_p(Y,\nu)$, τότε:

$$\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \le \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την έννοια της δυϊκότητας (βλέπε Θεώρημα 0.1 παραπάνω).

3. Δώστε παράδειγμα <u>συνεχούς</u> συνάρτησης $f \in L_1(\mathbb{R})$ με $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) \ne 0$.

4. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι

$$f \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0.$$

5. Εστω $a,b \in \mathbb{R}$ με $a<b$ και $1 \le p < q \le \infty$. Δείξτε με παράδειγμα ότι $L_q[a,b] \subset L_p[a,b]$. Με άλλα λόγια ο $L_q[a,b]$ είναι <u>γνήσιο</u> υποσύνολο του $L_p[a,b]$.

6. Βρείτε συνάρτηση $f \in L_p(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $f \notin L_q(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \le p < q \le \infty$.

7. Εστω $1 \le p < \infty, f, f_n \in L_p(X,\mu)$ και $f_n \to f$ σημειακά. Δείξτε ότι $\lim_n \|f - f_n\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_n \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

8. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(X,\mu)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(X,\mu)$, όπου p,q συζυγείς εκθέτες, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(X,\mu)$.

9. Εστω $\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_k}=1,\ k\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\|f_1\ldots f_k\|_{L_1(X,\mu)} \le \|f_1\|_{L_{p_1}(X,\mu)}\ldots\|f_k\|_{L_{p_k}(X,\mu)},$$

όπου f_i είναι μετρήσιμες συναρτήσεις στον $L_{p_i}(X,\mu)$ αντιστοίχως.

10. Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα σε γραμμικό χώρο V, δείξτε ότι για κάθε $f,g\in V$ ισχύει

$$\big|\ \|f\|-\|g\|\ \big| \le \|f-g\|.$$

Κεφάλαιο 1

Σειρές Fourier

1.1 Εισαγωγή

Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι αναλυτική συνάρτηση, δηλαδή απειροδιαφορίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

σημειακά για όλα τα x σε κάποιο διάστημα κέντρου x_0. Τότε η (1) μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής:

Αν είναι γνωστή η τιμή $f(x_0)$ καθώς επίσης και όλες τις τιμές των παραγώγων της f σε κάποιο σημείο x_0, τότε η f ανακατασκευάζεται (με μοναδικό τρόπο) «τοπικά» στο x_0 μέσω της (1).

Δηλαδή από το διακριτό σύνολο $\left\{f^{(n)}(x_0):\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα «συνεχές», τη συνάρτηση f (τοπικά στο x_0), με σχετικά απλό τρόπο. Δυστυχώς το πλήθος των αναλυτικών συναρτήσεων είναι «μικρό» με την έννοια ότι η αναλυτικότητα είναι μια ισχυρή ιδιότητα. Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να έχουμε κάτι παρόμοιο της (1) για κλάσεις συναρτήσεων με ιδιότητες ασθενέστερες της αναλυτικότητας.

Ο J. Fourier ισχυρίσθηκε ότι κάθε περιοδική συνάρτηση f μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων, τη λεγόμενη σειρά Fourier της f. Αν και ο ισχυρισμός δεν ισχύει για κάθε περιοδική συνάρτηση, εν τούτοις ισχύει για μια αρκετά μεγάλη κλάση περιοδικών συναρτήσεων όπως θα δούμε παρακάτω. Το σημαντικό δε είναι ότι οι ιδέες του Fourier γενικεύονται και σε κλάσεις μη κατ' ανάγκην περιοδικών συναρτήσεων.

Οι σειρές Fourier μπορούν να ερμηνευθούν απ' την οπτική γωνία της μετατροπής περιοδικού (και όχι μόνον) αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Μιλώντας μη αυστηρά μπορούμε να πούμε το εξής:

Υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, η γνώση μιας κατάλληλα επιλεγμένης ακολουθίας αριθμών (που οι τιμές τους εξαρτώνται από μια συνάρτηση) αρκεί για να μας εξασφαλίσει τη γνώση ολόκληρης της συνάρτησης με κάποια έννοια.

Η ανάλυση Fourier θεωρείται εκ των θεμελίων της Αρμονικής Ανάλυσης, η δε ιδέα του Fourier αποτέλεσε τη βάση της σύγχρο-νης θεωρίας επικοινωνιών.

1.2 Συντελεστές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ καλείται περιοδική με περίοδο $T>0$ αν $f(x)=f(x+T)$ για κάθε x και ο T είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει αυτή η σχέση. Κάθε περιοδική συνάρτηση αρκεί να μελετηθεί σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους ίσου με την περίοδό της. Εφόσον κάθε $T-$περιοδική συνάρτηση f μπορεί να αναχθεί σε $1-$περιοδική μέσω διαστολής (με την έννοια ότι η $f(Tx)$ είναι $1-$περιοδική) και αντιστρόφως, στο Κεφάλαιο αυτό για απλότητα ασχολούμαστε μόνον με $1-$περιοδικές συναρτήσεις.

Ορισμός 1.1 *Για κάθε ακολουθία $c=\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ μιγαδικών αριθμών και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ καλούμε **τριγωνομετρική σειρά** το ανάπτυγμα*

$$P(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi inx},$$

*όπου το σύμβολο $\sim$ δηλώνει απλά την ονοματοδοσία του δεξιού μέλους με P (το οποίο μπορεί να συγκλίνει ή όχι) και όχι ισότητα. Το $N-$**ιοστό μερικό άθροισμα της τριγωνομετρικής σειράς** P ορίζεται ως*

$$P_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{2\pi inx},$$

*είναι καλά ορισμένο και για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\{c_n:\ n=-N,...,N\}$, τα στοιχεία P_N ορίζουν το λεγόμενο χώρο $\boldsymbol{P}_N$ των **τριγωνομετρικών πολυωνύμων** βαθμού N.*

Προφανώς κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο P_N είναι $1-$περιοδική συνάρτηση, διότι όλες οι συναρτήσεις $e^{2\pi inx}$ είναι $1-$περιοδικές για κάθε $|n|\le N$. Επίσης:

$$\boldsymbol{P}_N\subset C_0(\mathbf{T}),$$

όπου

$$\mathbf{T}=[0,1)$$

και στο εξής $C_0:=C_0(\mathbf{T})$ θεωρούμε το χώρο Banach όλων των συνεχών 1-περιοδικών συναρτήσεων με τη συνήθη νόρμα

$$\|f\|_{C_0} = \sup_{x\in\mathbf{T}} |f(x)|.$$

Για $N \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$\mathrm{E}_N = \left\{ e^{2\pi inx} : \ n = 0, \pm 1, \ldots \pm N \right\}$$

είναι μια βάση του χώρου $\boldsymbol{P}_N$ (π.χ. δείξτε ότι η ορίζουσα Wronsky των στοιχείων του συνόλου E_N είναι μη μηδενική στο $x = 0$) και η μοναδική ακολουθία συντελεστών $\{c_n\}_{n=-N}^{N}$ του πολυωνύμου P_N υπολογίζεται εύκολα ως εξής

$$P_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi inx} \Leftrightarrow P_N(x) e^{-2\pi imx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i(n-m)x}, \ |m| \le N$$

$$\Rightarrow \int_0^1 P_N(x) e^{-2\pi imx} dx = \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x} dx \Rightarrow c_m = \int_0^1 P_N(x) e^{-2\pi imx} dx,$$

διότι

$$\int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x} dx = \delta_{m,n},$$

όπου δ είναι το σύμβολο του kronecker

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \ne n \end{cases}.$$

Ετσι κάθε στοιχείο του χώρου $\boldsymbol{P}_N$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$P_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_0^1 P_N(x) e^{-2\pi inx} dx \right) e^{2\pi inx}. \qquad (2)$$

Εστω

$$\mathbf{P} := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inx} : \ c_n \ne 0 \text{ μόνο για πεπερασμένο πλήθος δεικτών } n \right\}$$

είναι ο χώρος όλων των ***τριγωνομετρικών πολυωνύμων***. Τότε $\mathbf{P}_N \subset \mathbf{P} \ \forall N \in \mathbb{N}$ και ο $\mathbf{P}$ είναι πυκνός στο χώρο C_0.

Θεώρημα 1.1 (Stone-Weierstrass)*

Εστω $f \in C_0(\mathbf{T})$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει στοιχείο $g \in \mathbf{P}$ έτσι ώστε $\|f - g\|_{C_0} < \varepsilon$. ■

Παρατήρηση. Υπάρχουν τριγωνομετρικές σειρές $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ που συγκλίνουν σημειακά στο μηδέν αλλά η ακολουθία συντελεστών $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ **δεν** είναι μηδενική (Menshov 1916). Αρα, εν γένει **δεν** έχουμε μοναδικότητα αναπαράστασης. Απ' την άλλη μεριά, το θεώρημα 1.1 μας εξασφαλίζει ότι κάθε συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση προσεγγίζεται ομοιόμορφα από μια ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων στο χώρο $\mathbf{P}$. Δεν είναι όμως σαφές και ούτε αληθές ότι κάθε τέτοιο πολυώνυμο είναι **πάντα** μερικό άθροισμα **της ίδιας τριγωνομετρικής σειράς**. Το ερώτημα που προκύπτει είναι κάτω από ποιες προϋποθέσεις πάνω σε μια 1-περιοδική συνάρτηση f (και αν) μπορούμε να πετύχουμε μοναδική αναπαράσταση της f από μια σχέση

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 f(x) e^{-2\pi inx} dx \right) e^{2\pi in\cdot} \tag{3}$$

(που θυμίζει τη (2)) και αν ναι με ποια έννοια. Η (3) υπονοεί ότι η f θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ολοκληρώσιμη στο $\mathbf{T}$.

Ορισμός 1.2 *Εστω $f : \mathbf{T} \to \mathbb{C}$ είναι μια μετρήσιμη, $1-$περιοδική και Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση, δηλαδή $f \in L_1 := L_1(\mathbf{T})$ και*

$$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}} = \{ x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \ x = \{x_n\} \}$$

είναι ο χώρος όλων των μιγαδικών ακολουθιών. Τότε ο γραμμικός τελεστής

$$\hat{S} : L_1 \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \ \ \hat{S} f = \left\{ \hat{f}(n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}, \tag{4}$$

όπου

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbf{T}} f(x) e^{-2\pi inx} dx, \tag{4α}$$

* Αμεση εφαρμογή για $f(t) = F\left(e^{2\pi int}\right)$.

είναι καλά ορισμένος. Η εικόνα $\hat{S}f = \left\{\hat{f}(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *καλείται* ***μετασχηματισμός Fourier*** *της* f. *Κάθε όρος* $\hat{f}(n)$ *καλείται* ***συντελεστής Fourier*** *της* f. *Στο εξής θα χρησιμοποιούμε για απλότητα και το συμβολισμό*

$$\hat{f} := \hat{S}f = \left\{\hat{f}(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}. \qquad \blacksquare$$

Σημείωση. Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρούμε πάντα μετρήσιμες και 1-περιοδικές συναρτήσεις πάνω στο σύνολο $\mathbf{T}$. Για απλότητα συμβολίζουμε με

- $L_p := L_p(\mathbf{T})$ τους χώρους των $p-$ολοκληρώσιμων 1-περιοδικών συναρτήσεων στο $\mathbf{T}$,
- $C_k := C_k(\mathbf{T}),\ k = 0,1,2,...$ τους χώρους των 1-περιοδικών, $k-$παραγωγίσιμων συναρτήσεων με συνεχή k-παράγωγο στο $\mathbf{T}$ (για $k=0$ $C_0 := C_0(\mathbf{T})$ είναι ο χώρος των συνεχών, 1-περιοδικών συναρτήσεων στο $\mathbf{T}$ όπως παραπάνω)
- $\ell_p := \ell_p(\mathbb{Z})$ τους χώρους των $p-$αθροίσιμων (φραγμένων για $p=\infty$) μιγαδικών ακολουθιών στο $\mathbb{Z}$,

με τις συνήθεις νόρμες, βλέπε Κεφάλαιο 0. Υπενθυμίζουμε ότι

$$C_k \subset ... \subset C_1 \subset C_0 \subset L_\infty \subset L_q \subset L_p \subset L_1,\ \ 1 < p < q < \infty$$

και

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset \ell_\infty,\ 1 \le p < q \le \infty.$$

Από τον ορισμό 1.2 έπεται ότι η ακολουθία $\hat{f}$ είναι φραγμένη, διότι

$$\left|\hat{f}(n)\right| \le \int_0^1 \left|f(x)\right| dx = \|f\|_{L_1}.$$

Αρα:

$$\left\|\hat{f}\right\|_{\ell_\infty} \le \|f\|_{L_1} \tag{5}$$

και έτσι η εικόνα $R\left(\hat{S}\right)$ του τελεστή $\hat{S}$ είναι εντός του χώρου ℓ_∞ των φραγμένων ακολουθιών. Λόγω της (5), η (4) γίνεται

$$\hat{S}: L_1 \to \ell_\infty .$$

Πρόταση 1.1 *Εστω* $f, g \in L_1(\mathbf{T})$ *και* $n \in \mathbb{Z}$. *Τότε:*

Φ1. $\widehat{(af+bg)}(n) = a\hat{f}(n) + b\hat{g}(n), \quad \forall a,b \in \mathbb{C}$ *(γραμμικότητα).*

Φ2. *Αν* $f_\tau = f(\cdot - \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$\widehat{f_\tau}(n) = \hat{f}(n) e^{-2\pi i n \tau} \text{ (μετάθεση στο χρόνο).}$$

Φ3. *Για* $m \in \mathbb{Z}$: $\widehat{e^{2\pi i m \cdot} f}(n) = \hat{f}(n-m)$ *(μετάθεση στις συχνότητες).*

Φ4. $\overline{\hat{f}}(-n) = \widehat{\overline{f}}(n)$.

Φ5. *Αν* $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ *και* $\hat{f}(0) = 0$, *τότε η* F *είναι απόλυτα συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση και*

$$\hat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{2\pi i n},\ \ n \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ (αντιπαράγωγος στο χρόνο).}$$

Φ6. *Αν* $f \in C_k$, *τότε:*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\pi i n)^k \hat{f}(n) \text{ (παράγωγοι στο χρόνο).}$$

Φ7. *Εστω*

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{T}} f(x-t) g(t)\,dt$$

είναι η συνέλιξη των f *και* g. *Τότε η* $f * g$ *είναι καλά ορισμένη και Lebesgue ολοκληρώσιμη στο* $\mathbf{T}$ *και*

$$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n).$$

Λήμμα 1.1 (Μοναδικότητας)

Αν $f, g \in L_1(\mathbf{T})$ *και* $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)\ \forall n \in \mathbb{Z}$, *τότε* $f = g$ *σ.π. στο* $\mathbf{T}$.

Απόδειξη. Εστω $h = f - g$ και $H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$. Τότε $H \in C_0$. Ορίζουμε $F = H - \widehat{H}(0)$. Τότε $\widehat{F}(0) = 0$, $F' = h$ σ.π. στο $\mathbf{T}$ και

$$\hat{F}(n) = \frac{\hat{h}(n)}{2\pi i n} = 0 \quad \text{για κάθε } n \neq 0 \ ,$$

λόγω της ιδιότητας Φ5 και της υπόθεσης. Εστω $\mathbf{P}$ ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων και $g \in \mathbf{P}$. Τότε $g \in \boldsymbol{P}_N$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$ και

$$\int_{\mathbf{T}} F(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n(g)}\widehat{F}(n) = 0 . \qquad (6)$$

Αλλά ο $\mathbf{P}$ είναι πυκνός στο C_0 (βλ. θεώρημα 1.1), συνεπώς υπάρχει ακολουθία $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbf{P}$ τέτοια ώστε $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = F(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbf{T}$. Τότε

$$\int_{\mathbf{T}} |F(x)|^2 dx = \int_{\mathbf{T}} F(x)\overline{F(x)}dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{T}} F(x)\overline{g_k(x)}dx = 0 ,$$

λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης και της (6). Αρα $F = 0$ παντού στο $\mathbf{T}$. Τότε $F' = 0 \Rightarrow H' = 0 \Rightarrow h = 0$ σ.π. στο $\mathbf{T}$. ■

Λήμμα 1.2 (Riemann-Lebesgue)

Αν $f \in L_1(\mathbf{T})$, *τότε* $\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$.

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ και τριγωνομετρικό πολυώνυμο $P_N \in \mathbf{P}$ έτσι ώστε $\|f - P_N\|_{L_1} < \varepsilon$ (διότι ο $\mathbf{P}$ είναι πυκνός στο C_0, ο C_0 είναι πυκνός* στο L_1 και $\|\cdot\|_{L_1} \le \|\cdot\|_{C_0}$ εφόσον $C_0 \subset L_1$). Αρα για κάθε $|n| > N$

$$\left|\hat{f}(n)\right| = \left|\int_{\mathbf{T}} \left(f(x) - P_N(x)\right)e^{-2\pi i n x}dx + \int_{\mathbf{T}} P_N(x)e^{-2\pi i n x}dx\right|$$

* Χρησιμοποιώντας το γενικό θεώρημα ότι ο χώρος $C_0(X,\mu)$ των συνεχών συναρτήσεων πάνω σε φραγμένο φορέα είναι πυκνός στον $L_1(X,\mu)$, μπορεί να δειχθεί ως άσκηση ότι ο χώρος $C_0(\mathbf{T})$ των συνεχών 1-περιοδικών συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L_1(\mathbf{T})$, το χώρο των 1-περιοδικών και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

$$=\left|\int_{\mathbf{T}}\left(f(x)-P_N(x)\right)e^{-2\pi inx}dx\right|\le\left\|f-P_N\right\|_{L_1}<\varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Εστω

$$\mathbf{c}_0:=\mathbf{c}_0(\mathbb{Z})=\left\{x:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}:\ \lim_{|n|\to\infty}x(n)=0\right\}$$

είναι ο χώρος όλων των μηδενικών μιγαδικών ακολουθιών, δηλαδή όλων των ακολουθιών με όριο το μηδέν. Από το Λήμμα Riemann-Lebesgue προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ (βλέπε (4)) είναι μια ακολουθία μέσα στο χώρο $\mathbf{c}_0:=\mathbf{c}_0(\mathbb{Z})\subset\ell_\infty(\mathbb{Z})$, άρα

$$\widehat{S}:L_1\to\mathbf{c}_0.$$

Επίσης απ' το Λήμμα 1.1 προκύπτει ότι η απεικόνιση $\widehat{S}$ είναι **1-1**. **Δεν** είναι όμως επί του χώρου $\mathbf{c}_0$. Με άλλα λόγια υπάρχουν ακολουθίες στο $\mathbf{c}_0$ που **<u>δεν</u>** είναι συντελεστές Fourier καμιάς ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Μια **αναγκαία** συνθήκη ώστε οι συντελεστές c_n μιας τριγωνομετρικής σειράς να είναι συντελεστές Fourier είναι η εξής:

Αν $f\in L_1$ είναι τέτοια ώστε $\widehat{f}(|n|)=-\widehat{f}(-|n|)\ge 0$, τότε

$$\sum_{|n|\ne 0}\hat{f}(n)/n<\infty.$$

Το πρόβλημα του χαρακτηρισμού της εικόνας του τελεστή $\widehat{S}$ είναι εξαιρετικά δύσκολο. Τέλος, από τις ιδιότητες Φ5 και Φ6 σε συνδυασμό με το Λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε:

- Αν $f\in L_1$ είναι απόλυτα συνεχής, τότε $\hat{f}(n)=o(1/|n|)$.
- Αν $f^{(k)}\in L_1(\mathbf{T})$, τότε $\widehat{f}(n)=o\left(1/|n|^k\right)$.

(Υπενθυμίζουμε ότι $a_n=o(|b_n|)$ αν $|a_n/b_n|\to 0,\ |n|\to\infty$). Ετσι, το πόσο «λεία» είναι η f αντανακλάται στην **τάξη** με την οποία οι συντελεστές Fourier της f τείνουν στο μηδέν. Για το αντίστροφο ισχύει ότι $|n|^p\left|\widehat{f}(n)\right|\le C\Rightarrow f\in C_{p-2}\ (p>2)$.

1.3 Σειρές Fourier στον $L_2(\mathbf{T})$

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

$$\hat{f}(n)=\int_{\mathbf{T}} f(x)e^{-2\pi inx}dx,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Για πιο λόγο όμως να το κάνουμε αυτό και τι κερδίζουμε;

Εξ υποθέσεως, η f είναι 1-περιοδική. Ομως και οι 1/2-περιοδικές, 1/3-περιοδικές,…,$1/N$-περιοδικές συναρτήσεις είναι επίσης 1-περιοδικές συναρτήσεις, όπως και οι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών. Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$\sigma\upsilon\nu(2\pi Nx)=\frac{e^{2\pi iNx}+e^{-2\pi iNx}}{2} \text{ και } \eta\mu(2\pi Nx)=\frac{e^{2\pi iNx}-e^{-2\pi iNx}}{2i},\ N\in\mathbb{N},$$

όπου οι $\sigma\upsilon\nu(2\pi Nx)$, $\eta\mu(2\pi Nx)$ είναι $1/N$-περιοδικές συναρτήσεις, δηλαδή το N είναι η συχνότητα (σε Hz) που μετρά το πλήθος των ταλαντώσεων ανά sec (που θεωρούμε ως μια περίοδο). Η τιμή λοιπόν του $\int_{\mathbf{T}} f(x)e^{-2\pi inx}dx$ είναι ένα μέτρο της συσχέτισης της ταλάντωσης (του πραγματικού και φανταστικού μέρους) της f στο $\mathbf{T}$ με την $n-$ιοστή ταλάντωση (του πραγματικού και φανταστικού μέρους) της $e^{-2\pi inx}$. Για παράδειγμα, αν η f είναι πραγματική συνάρτηση, τότε $\hat{f}(n)=\overline{\hat{f}(-n)}$ και ο αριθμός $\left|\hat{f}(n)\right|$ ($n\geq 0$) μας δίνει μια ένδειξη (ένα μέτρο) του κατά πόσο η 1-περιοδική συνάρτηση f περιέχει ένα ουσιώδες «συστατικό» n-ιοστής συχνότητας. Με άλλα λόγια αναλύουμε την f στις λεγόμενες ***αρμονικές*** της ή ***αρμονικές συνιστώσες*** της. Φυσικά είναι σημαντικό να βρούμε συνθήκες ώστε να μπορούμε να ανακατασκευάζουμε με μοναδικό τρόπο και με κάποια έννοια την f από την ακολουθία των συντελεστών Fourier $\hat{f}$ έτσι ώστε να περνάμε από το διακριτό/ψηφιακό πεδίο στο συνεχές/αναλογικό πεδίο. Αυτό είναι το αντικείμενο της παραγράφου. Εστω λοιπόν

$$\hat{S}:L_1\to\mathbf{c}_0:\ \hat{S}f=\left\{\hat{f}(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier όπως παραπάνω. Είδαμε ότι ο

χαρακτηρισμός της εικόνας του $\hat{S}$ είναι ουσιαστικά άλυτος. Θέτουμε το πρόβλημα ως εξής:

- Μπορούμε να περιορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ορισμού του $\hat{S}$ ώστε η εικόνα του $\hat{S}$ να μπορεί εύκολα να χαρακτηρισθεί και ο $\hat{S}$ να είναι αντιστρέψιμος; Αν ναι, υπάρχει και το ερώτημα:

- Ποια είναι η μορφή του $\hat{S}^{-1}$;

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε $f \in L_2 \subset L_1$ για να εκμεταλλευθούμε τα εργαλεία των χώρων Hilbert (για περισσότερα βλέπε την παράγραφο Β.3 στο Παράρτημα Β). Υπενθυμίζουμε ότι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του L_2 είναι το

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{T}} f(x)\overline{g(x)}dx .$$

Προφανώς:

$$\left\langle e^{2\pi in\cdot}, e^{2\pi im\cdot} \right\rangle = \int_{\mathbf{T}} e^{2\pi i(n-m)x}dx = \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x}dx = \delta_{m,n} ,$$

άρα το σύνολο

$$\Phi = \left\{ e^{2\pi in\cdot} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \in L_2$$

είναι ορθοκανονικό. Επίσης

$$L_2(\mathbf{T}) = \overline{span}(\Phi) = \overline{\left\{ \sum_n c_n e^{2\pi in\cdot} : \ c_n \neq 0 \text{ για πεπερασμένο πλήθος } n \right\}} ,$$

αλλιώς $\overline{span}(\Phi)^{\perp} \neq \{0\}$, άτοπο λόγω του Λήμματος Μοναδικότητας 1.1. Αρα το Φ είναι μια ορθοκανονική βάση στον L_2 και συνεπώς ισχύει η ταυτότητα Parseval (βλέπε Παράρτημα Β)

$$\|f\|_{L_2}^2 = \sum_n \left| \left\langle f, e^{2\pi in\cdot} \right\rangle \right|^2 = \left\| \hat{S}f \right\|_{\ell_2}^2 \quad \forall f \in L_2 \tag{7}$$

(βλ. θεώρημα Β4, Παράρτ. Β), όπου $\ell_2 := \ell_2(\mathbb{Z})$ είναι ο χώρος Hilbert των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle c, d \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}, \quad c = (c_n), d = (d_n) \in \ell_2 .$$

Αν λοιπόν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού Fourier $\hat{S}$ στο χώρο L_2, τότε $\hat{f} = \hat{S}f \in \ell_2$. Με άλλα λόγια

$$\hat{S} : L_2 \to \ell_2 : \quad \hat{S}g = \left\{ \hat{g}(n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

και επιπλέον ο $\hat{S}$ είναι ισομετρία (λόγω (7)), άρα είναι και 1-1. Επίσης είναι και επί του ℓ_2, διότι $R\left(\hat{S}\right)^{\perp} = \{0\}$ όπου $R\left(\hat{S}\right)$ είναι η εικόνα του $\hat{S}$. Πράγματι, αν $h \in R\left(\hat{S}\right)^{\perp}$, τότε για κάθε $\hat{f} \in R\left(\hat{S}\right)$

$$\left\langle h, \hat{f} \right\rangle = 0 \quad \forall \hat{f} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \overline{\hat{f}(n)} = 0 \ \forall \hat{f} \ \Rightarrow \ h(n) = 0 \ \forall n$$

όπου η τελευταία συνεπαγωγή προκύπτει διαλέγοντας $\hat{f}(n) = \delta_{n,0}$. Συνεπώς η εικόνα $R\left(\hat{S}\right)$ είναι πυκνή στον ℓ_2 και ο $\hat{S}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, άρα ορθοκανονικός (βλ. Παράρτημα Β). Δηλαδή

$$\hat{S}^{-1} = \hat{S}^{*},$$

όπου

$$\hat{S}^{*} : \ell_2 \to L_2$$

είναι ο συζυγής τελεστής του $\hat{S}$ (βλέπε πρόταση Β.3, Παράρτ. Β), που ορίζεται μέσω της ισότητας

$$\left\langle \hat{S}f, c \right\rangle_{\ell_2} = \left\langle f, \hat{S}^{*}c \right\rangle_{L_2}. \tag{8}$$

Αλλά από την (8):

$$\left\langle \hat{S}f, c \right\rangle_{\ell_2} = \left\langle f, \hat{S}^{*}c \right\rangle_{L_2} \Leftrightarrow \left\langle \hat{f}, c \right\rangle_{\ell_2} = \left\langle f, \hat{S}^{*}c \right\rangle_{L_2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_n \hat{f}(n) \overline{c(n)} = \left\langle f, \hat{S}^{*}c \right\rangle_{L_2} \Leftrightarrow \left\langle f, \sum_n c_n e^{2\pi i n \cdot} \right\rangle_{L_2} = \left\langle f, \hat{S}^{*}c \right\rangle_{L_2},$$

συνεπώς:

$$\boxed{\hat{S}^{*}c = \sum_n c_n e^{2\pi i n \cdot}}$$

Ορίζουμε τώρα τη σύνθετη απεικόνιση

$$\hat{S}^*\hat{S}: L_2 \to L_2 : \ \hat{S}^*\hat{S}f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, e^{2\pi in\bullet} \right\rangle e^{2\pi in\bullet} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi in\bullet}.$$

Τότε

$$\boxed{f = \hat{S}^*\hat{S}f \Leftrightarrow f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi in\bullet},}$$

όπου η σύγκλιση είναι με τη νόρμα του L_2. Ο τελεστής $\hat{S}$ καλείται και ως ***τελεστής ανάλυσης*** και ο $\hat{S}^*$ καλείται και ως τελεστής ***σύνθεσης*** ή ***αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier*** της $\hat{f}$. Ο σύνθετος τελεστής

$$\hat{S}^*\hat{S} := Tf$$

καλείται ***σειρά Fourier*** της f. Ετσι δείξαμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.2 (Riesz-Fischer) *Ο μετασχηματισμός Fourier*

$$\hat{S}: L_2(\mathbf{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z}) : \ \hat{f}(n) = \int_{\mathbf{T}} f(x) e^{-2\pi inx} dx$$

*είναι μια **ισομετρία επί** του $\ell_2(\mathbb{Z})$. Με άλλα λόγια, σε κάθε ακολουθία $\{c_n\} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ αντιστοιχεί μοναδική συνάρτηση $f \in L_2(\mathbf{T})$ τέτοια ώστε*

- $c_n = \hat{f}(n)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *και*

- $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi in\bullet}$ *κατά νόρμα, δηλαδή*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi in\bullet} \right\|_{L_2(\mathbf{T})} = 0.$$

Το σύνολο $\left\{ e^{2\pi inx} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ είναι μια ορθοκανική βάση του $L_2(\mathbb{R})$ και για κάθε $f, g \in L_2$ ισχύει η ταυτότητα Parseval

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle_{\ell_2}. \qquad \blacksquare$$

Δυστυχώς η σύγκλιση κατά νόρμα δε συνεπάγεται τη σημειακή σύγκλιση. Οσον αφορά τη σημειακή σύγκλιση σ.π. αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το πολύ σημαντικό

Θεώρημα 1.3 (Carleson) Η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_2$ συγκλίνει σημειακά στην f σχεδόν παντού στο $\mathbf{T}$. ■

1.4 Θεώρημα Hausdorff-Young. Παρεμβολή Riesz-Thorin.

Αν θέλουμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου σε χώρους L_p τότε τα πράγματα δυσκολεύουν. Υπό μια έννοια χάνουμε τα εργαλεία των χώρων Hilbert τα οποία πρέπει να αντικατασταθούν με νέα. Τουλάχιστον γνωρίζουμε ότι $L_p \subset L_1$, οπότε η ακολουθία των συντελεστών Fourier είναι καλά ορισμένη στον L_p. Ισχύει όμως και κάτι περισσότερο:

Θεώρημα 1.4 (Hausdorff-Young) *Εστω* $1 < p < 2$ *και* q *είναι ο συζυγής εκθέτης του* p*. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier*

$$\hat{S} : L_p \to \ell_q : \ \hat{S}f = \left\{ \hat{f}(n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

είναι φραγμένος και $\left\| \hat{f} \right\|_{\ell_q} \le \| f \|_{L_p}$ *(αλλά ο* $\hat{S}$ δεν είναι επί του ℓ_q*).*

Η απόδειξη του θεωρήματος 1.4 βασίζεται σ' ένα σημαντικό Θεώρημα παρεμβολής, το Θεώρημα Riesz-Thorin, η απόδειξη του οποίου παρατίθεται στο Παράρτημα Γ, ενότητα Γ.2.

Θεώρημα 1.5 (Riesz-Thorin)

Εστω $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ *είναι δυο χώροι μέτρου,* $\mathcal{M}(Y)$ *είναι ο χώρος των μετρήσιμων μιγαδικών συναρτήσεων στο* Y*,*

$$T : L_{p_0}(X, \mu) + L_{p_1}(X, \mu) \to \mathcal{M}(Y)$$

είναι γραμμικός τελεστής, $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$ *και*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, \quad \forall t \in (0,1).$$

Αν

$$\begin{cases} \| Tf \|_{L_{q_0}(\mathcal{Y}, \nu)} \le M_0 \| f \|_{L_{p_0}(\mathcal{X}, \mu)} & \forall f \in L_{p_0}(X, \mu) \\ \| Tf \|_{L_{q_1}(\mathcal{Y}, \nu)} \le M_1 \| f \|_{L_{p_1}(\mathcal{X}, \mu)} & \forall f \in L_{p_1}(X, \mu) \end{cases},$$

τότε και ο τελεστής $T : L_p(X, \mu) \to L_q(Y, \nu)$ *είναι φραγμένος. Μάλιστα*

$$\|Tf\|_{L_q} \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{L_p} = M \|f\|_{L_p}.$$

Απόδειξη θεωρήματος 1.4: Εφαρμογή του θεωρήματος Riesz-Thorin για $p_0 = 1,\ p_1 = 2$, $q_0 = \infty,\ q_1 = 2$, $M_0 = M_1 = 1$. ■

Πριν προχωρήσουμε αναφέρουμε μια σημαντική εφαρμογή του Θεωρήματος Riesz-Thorin:

Πρόταση 1.2 (Ανισότητα Young)

Εστω $p,q,r \in [1,+\infty]$ *έτσι ώστε* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$. *Αν* $f \in L_1 \cap L_p(X,\mu)$ *και* $g \in L_q(X,\mu)$, *τότε* $f * g \in L_r(\mathrm{X},\mu)$ *και*

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Απόδειξη. Για $g \in L_q(X,\mu)$ θεωρούμε τον τελεστή

$$T_g(f) = f * g \quad \forall f \in L_1(X,\mu).$$

Από την ολοκληρωτική ανισότητα Minkowski (βλέπε Κεφάλαιο 0), παίρνουμε

$$\|T_g f\|_q = \left(\int_X \left| \int_X f(y) g(x-y) d\mu(y) \right|^q d\mu(x) \right)^{1/q}$$

$$\le \int_X \left(\int_X |f(y) g(x-y)|^q d\mu(x) \right)^{1/q} d\mu(y) = \|f\|_1 \|g\|_q.$$

Αρα ο $T_g : L_1 \to L_q$ είναι φραγμένος τελεστής. Επίσης απ' την ανισότητα Holder παίρνουμε

$$\|T_g f\|_\infty \le \|f\|_{q'} \|g\|_q,$$

δηλαδή ο $T_g : L_{q'} \to L_\infty$ είναι φραγμένος τελεστής, όπου q' είναι ο συζυγής εκθέτης του q. Εστω

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{1}+\frac{t}{q'} \quad \text{και} \quad \frac{1}{r}=\frac{1-t}{q}+\frac{t}{\infty}=\frac{1-t}{q}, \ \ t\in(0,1).$$

Τότε

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1-t}{q}=1+\frac{1}{r}.$$

Από το θεώρημα Riesz-Thorin για $p_0=1,\ p_1=q'$, $q_0=q,\ q_1=\infty$ και $M_0=M_1=\|g\|_q$ προκύπτει το ζητούμενο. ■

1.5 Προσεγγιστικές μονάδες

Το θεώρημα Hausdorff-Young δε μπορεί να επεκταθεί για $p > 2$, γιατί π.χ. υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις f με $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^{2-\varepsilon} = \infty$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Εμπνεόμενοι από το θεώρημα 1.2 Riesz-Fischer, δίνουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός 1.3 *Εστω* $\hat{f} = \left\{\hat{f}(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι η ακολουθία των συντελεστών Fourier μιας μετρήσιμης 1-περιοδικής συνάρτησης* $f \in L_p(\mathbf{T})$, $1 \le p \le \infty$ *όπως στην (4). Τότε η τριγωνομετρική σειρά*

$$Tf \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot} , \qquad (9)$$

καλείται ***ανάπτυγμα Fourier ή σειρά Fourier*** *της* f. *Το* $N-$***ιοστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier*** *ορίζεται ως*

$$T_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} .$$

Προφανώς δε γνωρίζουμε καν αν η σειρά Fourier στο δεξιό μέλος της (9) είναι καλά ορισμένη, πόσο μάλλον αν ανήκει στον L_p, πολύ δε περισσότερο αν συγκλίνει στην f με κάποια έννοια. Για ν' απαντήσουμε σ' αυτά τα ερωτήματα εργαζόμαστε κατ' αρχήν με τα μερικά αθροίσματα $T_N f$. Παρατηρούμε ότι

$$T_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \int_{\mathbf{T}} f(x-y) \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n y} dy = f * D_N(x), \qquad (10)$$

όπου

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-N}^{-1} e^{2\pi i n x} + \sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i n x} = e^{-2\pi i N x} \frac{1-e^{2\pi i N x}}{1-e^{2\pi i x}} + \frac{1-e^{2\pi i (N+1) x}}{1-e^{2\pi i x}}$$

$$= \frac{e^{-2\pi i N x} - e^{2\pi i (N+1) x}}{1-e^{2\pi i x}} = \frac{e^{\pi i x}}{e^{\pi i x}} \cdot \frac{e^{-2\pi i (N+1/2) x} - e^{2\pi i (N+1/2) x}}{e^{-\pi i x} - e^{\pi i x}} = \frac{\eta\mu\left[\pi x (2N+1)\right]}{\eta\mu(\pi x)}$$

και η ακολουθία $\left(D_N\right)_{N\in\mathbb{N}}$ καλείται ***πυρήνας Dirichlet***. Για κάθε N, η συνάρτηση D_N είναι άρτια,

$$\int_{\mathbf{T}} D_N\left(x\right)dx = 1,$$

αλλά

$$\boxed{\sup_N \left\|D_N\right\|_{L_1} = \infty}. \qquad (11)$$

Πράγματι:

$$\int_{\mathbf{T}} \left|D_N\left(x\right)\right|dx = \int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{\eta\mu\left(\pi x\left(2N+1\right)\right)}{\eta\mu\left(\pi x\right)}\right| dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\frac{\eta\mu\left(y\left(2N+1\right)\right)}{\eta\mu y}\right| dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{y}{\eta\mu y}\frac{\left|\eta\mu\left(y\left(2N+1\right)\right)\right|}{y} dy \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\left|\eta\mu\left(y\left(2N+1\right)\right)\right|}{y} dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{(2N+1)\pi/2} \frac{\left|\eta\mu t\right|}{t} dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2N}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2} \frac{\left|\eta\mu t\right|}{t} dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2N}\int_0^{\pi/2} \frac{\left|\eta\mu\left(t+k\pi/2\right)\right|}{t+k\pi/2} dt$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2N}\int_0^{\pi/2} \frac{\left|\eta\mu\left(t+k\pi/2\right)\right|}{\left(k+1\right)\pi/2} dt = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k}$$

$$\geq \frac{4}{\pi^2}\int_1^{2N+2}\frac{d\omega}{\omega} = \frac{4}{\pi^2}\ln\left(2N+2\right).$$

Τελικά:

$$\left\|D_N\right\|_{L_1} \geq \frac{4}{\pi^2}\ln\left(2N+2\right).$$

Η σχέση (11) παίζει ουσιώδες ρόλο στον ακόλουθο (αληθή) ισχυρισμό:

Υπάρχει συνεχής συνάρτηση η σειρά Fourier της οποίας αποκλίνει σε κάποιο σημείο της.

Ας μελετήσουμε (κάνοντας μια παρένθεση) τη σπουδαιότητα της ποσότητας $\sup_N \left\|D_N\right\|_{L_1}$. Εστω $\left\{K_N\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων 1-περιοδικών συναρτήσεων που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $\int_{\mathbf{T}} K_N(x)\,dx = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}$,

(β) $\sup_{N\in\mathbb{N}} \|K_N\|_{L_1} \le C < \infty$, (12)

(γ) $\lim_{N\to\infty} \int_{\delta<|x|<1/2} |K_N(x)|\,dx = 0$ για κάθε (φιξαρισμένο) $0<\delta<1$.

Καλούμε μια τέτοια ακολουθία $\{K_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ ***προσεγγιστική μονάδα***. Λόγω της (11), ο πυρήνας Dirichlet $\{D_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ **<u>δεν</u>** είναι προσεγγιστική μονάδα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f \in C_0$ και ας θεωρήσουμε κατ' αναλογία με τη (10) την ακολουθία τελεστών:

$$U_N : C_0 \to C_0 : \quad U_N f(x) = f * K_N(x)$$

(γιατί $U_N f \in C_0$;). Τότε, λόγω της ιδιότητας (α) στη (12) έχουμε

$$\begin{aligned} U_N f(x) - f(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} \big(f(x-y) - f(x)\big) K_N(y)\,dy \\ &= \int_{|y|\le\delta} \big(f(x-y) - f(x)\big) K_N(y)\,dy \\ &+ \int_{\delta<|y|<1/2} \big(f(x-y) - f(x)\big) K_N(y)\,dy \\ &= I_{1,f}(x) + I_{2,f}(x). \end{aligned}$$

Σημείωση. Παραπάνω θεωρήσαμε $\mathbf{T} = [-1/2, 1/2]$ και όχι $\mathbf{T} = [0,1]$. Αυτό δεν είναι πρόβλημα διότι λόγω περιοδικότητας

$$\int_{\mathbf{T}} f(x)\,dx = \int_a^{a+1} f(x)\,dx \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Λόγω ομοιόμορφης συνεχείας της f στο $\mathbf{T}$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρ-χει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbf{T}$ και $|y| \le \delta$ να ισχύει $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Συνεπώς

$$|I_{1,f}(x)| \le \varepsilon \int_{|y|\le\delta} |K_N(y)|\,dy \le \varepsilon \sup_{N\in\mathbb{N}} \|K_N\|_{L_1(\mathbf{T})} < C\varepsilon$$

λόγω της ιδιότητας (β) στη (12). Οσον αφορά δε το ολοκλήρωμα $I_{2,f}(x)$, λόγω της ιδιότητας (γ) στη (12), υπάρχει αρκούντως μεγάλο N έτσι ώστε

$$\left|I_{2,f}(x)\right| \le 2 \sup_{y\in[0,1]} \left|f(y)\right| \int_{\delta<|y|<1/2} \left|K_N(y)\right| dy \le 2\varepsilon \|f\|_{C_0} .$$

Τελικά, για N αρκούντως μεγάλο προκύπτει

$$\|U_N f - f\|_{C_0} = \sup_{x\in\mathbf{T}} \left|U_N f(x) - f(x)\right| \le C'\varepsilon$$

για κάποια σταθερά C' ανεξάρτητη του x, άρα

$$\lim_{N\to\infty} (f * K_N)(x) = f(x)$$

ομοιόμορφα στο $\mathbf{T}$. Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά ο ρόλος της ποσότητας $\sup_{N\in\mathbb{N}} \|K_N\|_{L_1(\mathbf{T})} < \infty$ να διασφαλίζει ότι η τιμή $I_{1,f}(x)$ είναι αμελητέα (αν η f είναι συνεχής). Ακόμη όμως και αν $f \in L_p(\mathbf{T})$ τότε πάλι

$$\|f * K_N - f\|_{L_p} = 0 \quad \forall 1 \le p < \infty .$$

Πράγματι, εφόσον ο χώρος C_0 είναι πυκνός στον L_p $\forall 1 \le p < \infty$, δοθείσης $f \in L_p$, υπάρχει $g \in C_0$ έτσι ώστε

$$\|f - g\|_{L_p} < \varepsilon .$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
\|f * K_N - f\|_{L_p} &= \left\|(f-g) * K_N + (g * K_N - g) + (g - f)\right\|_{L_p} \\
&\le \left\|(f-g) * K_N\right\|_{L_p} + \|g * K_N - g\|_{L_p} + \|g - f\|_{L_p} \\
&\le \|K_N\|_{L_1} \|f - g\|_{L_p} + \|g * K_N - g\|_{C_0} + \|g - f\|_{L_p} \\
&\le \left(1 + \sup_{N\in\mathbb{N}} \|K_N\|_{L_1}\right) \|f - g\|_{L_p} + \|g * K_N - g\|_{C_0} < C'\varepsilon
\end{aligned}$$

για αρκούντως μεγάλο N ώστε $\|g * K_N - g\|_{C_0} < C'\varepsilon$ (το οποίο δείξαμε παραπάνω). Αναφέρουμε εδώ ότι χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Young, (βλ. Πρόταση 1.2)

$$\|(f-g) * K_N\|_{L_p} \le \|f-g\|_{L_p} \|K_N\|_{L_1}$$

και το γεγονός ότι $\|f\|_{L_p} \le \|f\|_{C_0}$. Βλέπουμε πάλι το σημαντικό ρόλο της ποσότητας $\sup_{N\in\mathbb{N}} \|K_N\|_{L_1(\mathbf{T})} < \infty$ που διασφαλιζει ότι ο όρος $\|(f-g) * K_N\|_{L_p(\mathbf{T})}$ είναι αμελητέος. Συνοψίζοντας, δείξαμε την

Πρόταση 1.3

*Εστω $\{K_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ είναι μια **προσεγγιστική μονάδα** όπως στη (12). Τότε:*

- *Για κάθε $f \in C_0(\mathbf{T})$ ισχύει $\|f * K_N - f\|_{C_0} = 0$.*
- *Για κάθε $f \in L_p(\mathbf{T})$, $1 \le p < \infty$ ισχύει $\|f * K_N - f\|_{L_p} = 0$.*

Στο ερώτημα αν μπορεί κάποιος να βρει εύκολα προσεγγιστικές μονάδες, η απάντηση είναι καταφατική. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

- Τον **πυρήνα Feyer** $\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$:

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \ldots + D_N(x)}{N+1} = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{2\pi i n x}$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{\eta\mu^2(\pi x(N+1))}{\eta\mu^2(\pi x)}.$$

- Τον **πυρήνα Poisson** $\{P_r\}_{0<r<1}$:

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n x} = \frac{1-r^2}{1 - 2r\sigma\upsilon\nu(2\pi x) + r^2}, \ (0 < r < 1),$$

όπου σ' αυτή την περίπτωση δεν έχουμε μια ακολουθία, αλλά μια

οικογένεια συναρτήσεων $\{P_r\}_{0<r<1}$ με οριακή διαδικασία $r \to 1^-$. Αλλοι σημαντικοί πυρήνες είναι ο πυρήνας Gauss, ο πυρήνας De la Vallee Pussin κλπ. Κλείνουμε την παρένθεση περί προσεγγιστικών μονάδων επανερχόμενοι στη σειρά Fourier (10):

$$T_N f(x) = f * D_N(x).$$

Η Πρόταση 1.3 δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σημειακή ή την L_p −σύγκλιση της σειράς Fourier $T_N f$, διότι ο πυρήνας Dirichlet $\{D_N\}$ δεν είναι προσεγγιστική μονάδα. Φυσικά αυτό δε σημαίνει ότι η σύγκλιση της σειράς Fourier αποτυγχάνει σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις. Για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε περαιτέρω χρειαζόμαστε μια νέα ιδέα. Το νέο εργαλείο είναι ο μετασχηματισμός Hilbert.

1.6 Ο μετασχηματισμός Hilbert. Σύγκλιση κατά νόρμα σειρών Fourier στον $L_p(\mathbf{T})$.

Ορισμός 1.4 *Εστω* $\hat{f} = \left\{\hat{f}(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι η ακολουθία των συντελεστών Fourier όπως στην (4). Η τριγωνομετρική σειρά*

$$f \sim Hf = -i\sum_{n\in\mathbb{Z}} sign(n)\hat{f}(n)e^{2\pi in\cdot} \ , \qquad (13)$$

καλείται ***μετασχηματισμός Hilbert*** *της* f.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0, & x = 0, \ x \in \mathbb{R} \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

Η σειρά στο δεξιό μέλος της (13) ενδέχεται να μην είναι καλά ορισμένη, γι' αυτό και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\sim$ και όχι ισότητα. Φορμαλιστικά ορίζουμε και τον ***τελεστή Hilbert***

$$f \to Hf = -i\sum_{n\in\mathbb{Z}} sign(n)\hat{f}(n)e^{2\pi in\cdot} .$$

Με προφανή τρόπο τίθεται το ερώτημα: για ποιο λόγο οδηγούμαστε στον ορισμό (13);

Μια απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι διότι μέσω αυτού του τελεστή θεμελιώνεται η κατά νόρμα σύγκλιση της σειράς Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_p$ στην f. Ομως η σπουδαιότητα αυτού του τελεστή είναι μεγαλύτερη, διότι είναι:

- Πολλαπλασιαστής (βλέπε ορισμό 1.5),
- Ιδιάζον ολοκληρωτικός τελεστής,
- Οριακός τελεστής του πυρήνα των συζυγών αρμονικών (πραγματικών) συναρτήσεων στο μοναδιαίο δίσκο.

Ορισμός 1.5 *Εστω* $\Lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \ \Lambda = \left\{\lambda_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών και* $\hat{f} = \left\{\hat{f}(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι όπως παραπάνω. Τότε*

ορίζεται φορμαλιστικά ένας τελεστής Q τον οποίο καλούμε ***πολλαπλασιαστή*** *έτσι ώστε*

$$f \to Qf = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n \hat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot} .$$

Η λέξη πολλαπλασιαστής είναι προφανής: Ο συντελεστής Fourier $\widehat{Qf}(n)$ προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το συντελεστή Fourier $\hat{f}(n)$ με τον όρο λ_n.

Τέτοιοι τελεστές είναι χρήσιμοι διότι είναι τελεστές συνέλιξης. Ας δούμε τώρα πως προκύπτει ο τελεστής Hilbert με φυσικό τρόπο από την ακολουθία $(T_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_p$. Προφανώς:

$$T_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_{[-N,N]}(n) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} .$$

Αλλά:

$$\chi_{[-N,N]}(n) = \frac{1}{2}\left[sign(n+N) - sign(n-N) \right] + \left(\chi_{\{-N\}} + \chi_{\{N\}} \right),$$

άρα

$$T_N f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(sign(n+N) - sign(n-N) \right) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

$$+ \left(\hat{f}(N) e^{2\pi i N x} + \hat{f}(-N) e^{-2\pi i N x} \right).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} sign(n+N) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} sign(m) \hat{f}(m-N) e^{2\pi i (m-N) x}$$

$$= i e^{-2\pi i N x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i) sign(m) \hat{f}(m-N) e^{2\pi i m x} = i e^{-2\pi i N x} H\left(e^{2\pi i N \cdot} f \right)(x).$$

Ομοίως:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} sign(n-N) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = i e^{2\pi i N x} H\left(e^{-2\pi i N \cdot} f \right).$$

Τελικά:

$$T_N f = \frac{1}{2}\left[ie^{-2\pi iNx} H\left(e^{2\pi iN\cdot} f\right)(x) - ie^{2\pi iNx} H\left(e^{-2\pi iN\cdot} f\right)(x)\right]$$

$$+\left(\hat{f}(N)e^{2\pi iNx} + \hat{f}(-N)e^{-2\pi iNx}\right). \qquad (14)$$

Ερμηνεύουμε την ισότητα (14) ως εξής:

Για να μελετήσουμε την ακολουθία τελεστών $(T_N f)$ *των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της* f*, αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά* ***<u>ενός μόνον</u>*** *τελεστή, του τελεστή Hilbert*.

Ισχύει όμως το ακόλουθο θεώρημα, η απόδειξη του οποίου παρατίθεται στο Παράρτημα 2:

Θεώρημα 1.6

Ο τελεστής Hilbert $H : L_p(\mathbf{T}) \to L_p(\mathbf{T})$ *είναι φραγμένος για κάθε* $1 < p < \infty$*. Δεν είναι φραγμένος για* $p = 1$ *ούτε για* $p = \infty$*.*

Συνδυάζοντας το θεώρημα 1.6 με τη (14), για κάθε $1 < p < \infty$ έχουμε

$$\|T_N f\|_{L_p} \le \frac{1}{2}\left(\left\|H\left(e^{2\pi iN\cdot} f\right)\right\|_{L_p} + \left\|H\left(e^{-2\pi iN\cdot} f\right)\right\|_{L_p} \right) + 2\max\left\{\left|\hat{f}(N)\right|, \left|\hat{f}(-N)\right|\right\}$$

$$\le \frac{C}{2}\left(\left\|e^{2\pi iN\cdot} f\right\|_{L_p} + \left\|e^{-2\pi iN\cdot} f\right\|_{L_p} \right) + \|f\|_{L_p} = (C+2)\|f\|_{L_p} < \infty .$$

Τότε απ' την αρχή ομοιόμορφα φραγμένου (βλ. Θεώρημα Β.6, Παράρτημα Β) έχουμε

$$\sup_N \|T_N\|_{L_p \to L_p} < \infty , \qquad (15)$$

όπου $\|T_N\|_{L_p \to L_p}$ είναι η συνήθης νόρμα (βλ. Παράρτημα Β) του τελεστή

$$T_N : L_p \to L_p : \; T_N f = f * D_N .$$

Η ισχύς της (15) είναι ουσιώδης όσον αφορά την κατά νόρμα

σύγκλιση της σειράς Fourier Tf στην f, όπως φαίνεται στο ακόλουθο

Θεώρημα 1.7

Εστω $T_N : L_p \to L_p :\ T_N f = f * D_N$, *όπου* $1 < p < \infty$. *Τότε*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| T_N f - f \right\|_{L_p} = 0 .$$

Απόδειξη. (α) Αρχικά θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$A = \left\{ f \in L_p :\ \lim_{N\to\infty} \left\| T_N f - f \right\|_{L_p} = 0 \right\}$$

είναι κλειστό. Εστω $\{f_m\} \in A$ έτσι ώστε $\left\| f_m - f \right\|_{L_p} \to 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f \in A$. Για τυχαίο $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\| T_N f - f \right\|_{L_p} &= \left\| \left(T_N f - T_N f_m \right) + \left(T_N f_m - f_m \right) + \left(f_m - f \right) \right\|_{L_p} \\
&\le \left\| T_N \left(f - f_m \right) \right\|_{L_p} + \left\| T_N f_m - f_m \right\|_{L_p} + \left\| f_m - f \right\|_{L_p} \\
&\le \left\| T_N \right\|_{L_p \to L_p} \left\| f_m - f \right\|_{L_p} + \left\| T_N f_m - f_m \right\|_{L_p} + \left\| f_m - f \right\|_{L_p} \\
&= \left(1 + \left\| T_N \right\|_{L_p \to L_p} \right) \left\| f_m - f \right\|_{L_p} + \left\| T_N f_m - f_m \right\|_{L_p} < C\varepsilon
\end{aligned}$$

για m αρκούντως μεγάλο έτσι ώστε $\left\| f_m - f \right\|_{L_p} < \varepsilon$ και N αρκούντως μεγάλο ώστε $\left\| T_N f_m - f_m \right\|_{L_p} < \varepsilon$ ($f_m \in A$). Αρα το A είναι κλειστό. Απ' την άλλη μεριά ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνός στον L_p. Εστω τριγωνομετρικό πολυώνυμο g. Τότε $T_N g = g$ υπό την προϋπόθεση ότι ο βαθμός του g είναι μικρότερος ή ίσος του N. Αρα το A περιέχει όλα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα (οποιουδήποτε βαθμού) και συνεπώς είναι πυκνό στο A. Αφού το A είναι κλειστό, αναγκαστικά $A = B$. ■

Θεώρημα 1.8

Εστω $(T_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ *είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier όπως παραπάνω. Τότε:*

(α) *Υπάρχει* $f \in L_1$ *έτσι ώστε* $\sup_N \|T_N f\|_{L_1} = \infty$.

(β) *Υπάρχει* $f \in C_0$ *έτσι ώστε* $\sup_N \|T_N f\|_{C_0} = \infty$.

Απόδειξη. Για το **(α)** έχουμε

$$\|T_N f\|_{L_1} \le \|D_N\|_{L_1} \|f\|_{L_1}$$

άρα $\|T_N\|_{L_1\to L_1} \le \|D_N\|_{L_1}$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία προσεγγιστικών μονάδων ότι $\lim_{M\to\infty} \|F_M * D_N - D_N\|_{L_1} = 0$, όπου F_M είναι ο πυρήνας Feyer. Αρα

$$\|D_N\|_{L_1} = \lim_{M\to\infty} \|F_M * D_N\|_{L_1} = \lim_{M\to\infty} \|T_N F_M\|_{L_1} \le \lim_{M\to\infty} \|T_N\|_{L_1\to L_1} \|F_M\|_{L_1} = \|T_N\|_{L_1\to L_1}.$$

Ετσι $\|T_N\|_{L_1(\mathbf{T})\to L_1(\mathbf{T})} = \|D_N\|_{L_1(\mathbf{T})} \to \infty$ (όπως δείξαμε παραπάνω) και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την άρνηση του ομοιόμορφα φραγμένου.

Για το **(β)** μπορούμε να κατασκευάσουμε συνεχή συνάρτηση με $\|T_N g\|_{C_0\to C_0} \ge \|D_N\|_{L_1}$. Η κατασκευή παραλείπεται. ■

Οσον αφορά τη σημειακή σχεδόν παντού των σειρών Fourier αναφέρουμε χωρίς απόδειξη την ακόλουθη πολύ σημαντική γενίκευση του θεωρήματος Carleson

Θεώρημα 1.9 (Carleson-Hunt)

Για κάθε $1 < p < \infty$, *η σειρά Fourier κάθε συνάρτησης* $f \in L_p$ *συγκλίνει σημειακά στην* f *σχεδόν παντού στο* $\mathbf{T}$. ■

Τέλος, όπως ήδη δείξαμε, η συνέχεια μιας συνάρτησης δεν είναι συνθήκη ικανή ώστε να διασφαλίσει τη σημειακή σύγκλιση της

σειράς Fourier της f στην f παντού στο $\mathbf{T}$. Παρ'όλα αυτά είδαμε ότι με χρήση προσεγγιστικών μονάδων η συνέχεια της f αρκεί. Μάλιστα ο πυρήνας του Feyer είναι ο μέσος όρος του πυρήνα Dirichlet. Αρα ισχύει ο κάτωθι ισχυρισμός:

Αν η σειρά Fourier της f συγκλίνει σημειακά σε σημείο x_0 τότε το όριο της ισούται με $f(x_0)$ (διότι αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε και η ακολουθία των μέσων όρων της συγκλίνει στο ίδιο όριο).

Μια πολύ χρήσιμη πρόταση για τη σημειακή σύγκλιση των σειρών Fourier είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 1.4

Εστω $f \in L_1(\mathbf{T})$ είναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολής στο $\mathbf{T}$. Τότε

$$\lim_{N\to\infty} T_N f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

σημειακά στο $\mathbf{T}$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κλειστά διαστήματα του $\mathbf{T}$ όπου η f είναι συνεχής.

Σημείωση: Αν $f \in L_1(\mathbf{T})$ είναι απόλυτα συνεχής (άρα και παραγωγίσιμη σ.π.), τότε είναι φραγμένης μεταβολής, συνεπώς ισχύει η πρόταση 1.4.

1.7 Ο τελεστής Hilbert ως ιδιάζον ολοκληρωτικός τελεστής

Πέραν της χρήσης του τελεστή Hilbert ως εργαλείο για την σύγκλιση των σειρών Fourier, ο τελεστής Hilbert είναι και ένας ***ιδιάζον ολοκληρωτικός τελεστής***. Ας εξηγήσουμε αναλυτικότερα τι εννοούμε.

Εστω $f \in C_1(\mathbf{T})$. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$H_N f = -i \sum_{n=-N}^{N} sign(n) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = -i \sum_{n=-N}^{N} sign(n) \int_{\mathbf{T}} f(y) e^{2\pi i n (x-y)} dy$$

$$= -i \sum_{n=-N}^{N} sign(n) \int_{\mathbf{T}} f(x-y) e^{2\pi i n y} dy$$

$$= \int_0^{1/2} \left(f(x-y) - f(x+y) \right) \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi y) - \sigma\upsilon\nu(\pi y(2N+1))}{\eta\mu(\pi y)} dy$$

(απλές πράξεις στο μερικό άθροισμα)

$$= \int_0^{1/2} \left(f(x-y) - f(x+y) \right) \sigma\phi(\pi y) dy$$
$$- \int_0^{1/2} \frac{f(x-y) - f(x+y)}{\eta\mu(\pi y)} \sigma\upsilon\nu(\pi y(2N+1)) dy = I_{1,f}(x) + I_{2,f}(x,N).$$

Με χρήση του Λήμματος 1.2 (Riemann-Lebesgue)

$$I_{2,f}(x,N) \to 0,\ N \to \infty,$$

διότι η συνάρτηση $\dfrac{f(x-y) - f(x+y)}{\eta\mu(\pi y)}$ είναι φραγμένη (εφόσον $f \in C_1(\mathbf{T})$). Αρα

$$H_N f(x) \to \int_{\mathbf{T}} f(x-y) \sigma\phi(\pi y) dy,\ N \to \infty. \qquad (16)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\sigma\phi(\pi y)$ έχει ανωμαλία στο μηδέν τάξης $|y|^{-1}$ άρα δεν είναι ολοκληρώσιμη. Απ' την άλλη μεριά η $\sigma\phi(y)$ είναι περιττή συνάρτηση. Το γεγονός αυτό μας δίνει τη δυνατότητα

να ερμηνεύσουμε το δεξιό μέλος της (16) με την έννοια της ***πρωτεύουσας τιμής (P.V.) κατά Cauchy*** ως εξής:

$$\int_{\mathbf{T}} f(x-y)\sigma\phi(\pi y)dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2} f(x-y)\sigma\phi(\pi y)dy. \qquad (17)$$

Πράγματι:

$$\int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2} f(x-y)\sigma\phi(\pi y)dy = \int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2}\left(f(x-y)-f(x)\right)\sigma\phi(\pi y)dy,$$

διότι η $\sigma\phi(\pi y)$ είναι περιττή. Απ' την άλλη μεριά $f\in C_1$, άρα $f(x-y)-f(x)=O(y)$ (με την έννοια ότι υπάρχει θετική σταθερά D ώστε $\left|f(x-y)-f(x)\right|\le D|y|$), οπότε

$$\int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2}\left|\left(f(x-y)-f(x)\right)\sigma\phi(\pi y)\right|dy = \int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2} O\left(y\sigma\phi(\pi y)\right)dy$$

$$= \int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2} O\left(\frac{y}{\eta\mu(\pi y)}\sigma\upsilon\nu(\pi y)\right)dy = \int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2} O(1)dy,$$

άρα η συνάρτηση $\int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2} f(x-y)\sigma\phi(\pi y)dy$ είναι καλά ορισμένη. Συνοψίζοντας, ο μετασχηματισμός Hilbert μπορεί να εκφρασθεί μέσω ενός ολοκληρωτικού τελεστή ως εξής:

$$Hf(x) = P.V.\int_{\mathbf{T}} f(x-y)\sigma\phi(\pi y)dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2} f(x-y)\sigma\phi(\pi y)dy,$$

υπό την προϋπόθεση ότι η f είναι μια «καλή» συνάρτηση.

1.8 Συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις και μετασχηματισμός Hilbert

Κατ' αρχήν ας θυμηθούμε τον ορισμό και ορισμένες βασικές ιδιότητες μιας αρμονικής συνάρτησης στον $\mathbb{R}^2$ (ο παρακάτω ορισμός 1.5 γενικεύεται και στον $\mathbb{R}^N$) :

Ορισμός 1.5 *Εστω E είναι ανοικτό σύνολο και $u : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών x και y. Θα λέμε ότι η f είναι* ***αρμονική*** *στο E αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace*

$$\nabla^2 u = 0 \Leftrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \forall (x, y) \in E.$$

Σημείωση. Αν u είναι μιγαδική συνάρτηση στο E, τότε η u καλείται αρμονική συνάρτηση αν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Πρόταση 1.5

Εστω $f : E \to \mathbb{C} : f = u + i \cdot v$ είναι αναλυτική σε ανοικτό σύνολο $E \subset \mathbb{C}$. Τότε οι συναρτήσεις u και v είναι αρμονικές στο E.

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι αναλυτική στο E οι u και v ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Αρα

$$u_{xx} = v_{yx} \text{ και } u_{yy} = -v_{xy}.$$

Αθροίζοντας κατά μέλη προκύπτει $u_{xx} + u_{yy} = 0$ για κάθε $(x, y) \in E$.■

Ορισμός 1.6 Εστω $u, v : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι πραγματικές συναρτή-σεις σε ανοικτό σύνολο E έτσι ώστε η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη στο E. Τότε η v καλείται ***αρμονική συζυγής*** **της** u.

Στο ερώτημα «αν u είναι αρμονική συνάρτηση σε σύνολο A μπορούμε πάντα να βρούμε μια συζυγή αρμονική της v ώστε η $f = u + iv$ να είναι αναλυτική στο A» η απάντηση είναι πολύπλοκη και εξαρτάται από τη μορφή του συνόλου A. Παρόλα αυτά ισχύει:

Αν A είναι απλά συνεκτικός τόπος, υπάρχει μοναδική αναλυτική

συνάρτηση f στο A (με προσέγγιση σταθεράς) με $u = \mathrm{Re}(f)$.

Πόρισμα 1.1

Αν u είναι (πραγματική) αρμονική συνάρτηση πάνω και στο εσωτερικό κύκλου κέντρου $z_0 = (x_0, y_0)$ και ακτίνας R, τότε

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) d\theta .$$

Απόδειξη. Υπάρχει μοναδική αναλυτική συνάρτηση f έτσι ώστε $u = \mathrm{Re}(f)$. Για την f ισχύει το Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss. Εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη παίρνουμε το αποτέλεσμα. ■

Πόρισμα 1.2 (Αρχή μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις)

Αν u είναι πραγματική αρμονική (και μη σταθερή) συνάρτηση σε φραγμένο τόπο E και συνεχής στο σύνορο ∂E όπου ∂E είναι μια κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη, τότε η u παίρνει μέγιστη τιμή πάνω στο σύνορο ∂E.

Πόρισμα 1.3

Αν u είναι μια πραγματική αρμονική συνάρτηση σε φραγμένο τόπο E και $u(x,y) = c$ πάνω στο σύνορο ∂E όπου το ∂E είναι μια κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη, τότε $u(x,y) = c$ παντού στο E.

Ας δούμε τώρα πως συνδέεται ο μετασχηματισμός Hilbert με τις συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις. Αρχικά θέλουμε να βρούμε την αρμονική επέκταση συνάρτησης $f \in L_p,\ 1 \le p$ εντός του μοναδιαίου δίσκου $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Με άλλα λόγια επιθυμούμε να λύσουμε το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, \quad \forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \\ u\left(e^{i\cdot}\right) = f \ \ \sigma.\pi. \text{ στο } [0,\, 2\pi) \end{cases},$$

όπου

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = u_{xx} + v_{yy} \ \ (\text{καρτεσιανές συντ/νες}) \\ \Delta u(r,\theta) = u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2} \ \ (\text{πολικές συντ/νες}) \end{cases}.$$

Εστω $z = re^{i\theta}$, $r \in [0,1)$, $\theta \in [0,2\pi)$. Επειδή $\Delta z^n = 0$ και $\Delta \overline{z^n} = 0$ για κάθε $n \geq 0$, ορίζουμε ως (μοναδική) λύση του παραπάνω προβλήματος την

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{f}(n) \overline{z^{|n|}}$$

ή ισοδύναμα

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta},$$

διότι η u ικανοποιεί την $\Delta u = 0$ στο $\mathbb{D}$ (ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά αρμονικών συναρτήσεων στο $\mathbb{D}$ συγκλίνει σε αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$) και επιπλέον

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta} = f * P_r(\theta) := P_r f(\theta),$$

όπου

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\sigma\upsilon\nu\theta + r^2},\ r > 0$$

είναι η προσεγγιστική μονάδα του Poisson, συνεπώς απ' την Πρόταση 1.3 για προσεγγιστικές μονάδες παίρνουμε

$$u\left(re^{i\theta}\right) = f * P_r \to f = u\left(e^{i\theta}\right),\ \ r \to 1^-$$

με την L_p-έννοια (ή σημειακά σ.π.) για $1 \leq p < \infty$. Εστω $H_p(\mathbb{D})$ είναι ο ***χώρος Hardy όλων των αναλυτικών συναρτήσεων στο μοναδιαίο δίσκο*** με νόρμα

$$\|u\|_{H_p(\mathbb{D})} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Αποδεικνύεται (Katznelson) ότι $u \in H_p(\mathbb{D})$ αν και μόνον αν $u\left(re^{i\theta}\right) = f * P_r(\theta)$ για κάποια $f = u\left(e^{i\cdot}\right) \in L_p(\mathbf{T})$ με $\widehat{f}(n) = 0\ \forall n < 0$. Τότε:

$$\|u\|_{H_p(\mathbb{D})} = \left\| u\left(e^{i\cdot}\right) \right\|_{L_p(\mathbf{T})} = \|f\|_{L_p(\mathbf{T})}.$$

Ετσι μπορούμε να θεωρήσουμε τους χώρους Hardy ως κλειστούς υπόχωρους του $L_p(\mathbf{T})$ (οπότε μιλάμε ***για χώρους Hardy*** $\mathbb{H}_p(\mathbf{T})$ ***πάνω στο μοναδιαίο κύκλο***). Αν τώρα $f \in L_p(\mathbf{T}),\ 1 \le p$ είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε αντιστοιχούμε σ' αυτή μια αναλυτική συνάρτηση ως εξής: Η συνάρτηση $P_r(\theta)$ είναι αρμονική και μάλιστα είναι το πραγματικό μέρος της αναλυτικής συνάρτησης

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z},\ z \in \mathbb{D}.$$

Ετσι η συζυγής αρμονική της P_r (για σταθερά ίση με μηδέν) είναι η

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \frac{2r\eta\mu\theta}{1-2r\sigma\upsilon\nu\theta + r^2} := H_r(\theta)$$

με

$$\lim_{r\to 1^-} H_r(\theta) = \sigma\phi\left(\frac{\theta}{2}\right) := H(\theta).$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η οικογένεια $\{H_r\}_{0<r<1}$ δεν είναι προσεγγιστική μονάδα. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C} :\ g\left(re^{i\theta}\right) = f * P_r(\theta) + i\, f * H_r(\theta) = P_r f(\theta) + i\, H_r f(\theta).$$

Τότε η g είναι αναλυτική στο δίσκο $\mathbb{D}$ και $g \in H_p(\mathbb{D})\ \forall 1 < p < \infty$. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{r\to 1^-} g\left(re^{i\bullet}\right) = f + i\, Hf = \tilde{g}$$

με την L_p −έννοια (ή σημειακά σ.π.) για $1 < p < \infty$, όπου Hf είναι ο τελεστής Hilbert και

$$\tilde{g} = f + i\, Hf = \sum_{n\ge 0} \hat{f}(n) e^{in\bullet}.$$

Συνεπώς $\tilde{g} \in \mathbb{H}_p(\mathbf{T})$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να μελετήσουμε προβλήματα που σχετίζονται με πραγματικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας με μεθόδους μιγαδικής ανάλυσης. Δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω προς αυτή την κατεύθυνση.

1.9 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε τις ιδιότητες Φ1-Φ7 της Πρότασης 2.1.

2. Υπολογίστε τον τύπο των συντελεστών Fourier και της σειράς Fourier για $L-$περιοδικές $(L>0)$ και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f.

Απ. $\widehat{f}(n)=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-2\pi in\frac{x}{L}}dx$, $T_f\sim\sum_n \widehat{f}(n)e^{2\pi in\frac{x}{L}}$, $x\in L\mathbf{T}$

3. Αν $\sum_n \widehat{f}(n)e^{2\pi inx/T}$ είναι το μιγαδικό ανάπτυγμα σε σειρά Fourier μιας $L-$περιοδικής και ολοκληρώσιμης συνάρτησης f όπως στην άσκηση 1, δείξτε ότι

$$\sum_n \widehat{f}(n)e^{2\pi inx/T}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)+b_n\eta\mu\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right),$$

όπου $a_0=\widehat{f}(0)=\frac{1}{L}\int_{L\mathbf{T}}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{L}\int_{L\mathbf{T}}f(x)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx$ και $b_n=\frac{2}{L}\int_{L\mathbf{T}}f(x)\eta\mu\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx$. Το δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας καλείται και ως «πραγματικό» ανάπτυγμα της σειράς Fourier. Επιπλέον, αν $f\in L_2$ δείξτε την ταυτότητα Parseval

$$\frac{\|f\|_2^2}{L}=|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right).$$

4. Εστω $f\in L_1[-1/2,1/2]$. Δείξτε ότι:

(α) η f είναι άρτια (σ.π.) αν και μόνον αν $\widehat{f}(n)=\widehat{f}(-n)$,

(β) η f είναι περιττή (σ.π.) αν και μόνον αν $\widehat{f}(n)=-\widehat{f}(-n)$,

(γ) η f είναι πραγματική (σ.π.) αν και μόνον αν $\widehat{f}(-n)=\overline{\widehat{f}(n)}$.

5. Εστω $f\in L_1(\mathbf{T})$ και $f_m(t)=f(mt)$ για κάποιο φυσικό αριθμό m. Δείξτε ότι

$$\widehat{f_m}(n)=\begin{cases}\widehat{f}(n/m), & n=km\\ 0 & n\neq km\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z},$$

θεωρώντας $\widehat{f_m}(n)=\int_{\mathbf{T}} f(mt)e^{-2\pi int}dt$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}0 & -2<x<0\\ 2 & 0<x<2\end{cases}$ την οποία επεκτείνουμε περιοδικά. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f. Ορίστε την f κατάλληλα στα σημεία $x=-2$, $x=0$ και $x=2$ έτσι ώστε η σειρά Fourier της να συγκλίνει σημειακά στην f για κάθε $|x|\leq 2$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε τους τύπους της άσκησης 2.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2,\ 0\leq x<2\pi$ την οποία επεκτείνουμε περιοδικά με περίοδο 2π. Με κατάλληλη χρήση της σειράς Fourier της f δείξτε ότι

$$\textbf{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ \text{ και }\ \textbf{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε τους τύπους της άσκησης 2. Για τη **(ii)** χρησιμοποιείστε την ταυτότητα του Parseval (Θεώρημα 1.2 για $f=g$).

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|,\ |x|\leq 1/2$, την οποία επεκτείνουμε περιοδικά σ' όλο το $\mathbb{R}$. Με κατάλληλη χρήση της σειράς Fourier της f δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

9. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της 4-περιοδικής συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leq 2\\ 4-x, & 2<x<4\end{cases}$$

και δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

10. Εστω $p,q \in \mathbb{Z},\ p<q$ και $x \in \mathbb{R}^* - \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι:

(α) $\left|\sum_{p\le k\le q} e^{2\pi ikx}\right| \le \dfrac{1}{\left|\eta\mu(\pi x)\right|}$.

(β) Αν $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και μη αρνητική ακολουθία, χρησιμοποιώντας την άθροιση κατά μέρη του Abel

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = a_p \sum_{k=p}^{q} b_k + \sum_{j=p}^{q-1}\left(a_{j+1}-a_j\right)\sum_{k=j+1}^{q} b_k\ ,$$

δείξτε ότι $\left|\sum_{p\le k\le q} c_k e^{2\pi ikx}\right| \le \dfrac{c_p}{\left|\eta\mu(\pi x)\right|}$.

(γ) Αν $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ συγκλίνει και μάλιστα ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές σύνολο των πραγματικών που δεν περιέχει ακέραιο αριθμό.

11. Αν $f \in C_0(\mathbf{T})$ και αν η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbf{T}$ δείξτε ότι $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi inx}\ \forall x \in \mathbf{T}$. Πως διαμορφώνεται η παραπάνω αν $f \in L_1(\mathbf{T})$ και η σειρά Fourier της f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση;

12. Εστω $f \in C_0(\mathbf{T})$.

(α) Αν $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|n^k \widehat{f}(n)\right| < \infty$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι $f \in C_k(\mathbf{T})$.

(β) Εστω $a>2$. Αν $\left|n^a \widehat{f}(n)\right| < C$ για κάποια σταθερά C δείξτε ότι $f \in C_k(\mathbf{T})$, όπου k είναι ο μεγαλύτερος φυσικός που είναι μικρότερος του $a-1$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε κατάλληλα την άσκηση 11.

13. Δείξτε ότι $\dfrac{D_0(x)+\ldots+D_N(x)}{N+1} = \dfrac{\eta\mu^2\left(\pi x(N+1)\right)}{\eta\mu^2(\pi x)}$, όπου

$D_N(x) = \sum_{|k|\le N} e^{2\pi ikx}$.

14. Αν $f \in L_p(\mathbf{T}),\ g \in L_q(\mathbf{T})$ όπου $1 \le p < \infty$ και q είναι συζυγής εκθέτης του p, δείξτε ότι η συνέλιξη $f * g$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbf{T}$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $\left\| f(h+\cdot) - f \right\|_p \to 0,\ h \to 0$ για $p < \infty$.

15. Αν $f, g \in C_1(\mathbf{T})$, δείξτε ότι $(f * g)'(x) = f' * g = f * g'$.

16. Αν $f \in L_1(\mathbf{T})$ είναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολής δείξτε ότι

$$\left| \widehat{f}(n) \right| \le C/n,\ (n \ne 0).$$

17. Αποδείξτε την Πρόταση 1.4.

Υπόδειξη: Κάθε συνάρτηση φραγμένης μεταβολής είναι διαφορά δυο μονοτόνων συναρτήσεων και τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι πεπερασμένα. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, αρκεί να δείξετε την πρόταση για f πραγματική, αύξουσα με $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

18. Αν $f, g \in C_0(\mathbf{T})$ έχουν απόλυτα συγκλίνουσες σειρές Fourier δείξτε ότι και η fg έχει απόλυτα συγκλίνουσα σειρά Fourier. Επίσης δείξτε ότι το σύνολο όλων των συναρτήσεων με απόλυτα συγκλίνουσες σειρές Fourier είναι χώρος Banach, συμβολικά $\mathbf{A}(\mathbf{T})$ με νόρμα

$$\|f\|_{\mathbf{A}(\mathbf{T})} = \sum_n \left| \widehat{f}(n) \right|.$$

Τέλος, δείξτε ότι ο τελεστής

$$T : \mathbf{A}(\mathbf{T}) \to \ell_1(\mathbb{Z}) :\ T(f) = \left\{ \widehat{f}(n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

19. (Bernstein) Εστω $\mathbf{A}(\mathbf{T})$ είναι ο χώρος της άσκ. 18. Αν $f \in Lip_a(\mathbf{T})$ για κάποιο $a > 1/2$ δείξτε ότι $\|f\|_{\mathbf{A}(\mathbf{T})} \le c_a \|f\|_{Lip_a}$, όπου c_a είναι σταθερά που εξαρτάται μόνο απ' το a και

$$\|f\|_{Lip_a} = \sup_{t\in\mathbf{T}} |f(t)| + \sup_{t\in\mathbf{T}, h\neq 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^a}.$$

20. Δείξτε ότι η $f \in C_0(\mathbf{T})$ έχει απόλυτα συγκλίνουσα σειρά Fourier αν και μόνον αν η f είναι συνέλιξη δυο τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $\mathbf{T}$.

21. Αν $f \in L_2(\mathbf{T})$ και $N \in \mathbb{N}$, υπολογίστε την ελάχιστη τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{\mathbf{T}} \left| f(t) - \sum_{|n|\le N} c_n e^{2\pi i n t} \right|^2 dt$$

ως προς όλες τις μιγαδικές ακολουθίες $(c_n)_{n=-N}^{N}$.

22. Εστω $(K_N)_{N=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $\mathbf{T}$ έτσι ώστε $\lim_{N\to\infty} \widehat{K_N}(n) = 1,\ (n \in \mathbb{Z})$. Αν $f \in L_2(\mathbf{T})$ δείξτε ότι $f * K_N = f$ με την L_2 −έννοια.

23. Εστω $p > 1$. Δείξτε ότι $\|f * D_N - f\|_p \to 0 \Rightarrow \|f * F_N - f\|_p \to 0$, όπου $\{D_N\}$ και $\{F_N\}$ είναι οι πυρήνες Dirichlet και Feyer.

24. Αν f είναι 1-περιοδική συνάρτηση με τμηματικά συνεχή παράγωγο στο $\mathbf{T}$ δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{1/2} f(x) \frac{\eta\mu(Nx)}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

25. (Λήμμα Feyer) Αν $f \in L_1(\mathbf{T})$ και $g \in L_\infty(\mathbf{T})$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{T}} f(x) g(nx) dx = \hat{f}(0) \hat{g}(0).$$

26. Εστω $f \in L_1(\mathbf{T})$ είναι $a-$Lipschitz σε σημείο x_0 με $0 < a < 1$. Αν $(F_N)_N$ είναι η προσεγγιστική μονάδα του Feyer, δείξτε ότι

$$\left|F_N * f(x_0) - f(x_0)\right| \le \frac{C_a}{N^a},$$

όπου C_a είναι σταθερά που εξαρτάται μόνο απ' το a. Αν $a = 1$, τότε

$$\left|F_N * f(x_0) - f(x_0)\right| \le \frac{C \log N}{N}.$$

27. Εστω $T : L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R})$: $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y} dy$. Αν $\|Tf\|_2 = \|f\|_2$, δείξτε ότι ο $T : L_p(\mathbb{R}) \to L_q(\mathbb{R})$ είναι φραγμένος και $\|Tf\|_q \le \|f\|_p$ για κάθε $p \in [1,2]$, όπου p, q συζυγείς δείκτες.

28. Αν $\sum_n \left|c_n \hat{f}(n)\right| < \infty$ $\forall f \in L_1(\mathbf{T})$ δείξτε ότι $\sum_n |c_n| < \infty$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την αρχή ομοιόμορφα φραγμένου.

29. Εστω $K \in L_1(\mathbf{T})$ με $\|K\|_1 < 1$. Δοθείσης $g \in L_p(\mathbf{T})$ και άγνωστης συνάρτησης $f \in L_p(\mathbf{T})$, δείξτε ότι η εξίσωση $f - K * f = g$ έχει λύση $f = \sum_{n=0}^{\infty} K^{*n} * g$ με $\|f\|_p \le \left(1 - \|K\|_1\right)^{-1} \|g\|_p$.

30. Εστω $f \in L_p(\mathbf{T})$, $g \in L_q(\mathbf{T})$ όπου $1 < p < \infty$ και q είναι συζυγής εκθέτης του p. Δείξτε την ταυτότητα τύπου Parseval

$$\int_{\mathbf{T}} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

31. Εστω $H : L_2(\mathbf{T}) \to L_2(\mathbf{T})$ είναι ο τελεστής Hilbert. Δείξτε ότι

$$\|Hf\|_{L_2}^2 = \|f\|_{L_2}^2 - \left|\hat{f}(0)\right|^2$$

και $H^* = -H$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μεγιστικές συναρτήσεις/Τελεστές

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε την έννοια του μεγιστικού τελεστή και δείχνουμε τη σπουδαιότητά του όσον αφορά την απόδειξη θεωρημάτων που σχετίζονται με τη σημειακή σ.π. σύγκλιση σε χώρους L_p. Ενα σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη μεγιστικών τελεστών (και όχι μόνον) είναι το Θεώρημα παρεμβολής Marcinkiewicz που επεκτείνει το θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για υπογραμ-μικούς τελεστές. Το Θεώρημα αυτό μας επιτρέπει να δείξουμε ότι ένας υπογραμμικός τελεστής που είναι φραγμένος σε δυο ασθενείς χώρους L_p και L_q (με την έννοια που θα ορίσουμε παρακάτω) είναι φραγμένος στο χώρο L_r για κάθε δείκτη r μεταξύ των p,q. Ετσι για να δείξουμε τη συνέχεια ενός τελεστή σε κάποιο χώρο L_p αρκεί να δείξουμε ότι αυτός είναι ασθενώς φραγμένος σε δυο απλούστερους χώρους (συνήθως L_1 και L_∞ ή L_1 και L_2 ή L_2 και L_∞) και στη συνέχεια να συμπεράνουμε τη συνέχεια στον L_p μέσω παρεμβολής.

2.2 Το Θεώρημα Marcinkiewicz

Εστω $(X,\mathcal{X},\mu)$ είναι χώρος μέτρου και $f:X\to\mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση.

Ορισμός 2.1 *Καλούμε* ***κατανομή*** *(distribution) της f ως προς το μέτρο μ τη μη αρνητική συνάρτηση*

$$d_f:(0,+\infty)\to[0,+\infty]:\ d_f(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\ |f(x)|>\lambda\right\}\right).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η d_f είναι φθίνουσα συνάρτηση, άρα μετρήσιμη. Αναφέρουμε ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής:

(i) Αν $|f|\le|g|$, τότε $d_f\le d_g$.

(ii) Αν $|f_n|\to|f|$ σημειακά, τότε $d_{f_n}\to d_f$ σημειακά.

(iii) Αν $k,\lambda>0$, τότε $d_{g+h}(k+\lambda)\le d_g(k)+d_h(\lambda)$.

(iv) Αν $k,\lambda>0$, τότε $d_{fg}(k\lambda)\le d_f(k)+d_g(\lambda)$.

Πρόταση 2.1

Εστω $0<p<\infty$ και $f\in L_p(X,\mu)$. Τότε

$$\|f\|_{L_p}^p=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}d_f(\lambda)\,d\lambda.$$

Ορισμός 2.2 *Εστω $0<p<\infty$ και f είναι όπως παραπάνω. Αν*

$$\|f\|_{p,\infty}=\sup_{\lambda>0}\left\{\lambda\ d_f^{1/p}(\lambda)\right\},$$

τότε ο χώρος όλων των συναρτήσεων f με $\|f\|_{p,\infty}<\infty$ καλείται ***ασθενής χώρος*** *L_p, συμβολικά $L_{p,\infty}(X,\mu)$.*

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_{p,\infty}$ δεν ικανοποιεί την τριγωνική

ανισότητα. Πράγματι, ισχύει

$$\|f+g\|_{p,\infty} \le \max\left(2, 2^{1/p}\right)\left(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}\right)$$

κι έτσι η $\|\cdot\|_{p,\infty}$ δεν είναι νόρμα. Είναι όμως μια οιονεί-νόρμα (quasi-norm), ως προς την οποία ο $L_{p,\infty}(X,\mu)$ είναι ένας οιονεί χώρος Banach (quasi-Banach space). Με άλλα λόγια, ισχύει η ισότητα $\|f\|_{p,\infty} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ $\mu-$σ.π. και $\|cf\|_{p,\infty} = |c|\ \|f\|_{p,\infty}$. Πράγματι:

$$d_{cf}(\lambda) = \mu\left(\left\{x:\ |cf(x)| > \lambda\right\}\right) = \mu\left(\left\{x:\ |f(x)| > \lambda/|c|\right\}\right) = d_f\left(\lambda/|c|\right).$$

Ετσι

$$\|cf\|_{p,\infty} = \sup_{\lambda>0}\left\{\lambda\ d_{cf}^{1/p}(\lambda)\right\} = \sup_{b|c|>0}\left\{|cb|\ d_f^{1/p}(b)\right\} = |c|\ \|f\|_{p,\infty}.$$

Υπενθυμίζουμε επίσης την ανισότητα Chebychev

$$\lambda^p d_f(\lambda) \le \|f\|_p^p \tag{1}$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα ότι

$$\|f\|_{p,\infty} \le \|f\|_p.$$

Με άλλα λόγια:

$$L_p(X,\mu) \subseteq L_{p,\infty}(X,\mu).$$

Ορισμός 2.3 *Ενας τελεστής* $T:\mathcal{M}(X,\mu) \to \mathcal{M}(Y,\nu)$ *καλείται* ***υπο-γραμμικός*** *αν*

$$\left|T(af+bg)(x)\right| \le |a|\left|Tf(x)\right| + |b|\left|Tg(x)\right| \quad \forall x \in X,\ a,b \in \mathbb{C}.$$

Ορισμός 2.4 *Εστω* $p,q \in [1,+\infty]$ *και*

$$T: L_p(X,\mu) \to L_q(Y,\nu)$$

είναι υπογραμμικός τελεστής. Αν

$$\|Tf\|_q \le M\|f\|_p$$

*για κάποια θετική σταθερά M, τότε λέμε ότι ο T είναι (p,q)-**ισχυρώς φραγμένος** τελεστής.*

Ορισμός 2.5 *Εστω $p,q \in [1,+\infty]$ και*

$$T : L_p(X,\mu) \to L_{q,\infty}(Y,\nu)$$

είναι υπογραμμικός τελεστής. Αν

$$\|Tf\|_{q,\infty} \le M \|f\|_p$$

*για κάποια θετική σταθερά M, τότε λέμε ότι ο T είναι (p,q)-**ασθενώς φραγμένος** τελεστής. Επίσης λέμε ότι ο T είναι (p,∞)-**ασθενώς φραγμένος** τελεστής αν και μόνον αν ο T είναι (p,∞)-**ισχυρώς φραγμένος** τελεστής.*

Θεώρημα 2.1 (**Marcinkiewicz, ασθενής μορφή**).

Εστω $(X,\mathcal{X},\mu)$, $(Y,\mathcal{Y},\nu)$ είναι χώροι μέτρου, $\mathcal{M}(Y)$ είναι ο χώρος των μιγαδικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο Y, $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$ και

$$T : L_{p_0}(X,\mu) + L_{p_1}(X,\mu) \to \mathcal{M}(Y,\nu)$$

είναι υπογραμμικός τελεστής. Αν ο T είναι (p_0,p_0)-ασθενώς φραγμένος τελεστής και (p_1,p_1)-ασθενώς φραγμένος τελεστής, τότε ο T είναι (p,p)-ισχυρώς φραγμένος τελεστής για κάθε $p_0 < p < p_1$.

Απόδειξη. Εστω $p_0 < p < p_1$. Δοθείσης $f \in L_p$ και θετικής σταθεράς c (που θα προσδιορίσουμε παρακάτω), για $\lambda > 0$ γράφουμε $f = f_0 + f_1$, όπου

$$\begin{cases} f_0 = f\chi_{\{x\in X:\, |f(x)|>c\lambda\}} \in L_{p_0} \\ f_1 = f\chi_{\{x\in X:\, |f(x)|\le c\lambda\}} \in L_{p_1} \end{cases}$$

(βλ. απόδειξη Πρότασης 0.5, Κεφαλαίου 0). Εξ υποθέσεως έχουμε:

$$\left|Tf(x)\right| \le \left|Tf_0(x)\right| + \left|Tf_1(x)\right|.$$

Αρα

$$d_{Tf}(\lambda) \le d_{Tf_0}(\lambda/2) + d_{Tf_1}(\lambda/2)$$

από τις παραπάνω ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής (βλ. ιδιότητα (iii)). Θεωρούμε δυο περιπτώσεις:

(α): $p_1 = \infty$. Τότε $\|Tg\|_\infty \le A_1 \|g\|_\infty$ για κάποια θετική σταθερά A_1. Επιλέγουμε $c = 1/(2A_1)$ και έχουμε

$$\left|Tf_1(x)\right| \le \|Tf_1\|_\infty \le A_1 \|f_1\|_\infty \le A_1 c\lambda = A_1 \frac{\lambda}{2A_1} = \frac{\lambda}{2},$$

άρα

$$d_{Tf_1}(\lambda/2) = \mu\left(\left\{x \in X : \left|Tf_1(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) = 0.$$

Επίσης από την ασθενή (p_0, p_0) ανισότητα του T παίρνουμε

$$d_{Tf_0}(\lambda/2) \le \left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}, \qquad (2)$$

όπου $\|Tg\|_{p_0,\infty} \le A_0 \|g\|_{p_0}$ $\forall g \in L_{p_0}$ για κάποια θετική σταθερά A_0. Από την Πρόταση 2.1 παίρνουμε:

$$\|Tf\|_p^p = \int_X |Tf|^p \, d\mu = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} d_{Tf}(\lambda) d\lambda \le p\int_0^\infty \lambda^{p-1} d_{Tf_0}(\lambda/2) d\lambda.$$

Με χρήση της (2) έχουμε

$$\|Tf\|_p^p \le p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} (2A_0)^{p_0} \int_{\{x\in X:\, |f(x)|>c\lambda\}} \left|f(x)\right|^{p_0} d\mu d\lambda$$

$$\le p(2A_0)^{p_0} \int_X \left|f(x)\right|^{p_0} \int_0^{|f(x)|/c} \lambda^{p-1-p_0} d\lambda d\mu = \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_p^p.$$

(β): $p_1 < \infty$. Από την υπόθεση ισχύουν οι κάτωθι ανισότητες:

$$d_{Tf_j}(\lambda/2) \le \left(\frac{2A_j}{\lambda} \|f_j\|_{p_j} \right)^{p_j}, \ j = 0,1.$$

Εργαζόμενοι όπως παραπάνω (για τυχαίο $c > 0$) παίρνουμε:

$$\|Tf\|_p \le p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} (2A_0)^{p_0} \int_{\{x\in X:\, |f(x)>c\lambda|\}} |f(x)|^{p_0} \, d\mu d\lambda$$

$$+ p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1} (2A_1)^{p_1} \int_{\{x\in X:\, |f(x)|\le c\lambda\}} |f(x)|^{p_1} \, d\mu d\lambda$$

$$= \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0} \frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p} \frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}} \right) \|f\|_p . \qquad \blacksquare$$

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη και τη γενική μορφή του θεωρήματος:

Θεώρημα 2.1′ (**Marcinkiewicz, γενική μορφή**).

Εστω $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ *είναι χώροι μέτρου,* $\mathcal{M}(Y)$ *είναι ο χώρος των μιγαδικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο* Y, $1 \le p_0, p_1 \le \infty$,

$$T : L_{p_0}(X,\mu) + L_{p_1}(X,\mu) \to \mathcal{M}(Y,\nu),$$

είναι υπογραμμικός τελεστής, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $p_0 \le q_0$, $p_1 \le q_1$, $q_0 \ne q_1$ *και*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, \quad t \in (0,1).$$

Αν ο T *είναι* (p_0, q_0)*-ασθενώς φραγμένος τελεστής και* (p_1, q_1)*-ασθενώς φραγμένος τελεστής, τότε ο* T *είναι* (p,q)*-ισχυρώς φραγμένος τελεστής.*

Παρατήρηση. Το θεώρημα Marcinkiewicz γενικεύει το θεώρημα Riesz-Thorin. Υστερεί όμως στον υπολογισμό της σταθεράς M (βλ. θεώρημα 1.5, Κεφ. 1).

2.3 Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood.

Ορισμός 2.6 *Εστω* $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η* f *είναι* ***τοπικά ολοκληρώσιμη*** *στο* X *αν*

$$\int_K |f(x)| dx < \infty \quad \forall K \subset X, \ K \text{ συμπαγές}.$$

Ο χώρος όλων των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο X *συμβολίζεται με* $L_{1,loc}(X)$.

Προφανώς

$$L_1(X) \subset L_{1,loc}(X).$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται και για $p-$τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Στο εξής συμβολίζουμε με

$$\mathcal{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R} : \ |y - x| < r\} = (x - r, x + r)$$

το ανοικτό διάστημα κέντρου x και ακτίνας r και με $|A|$ το μέτρο Lebesgue μετρήσιμου συνόλου A.

Ορισμός 2.7 *Εστω* $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$. *Ορίζουμε τη* ***μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood*** *της* f *στο* $x \in \mathbb{R}$ *ως εξής:*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\mathcal{B}_r(x)|} \int_{\mathcal{B}_r(x)} |f(y)| dy.$$

Ισοδύναμα:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{|y|<r} |f(x-y)| dy$$

$$= \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \left(|f| * \chi_{[-r,r]} \right)(x). \qquad (3)$$

Ο ορισμός 2.7 γενικεύεται αναλόγως και στο χώρο $\mathbb{R}^n$. Για κάθε x, η μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood μας δίνει το ελάχιστο άνω φράγμα των μέσων όρων της $|f|$ ως προς όλα τα διαστήματα κέντρου x και ακτίνας r. Προφανώς $Mf(x) \geq 0$. Η απεικόνιση

$$f \to Mf$$

καλείται ***μεγιστικός τελεστής*** Hardy-Littlewood. Προφανώς ο τελεστής

$$M : L_\infty \to L_\infty$$

είναι φραγμένος διότι

$$\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y)|dy \le \frac{2r}{2r}\|f\|_\infty = \|f\|_\infty \Rightarrow \|Mf\|_\infty \le \|f\|_\infty .$$

Με άλλα λόγια, ο M είναι (∞,∞)-ισχυρώς (και εξ ορισμού ασθενώς) φραγμένος. Θα δείξουμε ότι

Θεώρημα 2.2

Ο μεγιστικός τελεστής M είναι $(1,1)-$ασθενώς φραγμένος (και εφόσον είναι και (∞,∞)-ασθενώς φραγμένος θα είναι και $(p,p)-$ισχυρώς φραγμένος για κάθε $1 < p < \infty$).

Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού θα χρειασθούμε το ακόλουθο Λήμμα το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

Λήμμα 2.1 (κάλυψης Vitalli)

Εστω $\{E_a\}_{a\in A}$ είναι μια οικογένεια (αριθμήσιμη ή όχι) ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ με $\sup_a |E_a| < \infty$ και $E = \bigcup_{a\in A} E_a$. Τότε υπάρχει ακολουθία $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{E_a\}_{a\in A}$ με στοιχεία ξένα μεταξύ τους ανά δύο, έτσι ώστε

$$|E| \le 5\sum_{k\in\mathbb{N}} |E_k|.$$

Απόδειξη Θεωρήματος 2.2. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Marcinkiewicz. Σημειώνουμε ότι ο M είναι υπογραμμικός τελεστής και όπως ήδη έχουμε πει είναι (∞,∞) ασθενώς φραγμένος. Αρκεί να δείξουμε ότι ο M είναι $(1,1)-$ασθενώς φραγμένος. Με άλλα λόγια θα δείξουμε ότι

$$\|Mf\|_{1,\infty} = \sup_{\lambda>0}\{\lambda\, d_{Mf}(\lambda)\} \le C\|f\|_1 \quad \forall f \in L_1 .$$

Εστω $A_\lambda = \{x:\ Mf(x) > \lambda\}$. Τότε, για κάθε $x \in A_\lambda$, υπάρχει ακτίνα r_x έτσι ώστε

$$\frac{1}{2r_x}\int_{x-r}^{x+r} |f(y)|dy > \lambda \Rightarrow 2r_x < \frac{1}{\lambda}\int_{x-r}^{x+r} |f(y)|dy. \qquad (4)$$

Πραφανώς η οικογένεια $\{\mathcal{B}_{r_x}(x):\ x \in A_\lambda\}$ καλύπτει το σύνολο A_λ. Από το Λήμμα 2.1 υπάρχει ακολουθία

$$\mathcal{B}_{r_{x_k}}(x_k),\ k = 1,...$$

ξένων μεταξύ τους ανά δύο ανοικτών διαστημάτων τέτοια ώστε

$$|A_\lambda| \le \left|\bigcup_{x\in A_\lambda} \mathcal{B}_{r_x}\right| \le 5\sum_k \left|\mathcal{B}_{r_{x_k}}\right| = 5\sum_k (2r_{x_k}).$$

Απ' αυτήν την ανισότητα και την (4) παίρνουμε

$$|A_\lambda| \le 5\sum_k (2r_{x_k}) \le \frac{5}{\lambda}\sum_k \int_{x_k - r_{x_k}}^{x_k + r_{x_k}} |f(y)|dy \le \frac{5}{\lambda}\|f\|_1.$$

Αρα

$$\lambda|A_\lambda| \le 5\|f\|_1 \Rightarrow \lambda d_{Mf}(\lambda) \le 5\|f\|_1 \Rightarrow \|Mf\|_{1,\infty} \le 5\|f\|_1.$$

Συνεπώς ο M είναι $(1,1)-$ασθενώς φραγμένος τελεστής. ■

Σημείωση. Το θεώρημα 2.3 γενικεύεται και στον $\mathbb{R}^n$.

2.4 Προσεγγιστικές μονάδες και μεγιστικοί τελεστές

Ας δούμε τώρα άλλες κλάσεις μεγιστικών τελεστών. Πρώτα δίνουμε τον εξής:

Ορισμός 2.8 *Εστω* $\{K_\lambda\}_{\lambda>0}$ *είναι μια οικογένεια μετρήσιμων συναρτήσεων στο* $\mathbb{R}$ *που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) $\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x)\,dx = 1 \quad \forall \lambda$,

(β) $\sup_{\lambda>0} \|K_\lambda\|_{L_1(\mathbb{R})} \le C < \infty$ *για κάποια (απόλυτη) σταθερά* C,

(γ) $\lim_{\lambda\to 0^+} \int_{|x|\ge\delta} |K_\lambda(x)|\,dx = 0$ *για κάθε φιξαρισμένο* $\delta > 0$.

Τότε η οικογένεια $\{K_\lambda\}$ *καλείται* ***προσεγγιστική μονάδα****.*

Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε προσεγγιστικές μονάδες ως εξής: Εστω $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ είναι τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 1$. Τότε η οικογένεια

$$\phi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \tag{5}$$

είναι μια προσεγγιστική μονάδα. Για κάθε τέτοια οικογένεια συναρτήσεων και $f \in L_p(\mathbb{R})$ ορίζουμε την ακολουθία τελεστών

$$U_\lambda f = f * \phi_\lambda .$$

Τότε η

$$Uf(x) = \sup_{\lambda>0} |U_\lambda f(x)| \tag{6}$$

είναι μια μεγιστική συνάρτηση και επιπλέον ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση 2.2

Εστω $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ *είναι θετική και άρτια συνάρτηση που είναι και φθίνουσα στο* $(0,+\infty)$, $\{\phi_\lambda\}$ *είναι όπως στην (5),* Uf *είναι όπως στην (6) και* Mf *είναι η μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood. Τότε*

$$Uf(x) \le \|\phi\|_{L_1} \; Mf(x).$$

Αρα ο τελεστής $f \to Uf$ *είναι* $(1,1)-$*ασθενώς φραγμένος και* $(p,p)-$*ισχυρώς φραγμένος για κάθε* $1 < p \le \infty$.

Απόδειξη. Εστω ϕ είναι απλή συνάρτηση της μορφής

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a_j \chi_{\mathcal{B}_{r_j}(0)} \quad a_j > 0,\; r_j < r_{j+1},$$

και

$$\phi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} a_j \chi_{\mathcal{B}_{r_j}(0)}\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Τότε

$$|U_\lambda f| = |f * \phi_\lambda| = \left| \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} a_j \left|\mathcal{B}_{r_j}(0)\right| \frac{1}{\left|\mathcal{B}_{r_j}(0)\right|} f * \chi_{\mathcal{B}_{r_j}(0)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} a_j \left|\mathcal{B}_{r_j}(0)\right| \left(\frac{1}{\left|\mathcal{B}_{\lambda r_j}(0)\right|} f * \chi_{\mathcal{B}_{\lambda r_j}(0)} \right) \right|$$

$$\le Mf(x) \sum_{k=1}^{n} a_j \left|\mathcal{B}_{r_j}(0)\right| = Mf(x) \; \|\phi\|_{L_1},$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε από την (3). Αρα

$$|Uf| \le \|\phi\|_{L_1} Mf.$$

Στη γενικότερη περίπτωση που η $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ είναι μη απλή συνάρτηση, τότε ως γνωστό προσεγγίζεται σημειακά από μια αύξουσα ακολουθία $\{g_m\}$ απλών συναρτήσεων. Αν

$$g_{\lambda,m}(x) = \lambda^{-1} g_m\left(\lambda^{-1} x\right),$$

τότε από το Λήμμα Fatou

$$U_\lambda f = f * \phi_\lambda \le \lim_{m\to\infty} f * g_{\lambda,m} = \lim_{m\to\infty} U_\lambda g_{\lambda,m} \le \lim_{m\to\infty} \|g_{\lambda,m}\|_{L_1} Mf \le \|\phi\|_{L_1} Mf. \quad \blacksquare$$

Πόρισμα 2.1

Εστω $|\psi| \le \phi$ όπου η ϕ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της Πρότασης 2.1. Τότε

$$\sup_{\lambda} \left| f * \psi_{\lambda}(x) \right| \le \|\phi\|_{L_1} \; Mf(x).$$

Θεώρημα 2.3 (Μεγιστικοί τελεστές και σύγκλιση σ.π.)

Εστω $\lambda > 0$, $R_{\lambda} : L_p(X,\mu) \to \mathcal{M}(Y)$, $1 \le p < \infty$ είναι μια ακολουθία γραμμικών τελεστών, όπου $\mathcal{M}(Y)$ είναι ο χώρος των μιγαδικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο Y και

$$Rf(x) = \sup_{\lambda} \left| R_{\lambda} f(x) \right|.$$

Αν ο τελεστής $f \to Rf$ είναι $(p,q)-$ασθενώς φραγμένος (για κάποιο $1 \le q < \infty$), τότε το σύνολο

$$\left\{ f \in L_p(X,\mu) : \; \lim_{\lambda \to 0^+} R_{\lambda} f(x) = f(x), \text{ σημειακά σ.π.} \right\}$$

είναι κλειστό στον $L_p(X,\mu)$.

Απόδειξη. Εστω $\{f_n\} \in L_p(X,\mu)$ έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ με τη νόρμα του L_p και $\lim_{\lambda \to 0^+} R_{\lambda} f_n(x) = f_n(x)$ σημειακά σ.π. Τότε

$$\mu\left\{ x \in X : \; \limsup_{\lambda \to 0^+} \left| R_{\lambda} f(x) - f(x) \right| > \alpha \right\}$$

$$= \mu\left\{ x \in X : \; \limsup_{\lambda \to 0^+} \left| R_{\lambda}(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x) \right| > \alpha \right\}$$

$$\le \mu\left\{ x \in X : \; \limsup_{\lambda \to 0^+} \left| R_{\lambda}(f_n - f)(x) \right| > \alpha/2 \right\}$$

$$+ \mu\left\{ x \in X : \; \limsup_{\lambda \to 0^+} \left| (f_n - f)(x) \right| > \alpha/2 \right\}$$

$$\le \mu\{x\in X:\ R(f_n-f)(x)>\alpha/2\}+\mu\{x\in X:\ |(f_n-f)(x)|>\alpha/2\}$$

$$\le \left(\frac{2C}{\alpha}\|f-f_n\|_p\right)^q+\left(\frac{2}{\alpha}\|f-f_n\|_p\right)^p \to 0,\ n\to\infty,$$

διότι ο R είναι $(p,q)-$ασθενώς φραγμένος και ισχύει η (1). Αρα

$$\mu\left\{x\in X:\ \limsup_{\lambda\to 0^+}\left|R_\lambda f(x)-f(x)\right|>0\right\}$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\mu\left\{x\in X:\ \limsup_{\lambda\to 0^+}\left|R_\lambda f(x)-f(x)\right|>1/k\right\}=0. \qquad \blacksquare$$

Πόρισμα 2.2 (Lebesgue)

Εστω $f\in L_p(\mathbb{R}),\ 1\le p<\infty$. *Τότε*

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{|\mathcal{B}_r(0)|}\int_{\mathcal{B}_r(0)} f(x-y)\,dy=f(x) \quad \textit{σ.π.}$$

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι ο μεγιστικός τελεστής Hardy-Littlewood είναι (1,1)-ασθενώς φραγμένος. Εστω

$$Lf(x)=\sup_{\lambda}\left|L_\lambda f(x)\right|=\sup_{\lambda}\left|\left(\frac{1}{|\mathcal{B}_\lambda(0)|}\int_{\mathcal{B}_\lambda(0)} f(x-y)\,dy\right)\right|.$$

Τότε

$$Lf(x)\le Mf(x)$$

άρα ο Lf είναι (1,1)-ασθενώς φραγμένος. Από το θεώρημα 2.3 το σύνολο

$$A=\left\{f\in L_p(\mathbb{R}):\ \lim_{\lambda\to 0^+}L_\lambda f(x)=f(x),\ \text{σημειακά σ.π.}\right\}$$

είναι κλειστό στον L_p. Αλλά αν f είναι συνεχής συνάρτηση πάνω σε φραγμένο φορέα τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$\lim_{\lambda \to 0^+} L_\lambda f(x) = f(x).$$

Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων είναι πυκνό στον L_p και ταυτόχρονα ανήκει στο σύνολο A. Εφόσον το A είναι κλειστό αναγκαστικά $A = L_p$. ■

Σημείωση. Το Πόρισμα 2.2 γενικεύεται και για $f \in L_{1,loc}$.

2.5 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τη συνάρτηση κατανομής d_f της απλής συνάρτησης $s(x)=\sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{A_j}$, $b_j \in \mathbb{R}$, όπου A_j είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο μετρήσιμα σύνολα.

2. Εστω f,g μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

(i) Αν $|f| \le |g|$, τότε $d_f \le d_g$.

(ii) Αν $k,\lambda > 0$, τότε $d_{f+g}(k+\lambda) \le d_f(k) + d_g(\lambda)$.

(iii) Αν $k,\lambda > 0$, τότε $d_{fg}(k\lambda) \le d_f(k) + d_g(\lambda)$.

(iv) Αν $|f_n| \to |f|$ σημειακά, τότε $d_{f_n} \to d_f$ σημειακά.

3. Αποδείξτε την Πρόταση 2.1.

4. Εστω $f: E \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, $a > 0$ είναι μια σταθερά και $A_a = \{x \in E:\ |f(x)| > a\}$. Αν

$$h_a = f\chi_{A_a^c} + a\big(sign(f)\big)\chi_{A_a} \quad \text{και} \quad g_a = \big(sign(f)\big)\big(|f| - a\big)\chi_{A_a},$$

δείξτε ότι:

(i) $f = g_a + h_a$.

(ii) $d_{g_a}(b) = d_f(a+b)$ και $d_{h_a}(b) = \begin{cases} d_f(b) & b < a \\ 0 & b \ge a \end{cases}$.

5. Δείξτε την ανισότητα Chebychev

$$d_f(\lambda) = \mu\big(\{x:\ |f(x)| > \lambda\}\big) \le \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}, \quad \lambda > 0.$$

6. Βρείτε συνάρτηση $f \in L_{p,\infty}(\mathbb{R})$, αλλά $f \notin L_p(\mathbb{R}),\ (1 \le p < \infty)$.

7. Εστω $f \in L_{p,\infty}(X,\mu)$ και $E \subset X$ με $\mu(E) < \infty$. Αν $1 \le q < p < \infty$ δείξτε ότι

(i) $\|f\|_{L_q(E)}^q \le \dfrac{p}{p-q}\mu(E)^{1-q/p}\|f\|_{L_{p,\infty}(X)}^q$.

(ii) $L_p(X) \subseteq L_{p,\infty}(X) \subseteq L_q(X)$, υπό την προϋπόθεση $\mu(X) < \infty$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την Πρόταση 2.1 και το γεγονός ότι

$$\mu\Big(E \cap \{x:\ |f(x)| > \lambda\}\Big) \le \min\left(\mu(E), \frac{\|f\|_{p,\infty}^p}{\lambda^p}\right).$$

8. Εστω $0 < p < r < q \le \infty$ και $f \in L_{p,\infty}(X,\mu) \cap L_{q,\infty}(X,\mu)$. Δείξτε ότι $f \in L_r(X,\mu)$ αποδεικνύοντας ότι

$$\|f\|_r \le C_{p,q,r}\|f\|_{p,\infty}^a \|f\|_{q,\infty}^{1-a},$$

όπου $a \in (0,1)$.

9. Αν T είναι $(p,q)-$ισχυρώς φραγμένος γραμμικός τελεστής δείξτε ότι ο T είναι $(p,q)-$ασθενώς φραγμένος τελεστής.

10. Εστω $1 < p < r \le \infty$, (X,μ) χώρος μέτρου και T είναι $(1,1)-$ασθενώς φραγμένος γραμμικός τελεστής με νόρμα $\|T\|_{L_1 \to L_{1,\infty}}$ και $(r,r)-$ισχυρώς φραγμένος με νόρμα $\|T\|_{L_r \to L_r}$. Δείξτε ότι ο T είναι $(p,p)-$ισχυρώς φραγμένος τελεστής. Στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \le \|T\|_{L_{(p+1)/2} \to L_{(p+1)/2}}^{1-a} \|T\|_{L_r \to L_r}^a$$

για κάποιο $a \in (0,1)$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την ασθενή μορφή του θεωρήματος

Marcinkiewicz και στη συνέχεια χρησιμοποιείστε κατάλληλα το θεώρημα 1.5 παρεμβολής Riesz-Thorin.

11. Δείξτε ότι η οικογένεια Poisson $P_\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2},\ \lambda>0$ είναι μια προσεγγιστική μονάδα.

12. Αν $f\in L_\infty(\mathbb{R})$ είναι συνεχής σε σημείο x_0 και $\{K_\lambda\}_{\lambda>0}$ είναι μια προσεγγιστική μονάδα, δείξτε ότι $\lim_{\lambda\to 0^+} f*K_\lambda(x_0)=f(x_0)$ σημειακά.

13. Αν $f\in L_p(\mathbb{R})\ (1\le p<\infty)$ και $\Psi_\lambda(x)=\frac{1}{\lambda}\psi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ είναι μια προσεγγιστική μονάδα, όπου $|\psi(x)|\le\frac{C}{1+|x|^a},\ a>1$, δείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0^+} f*K_\lambda(x)=f(x) \text{ σ.π. στο } \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Συνδυάστε την Πρόταση 2.2, το Πόρισμα 2.1 και το Θεώρημα 2.3 με την άσκηση 12 και το γεγονός ότι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με φραγμένο φορέα είναι πυκνό στον $L_p(\mathbb{R})$.

14. Αν Mf είναι η μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood υπολογίστε την $M\chi_{[a,b]},\ a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

15. Αν η μεγιστική συνάρτηση Mf των Hardy-Littlewood μηδενίζεται για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι $Mf(x)=0$ σ.π. στο $\mathbb{R}$.

16. Εστω $f\in L_1(\mathbb{R}),\ f\ne 0$. Δείξτε ότι η μεγιστική συνάρτηση $Mf\notin L_1(\mathbb{R})$.

17. Αν Mf είναι η μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood, $B\subset\mathbb{R}$ φραγμένο και $C>0$ σταθερά, δείξτε ότι

$$\int_B Mf\le 2|B|+C\int_{\mathbb{R}}|f|\log^+|f|,$$

όπου $\log^+ t = \max\{\log t, 0\}$.

18. Εστω $E_{n,k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$ είναι «δυαδικά» διαστήματα. Ορίζουμε το **«δυαδικό» μεγιστικό τελεστή**

$$M_d f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} M_d(n, x),$$

όπου

$$M_d f(n,x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{|E_{n,k}|} \int_{E_{n,k}} f(y)\,dy \right) \chi_{E_{n,k}}(x), \ f \in L_1(\mathbb{R}).$$

(α) Δείξτε ότι ο τελεστής M_d είναι $(1,1)-$ασθενώς φραγμένος και $(\infty,\infty)-$ισχυρώς φραγμένος.

(β) Δείξτε ότι ο M_d είναι $(p,p)-$ισχυρώς φραγμένος για κάθε $1 < p < \infty$. `

(γ) Δείξτε ότι $\lim_{n \to \infty} M_d f(n,x) = f(x)$ σ.π.

Κεφάλαιο 3

Ολοκλήρωμα Fourier

3.1 Εισαγωγή

Διαισθητικά το ολοκλήρωμα Fourier είναι οριακή περίπτωση των σειρών Fourier με την ακόλουθη έννοια:

Εστω $g \in L_1(\mathbb{R})$. Τότε η g δε μπορεί ν' αναπτυχθεί σε σειρά Fourier γιατί δεν είναι περιοδική συνάρτηση. Απ' την άλλη μεριά η g προσεγγίζεται σημειακά και με την L_1-νόρμα από την ακολουθία συναρτήσεων $\left\{g\chi_{[-N/2,N/2]}\right\}_{N\in\mathbb{N}}$. Ας ορίσουμε τώρα τη $N-$περιοδική συνάρτηση f_N έτσι ώστε

$$f_N(x) = g(x), \quad \forall x \in [-N/2,\, N/2].$$

Τότε (φορμαλιστικά)

$$f_N(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x/N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \int_{-N/2}^{N/2} g(t) e^{-2\pi i t \frac{n}{N}} dt \right) e^{2\pi i x \frac{n}{N}}$$

$$g\chi_{[-N/2,N/2)} \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i t \frac{n}{N}} dt \right) e^{2\pi i x \frac{n}{N}},$$

και για $N \to \infty$

$$g \sim \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i t \gamma} dt \right) e^{2\pi i x \gamma} d\gamma,$$

ερμηνεύοντας τη σειρά ως άθροισμα Riemann ως προς τη μεταβλητή γ. Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι μια συνάρτηση $\hat{g}$ που καλείται μετασχηματισμός Fourier της g και παίζει ρόλο ανάλογο με την ακολουθία των συντελεστών Fourier, αλλά για μη περιοδικές συναρτήσεις. Το εξωτερικό ολοκλήρωμα καλείται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $\hat{g}$. Και τα δυο ολοκληρώματα μαζί είναι το ανάλογο της σειράς Fourier για μη περιοδικές συναρτήσεις.

Υπ' αυτή την έννοια αναμένουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier στην πραγματική ευθεία έχει παρόμοιες ιδιότητες μ' αυτές των σειρών Fourier και αυτό σε γενικές γραμμές είναι αληθές. Οι διαφοροποιήσεις οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι οι χώροι $L_p(\mathbb{R})$ δεν περιέχονται ο ένας μέσα στον άλλο όπως συμβαίνει με τους $L_p(\mathbf{T})$.

Κλείνοντας αναφέρουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα βασικό εργαλείο της Αρμονικής Ανάλυσης. Με τη χρήση του μελετούμε τον τελεστή Laplace, επιλύουμε διαφορικές εξισώσεις, προβλήματα ανάλυσης χρόνου/συχνότητας κλπ.

3.2 Ο μετασχηματισμός Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Ορισμός 3.1 *Εστω* $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ *είναι ο χώρος των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων και* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *είναι μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση, δηλαδή* $f\in L_1:=L_1(\mathbb{R})$. *Τότε ο γραμμικός τελεστής*

$$\hat{S}:L_1(\mathbb{R})\to\mathcal{M}(\mathbb{R}):\ \ \hat{S}f(\gamma)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi ix\gamma}dx$$

είναι καλά ορισμένος. Η εικόνα $\hat{S}f$ *καλείται* ***μετασχηματισμός Fourier*** *της* f. *Για απλότητα χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό*

$$\hat{f}:=\hat{S}f\,.$$

Στο εξής (και όταν δε δημιουργείται παρανόηση) θα γράφουμε $L_p:=L_p(\mathbb{R})$ για τους συνήθεις L_p-χώρους των $p-$ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, $C_k:=C_k(\mathbb{R})$, $k=0,1,2,...$ για τους χώρους των $k-$παραγωγίσιμων συναρτήσεων με συνεχή k-παράγωγο (για $k=0$ $C_0:=C_0(\mathbb{R})$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων) και $\ell_p:=\ell_p(\mathbb{Z})$ με τις συνήθεις νόρμες. Υπενθυμίζουμε ότι

$$L_p(\mathbb{R})\bigcap L_q(\mathbb{R})\subseteq L_r(\mathbb{R})\subseteq L_p(\mathbb{R})+L_q(\mathbb{R}),\quad 1\le p<r<q\le\infty\,.$$

Κατ' αρχήν αναφέρουμε χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier που αποδεικνύονται εύκολα:

Πρόταση 3.1

F1. *Για κάθε* $f,g\in L_1$ *ισχύει*

$$\widehat{(af+bg)}=a\hat{f}+b\hat{g},\quad a,b\in\mathbb{C}\ \textit{(γραμμικότητα).}$$

F2. *Αν* $f_\tau=f(\cdot-\tau)$, *τότε*

$$\widehat{f_\tau}(\gamma)=\hat{f}(\gamma)e^{-2\pi i\gamma\tau}\ \textit{(μετάθεση στο χρόνο).}$$

F3. *Για* $\omega\in\mathbb{R}$ *ισχύει:*

$$\widehat{e^{2\pi i\omega\cdot} f}(\gamma) = \hat{f}(\gamma - \omega)$$ *(μετάθεση στις συχνότητες).*

F4. *Για* $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ *ισχύει:*

$$\widehat{f(a\cdot)}(\gamma) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\gamma}{a}\right)$$ *(διαστολή).*

F5. $\hat{\hat{f}}(\gamma) = \overline{\hat{f}(-\gamma)},\ \ \gamma \in \mathbb{R}$.

F6. *Εστω* $f \in L_1$. *Αν* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ *και* $F \in L_1$, *τότε η* F *είναι απόλυτα συνεχής και*

$$\hat{F}(\gamma) = \frac{\hat{f}(\gamma)}{2\pi i\gamma},\ \ \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$$ *(αντιπαράγωγος στο χρόνο).*

F7. *Αν* $f, f', \ldots, f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ *και* $f, f', \ldots, f^{(k)} \to 0,\ |x| \to \infty$, *τότε:*

$$\widehat{f^{(k)}}(\gamma) = (2\pi i\gamma)^k\,\hat{f}(\gamma)$$ *(παράγωγοι στο χρόνο).*

F8. *Αν* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *και* $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$ *τότε η* $\hat{f}$ *είναι παραγωγίσιμη και:*

$$(-2\pi i)\ \widehat{xf}(\gamma) = \left(\hat{f}\right)'(\gamma)$$ *(παράγωγος στις συχνότητες).*

F9. *Εστω*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt$$

είναι η συνέλιξη δυο μετρήσιμων συναρτήσεων $f, g \in L_1$. *Τότε*

$$\widehat{f * g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma),\ \gamma \in \mathbb{R}$$ *(συνέλιξη στο χρόνο).*

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L_\infty} \le \|f\|_{L_1}.$$

Λήμμα 3.1

Αν $f,g \in L_1$, τότε $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx$.

Απόδειξη. Αμεση, χρησιμοποιώντας τον ορισμό 3.1. ■

Ας υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier συναρτήσεων που θα χρησιμοποιούμε συχνά παρακάτω.

(A) Αν $f = \chi_{[-A/2,A/2]}$ $(A>0)$, τότε με άμεσο υπολογισμό παίρνουμε $\hat{f}(\gamma) = \frac{\eta\mu(\pi A\gamma)}{\pi\gamma}$. Επίσης, αν $f(x) = \frac{\eta\mu(\pi Ax)}{\pi x}$ $(A>0)$, τότε χρησιμοποιώντας τη θεωρία ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε $\hat{f}(\gamma) = \chi_{[-A/2,A/2]}(\gamma)$. Στο εξής γράφουμε

$$\boxed{\frac{\eta\mu(\pi Ax)}{\pi x} \leftrightarrow \chi_{(-A/2,A/2)} \ (A>0)}.$$

(B) Αν $f = \left(1-\frac{|x|}{A}\right)\chi_{[-A,A]}$ $(A>0)$, τότε $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{A}\frac{\eta\mu^2(\pi A\gamma)}{(\pi\gamma)^2}$, διότι $f = \frac{1}{A}\chi_{[-A/2,A/2]} * \chi_{[-A/2,A/2]}$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από το θεώρημα συνέλιξης F9 και την (A). Επίσης αν $f(x) = \frac{\eta\mu^2(\pi Ax)}{A(\pi x)^2}$, τότε $\hat{f}(\gamma) = \left(1-\frac{|\gamma|}{A}\right)\chi_{[-A,A]}(\gamma)$ $(A>0)$. Ετσι

$$\boxed{\frac{1}{A}\frac{\eta\mu^2(\pi Ax)}{(\pi x)^2} \leftrightarrow \left(1-\frac{|\gamma|}{A}\right)\chi_{[-A,A]}(\gamma) \ (A>0)}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $F(x) = \frac{\eta\mu^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$, τότε η παραπάνω οικογένεια συναρτήσεων $(F_A)_{A>0}$ με

$$F_A(x) = A\,F(Ax) = \frac{1}{A}\frac{\eta\mu^2(\pi Ax)}{(\pi x)^2}$$

είναι η **προσεγγιστική μονάδα του Feyer** (για $A \to \infty$).

(Γ) Αν $f(x) = e^{-|x|}$, τότε με απευθείας υπολογισμό παίρνουμε $\widehat{f}(\gamma) = \dfrac{2}{1+(2\pi\gamma)^2}$ και αντιστρόφως. Υπενθυμίζουμε ότι αν $P(x) = \dfrac{2}{1+(2\pi x)^2}$, τότε η οικογένεια συναρτήσεων $(P_\lambda)_{\lambda>0}$ με

$$P_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}P\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{2\lambda}{\lambda^2+(2\pi x)^2}$$

είναι η **προσεγγιστική μονάδα του Poisson** (για $\lambda \to 0^+$). Ετσι

$$\boxed{\frac{2\lambda}{\lambda^2+(2\pi x)^2} \leftrightarrow e^{-\lambda|\gamma|}\ (\lambda>0)}.$$

(Δ) Αν $f(x) = e^{-\pi x^2}$, τότε $\widehat{f}(\gamma) = e^{-\pi\gamma^2}$ και αντιστρόφως. Πράγματι,

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i\gamma x}dx \Rightarrow \frac{d\widehat{f}(\gamma)}{d\gamma} = -2\pi i\int_{\mathbb{R}} xe^{-\pi x^2}e^{-2\pi i\gamma x}dx$$

$$= i\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-\pi x^2}\right)' e^{-2\pi i\gamma x}dx = ie^{-\pi x^2}e^{-2\pi i\gamma x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\left(e^{-2\pi i\gamma x}\right)_x dx$$

$$= -2\pi\gamma\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i\gamma x}dx = -2\pi\gamma\widehat{f}(\gamma).$$

Καταλήγουμε στην επίλυση μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1^{ης} τάξης

$$\frac{d\widehat{f}(\gamma)}{d\gamma} + 2\pi\gamma\widehat{f}(\gamma) = 0,$$

η λύση της οποίας είναι η

$$\widehat{f}(\gamma)=\widehat{f}(0)e^{-2\pi\int\gamma d\gamma}=\widehat{f}(0)e^{-\pi\gamma^2}.$$

Αλλά:

$$\left(\widehat{f}(0)\right)^2=\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}dx\right)^2=\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\pi\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\lim_{r\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^r e^{-\pi r^2}rdrd\theta=1,$$

και εφόσον $\widehat{f}(0)>0$ τελικά παίρνουμε $\widehat{f}(0)=1$ και

$$\widehat{f}(\gamma)=e^{-\pi\gamma^2}.$$

Αν $G(x)=e^{-\pi x^2}$, τότε η οικογένεια συναρτήσεων $\left(G_\lambda\right)_{\lambda>0}$ με

$$G_\lambda(x)=\frac{1}{\lambda}G\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}e^{-\pi x^2/\lambda^2}$$

είναι η **προσεγγιστική μονάδα του Gauss** (για $\lambda\to 0^+$). Ετσι

$$\boxed{\frac{1}{\lambda}e^{-\pi x^2/\lambda^2}\leftrightarrow e^{-\pi\lambda^2\gamma^2}\ \ (\lambda>0)}.$$

Λήμμα 3.2

Εστω $f\in L_1(\mathbb{R})$ και $\widehat{f}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της f. Τότε:

(α) *Η $\widehat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.*

(β) (αντιστροφής): *Αν $\widehat{f}\in L_1$, τότε*

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma\ \ \textit{σ. π. στο}\ \mathbb{R}.$$

(γ) (Μοναδικότητας): *Αν $\widehat{f}(\gamma)=0\ \forall\gamma\in\mathbb{R}$, τότε $f=0$ σ.π. στο $\mathbb{R}$.*

(δ) (Riemann-Lebesgue): $\lim_{|\gamma|\to\infty}\hat{f}(\gamma)=0.$

Απόδειξη.

(α) $\left|\widehat{f}(\gamma)-\widehat{f}(\gamma+h)\right|\le\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)\right|\left|1-e^{-2\pi ihx}\right|dx=2\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)\right|\left|\eta\mu(\pi hx)\right|dx\underset{h\to 0}{\to}0$

λόγω κυριαρχούμενης σύγκλισης. Η συνέχεια είναι ομοιόμορφη διότι το φράγμα $\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)\right|\left|\eta\mu(\pi hx)\right|dx$ είναι ανεξάρτητο του γ.

(β) Θεωρούμε την προσεγγιστική μονάδα Poisson $(P_\lambda)_{\lambda>0}$ με

$$P_\lambda(\gamma)=\frac{2\lambda}{\lambda^2+(2\pi\gamma)^2}.$$

Τότε, απ' το Λήμμα 3.1 και το γεγονός $e^{-\lambda|\gamma|}\leftrightarrow P_\lambda(\gamma)$ (βλέπε (Γ) παραπάνω) παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\gamma)e^{-\lambda|\gamma|}e^{2\pi i\gamma x}d\gamma=\int_{\mathbb{R}}f(y)P_\lambda(y-x)dy=f*P_\lambda(x).$$

Για $\lambda\to 0^+$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης (όσον αφορά το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας) και το γεγονός ότι $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}f*\widehat{P_\lambda}(x)=f(x)$ σ.π. (όσον αφορά το δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας) και παίρνουμε το ζητούμενο.

(γ) Αμεση, απ' το θεώρημα αντιστροφής (β).

(δ) Επειδή $e^{-\pi i}=-1$ έχουμε

$$\widehat{f}(\gamma)=-\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi i\gamma\left(x+\frac{1}{2\gamma}\right)}dx=-\int_{\mathbb{R}}f\left(x-\frac{1}{2\gamma}\right)e^{-2\pi i\gamma x}dx,$$

άρα

$$2\widehat{f}(\gamma)=\int_{\mathbb{R}}\left[f(x)-f\left(x-\frac{1}{2\gamma}\right)\right]e^{-2\pi i\gamma x}dx,$$

συνεπώς:

$$2\left|\widehat{f}(\gamma)\right|\le\left\|f-f\left(\cdot-\frac{1}{2\gamma}\right)\right\|_{L_1}. \qquad (1)$$

Είναι όμως γνωστό ότι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με φραγμένο φορέα είναι πυκνό στον $L_p(\mathbb{R})$ για κάθε $1\le p<\infty$. Αρα

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση g με το φορέα αυτής να είναι ένα συμπαγές διάστημα $[-A, A]$, $A > 0$ έτσι ώστε

$$\|f - g\|_{L_1} < \varepsilon .$$

Εφόσον δε η g είναι και ομοιόμορφα συνεχής, για την παραπάνω επιλογή του ε παίρνουμε $0 < \delta = \varepsilon / \left(4\|g\|_{L_\infty}\right)$ έτσι ώστε

$$\forall x, y \in [-A, A] \text{ με } |x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon' / (4A) .$$

Για την παραπάνω επιλογή της g το δεξιό μέλος της ανισότητας (1) είναι φραγμένο από:

$$\left\| f - f\left(\cdot - \frac{1}{2\gamma}\right)\right\|_{L_1} \le \|f - g\|_{L_1} + \left\| g - g\left(\cdot - \frac{1}{2\gamma}\right)\right\|_{L_1} + \left\| g\left(\cdot - \frac{1}{2\gamma}\right) - f\left(\cdot - \frac{1}{2\gamma}\right)\right\|_{L_1}$$

$$\le \|f - g\|_{L_1} + \left\| g - g\left(\cdot - \frac{1}{2\gamma}\right)\right\|_{L_1} + \|g - f\|_{L_1} .$$

Για $\frac{1}{2|\gamma|} < \delta \Rightarrow |\gamma| > \frac{1}{2\delta}$ έχουμε (λόγω ομοιόμορφης συνέχειας της g)

$$\left\| g - g\left(\cdot - \frac{1}{2\gamma}\right)\right\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}} \left| g(x) - g\left(x - \frac{1}{2\gamma}\right)\right| dx$$

$$= \left(\int_{-A+\delta}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{A+\delta}\right) \left| g(x) - g\left(x - \frac{1}{2\gamma}\right)\right| dx < \frac{\varepsilon'}{2} + 2\delta \|g\|_{L_\infty} < \max\{\varepsilon, \varepsilon'\} = \varepsilon'' .$$

Ετσι η (1) γίνεται

$$\forall \varepsilon'' > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \gamma : |\gamma| > \frac{1}{2\delta} \Rightarrow 2\left|\hat{f}(\gamma)\right| \le \left\| f - f\left(\cdot - \frac{1}{2\gamma}\right)\right\|_{L_1} \le 3\varepsilon''$$

και έχουμε το ζητούμενο. ■

Εστω

$$\mathbf{C}_0 := \mathbf{C}_0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C_0(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}$$

είναι ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ που τείνουν στο μηδέν στο άπειρο. Τότε από το Λήμμα 3.1 διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση $\hat{S}$ (βλ. ορισμό 3.1) είναι 1-1 και η εικόνα της είναι μέσα στο χώρο $\mathbf{C}_0$, δηλαδή

$$\hat{S} : L_1 \to \mathbf{C}_0 . \tag{2}$$

Οπως όμως και στις σειρές Fourier η $\hat{S}$ **δεν** είναι επί του χώρου $\mathbf{C}_0$. Δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις στο $\mathbf{C}_0$ που **<u>δεν</u>** είναι μετασχηματισμός Fourier καμιάς ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Το πρόβλημα του χαρακτηρισμού της εικόνας του μετασχηματισμού Fourier είναι εξαιρετικά δύσκολο και ουσιαστικά άλυτο.

Τέλος, από τις ιδιότητες F6 και Φ7 σε συνδυασμό με το Λήμμα 3.1 (γ) (Riemann-Lebesgue) έχουμε:

- Αν $f \in L_1$, τότε $\hat{f}(\gamma) = o(1)$.
- Αν $f^{(k)} \in L_1$, τότε $\hat{f}(\gamma) = o\left(1/\gamma^k\right)$.

(Εδώ $f = o(g)$ αν $|f/g| \to 0,\ |\gamma| \to \infty$). Όπως και στις σειρές Fourier, η «λειότητα» της f αντανακλάται στην **τάξη** με την οποία ο μετασχηματισμός Fourier της f φθίνει στο άπειρο.

3.3 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L_2(\mathbb{R})$

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε το μετασχηματισμό Fourier $\hat{S}$. Με άλλα λόγια, από τη γνώση μιας συνάρτησης $f \in L_1$ ορίσαμε μια νέα συνάρτηση

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \gamma x} dx, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Για πιο λόγο όμως να το κάνουμε αυτό;

Οπως ήδη είπαμε στην παράγραφο 3.1 ο μετασχηματισμός Fourier γενικεύει την έννοια του συντελεστή Fourier. Υπ' αυτή την έννοια ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί μια ανάλυση της f σ' ένα νέο πεδίο, το πεδίο των συχνοτήτων της. Για παράδειγμα, αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \notin \mathbf{T}$, τότε οι τιμές $\hat{f}(n), n \in \mathbb{Z}$, είναι ίσες με τους συντελεστές Fourier της f θεωρώντας την f ως 1-περιοδική συνάρτηση. Φυσικά είναι σημαντικό να βρούμε συνθήκες ώστε να μπορούμε με μοναδικό και εύχρηστο τρόπο (και με κάποια έννοια) να ανακατασκευάσουμε την f από το μετασχηματισμό Fourier της. Η κατάσταση είναι πιο δύσκολη σε σχέση με τις σειρές Fourier διότι

- η ανάλυση της f πραγματοποιείται μέσω υπεραριθμήσιμου πλήθους «βασικών» συναρτήσεων της μορφής $\left\{e^{-2\pi i \gamma \cdot}\right\}_{\gamma \in \mathbb{R}}$,
- οι συναρτήσεις $e^{-2\pi i \gamma x}$ δεν ανήκουν σε κανέναν χώρο $L_p(\mathbb{R})$,
- οι χώροι $L_p(\mathbb{R})$ δεν είναι ο ένας μέσα στον άλλο,
- και ο μετασχηματισμός Fourier **<u>δεν</u>** είναι (εν γένει) ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν $f \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$ για να εκμεταλλευθούμε τα εργαλεία των χώρων Hilbert. Υπενθυμίζουμε ότι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $L_2(\mathbb{R})$ είναι το

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Εστω

$$\hat{S}: L_1 \bigcap L_2(\mathbb{R}) \to \mathbf{C}_0(\mathbb{R}): \quad \hat{S}f(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\gamma} dx$$

είναι ο περιορισμός του τελεστή Fourier $\hat{S}$ (βλ. ορισμό 3.1 και (2)) πάνω στον $L_1 \bigcap L_2$. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\hat{S}f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Εστω

$$g(x) = \langle f(x+\cdot), f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{f(y)}dy .$$

Η g είναι φραγμένη (Cauchy-Swchartz), ολοκληρώσιμη (συνέλιξη ολοκληρώσιμων συναρτήσεων) και ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, το τελευταίο διότι

$$|g(x) - g(x+h)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x+h+y)| \; |f(y)| dy$$

$$\le \|f - f(\cdot + h)\|_{L_2} \|f\|_{L_2} \to 0, \; h \to 0$$

(το γεγονός $\|f - f(\cdot + h)\|_{L_2} \to 0, \; h \to 0$ ομοιόμορφα φαίνεται όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.2 (δ)). Τότε

$$\hat{g}(y) = \left|\hat{f}(y)\right|^2 .$$

Από το Λήμμα 3.1 ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) K(y) dy = \int_{\mathbb{R}} g(\gamma) \hat{K}(\gamma) d\gamma, \quad \forall K \in L_1 . \tag{3}$$

Θεωρούμε την προσεγγιστική μονάδα Poisson $\{P_\lambda\}_{\lambda>0}$, οπότε η (3) γράφεται:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) e^{-\lambda|y|} dy = \int_{\mathbb{R}} g(\gamma) P_\lambda(\gamma) d\gamma,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(y)\right|^2 e^{-\lambda|y|} dy = g * P_\lambda(0) .$$

Παίρνουμε $\lambda \to 0^+$ και στα δυο μέλη της παραπάνω ισότητας και έχουμε

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(y)\right|^2 e^{-\lambda|y|}dy=\lim_{\lambda\to 0^+} g*P_\lambda(0)\Rightarrow\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(y)\right|^2 dy=g(0)=\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2 dx.$$

Τελικά:

$$\left\|\widehat{S}f\right\|_{L_2}=\left\|\widehat{f}\right\|_{L_2}=\|f\|_{L_2},$$

άρα ο τελεστής $\widehat{S}$ είναι ισομετρία και συνεπώς είναι 1-1. Ας δούμε τώρα την εικόνα $R\left(\widehat{S}\right)$ του $\widehat{S}$. Εφόσον $\left\{e^{2\pi i\gamma\cdot}e^{-\lambda|\cdot|}\right\}_{\gamma\in\mathbb{R},\ \lambda>0}\in L_1\bigcap L_2$, έχουμε $\widehat{e^{2\pi i\gamma\cdot}e^{-\lambda|\cdot|}}=P_\lambda(\bullet-\gamma)\in R\left(\widehat{S}\right)$. Για κάθε $w\in R\left(\widehat{S}\right)^{\perp}$ έχουμε

$$\left\langle\widehat{e^{2\pi i\gamma\cdot}e^{-\lambda|\cdot|}},w\right\rangle=0\Leftrightarrow\left\langle P_\lambda(\cdot-\gamma),w\right\rangle=0\Leftrightarrow P_\lambda*\overline{w}(\gamma)=0.$$

Αλλά

$$\lim_{\lambda\to 0^+}P_\lambda*\overline{w}=\overline{w},$$

με την L_2-νόρμα, άρα $w=0$ και $R\left(\widehat{S}\right)^{\perp}=\{0\}$. Συνεπώς

$$\overline{R\left(\widehat{S}\right)}=L_2(\mathbb{R}),$$

δηλαδή η εικόνα του τελεστή είναι πυκνή στον L_2. Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι η απεικόνιση $\widehat{S}$ είναι ισομετρία από ένα πυκνό υποσύνολο του L_2 (τον $L_1\bigcap L_2$) πάνω σ' ένα πυκνό υποσύνολο του L_2. Από τα θεωρήματα Β1 και Β3 του Παραρτήματος Β, ο τελεστής $\widehat{S}$ επεκτείνεται συνεχώς και με μοναδικό τρόπο σ' όλο τον L_2 σε μια ισομετρία **επί** του L_2. Τότε ο $\widehat{S}$ είναι ορθομοναδιαίος τελεστής (βλ. Πρόταση Β4 Παράρτημα Β), συνεπώς

$$\widehat{S}^{-1}=\widehat{S}^{*},$$

όπου $\widehat{S}^{*}$ είναι ο συζυγής τελεστής του $\widehat{S}$. Αρα για κάθε $f,g\in L_2$

$$\left\langle\widehat{S}f,g\right\rangle_{L_2}=\left\langle f,\widehat{S}^{*}g\right\rangle_{L_2}\Leftrightarrow\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-2\pi ixy}dy\right)\overline{g(x)}dx=\left\langle f,\widehat{S}^{*}g\right\rangle_{L_2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{2\pi ixy}dx}dy = \left\langle f, \hat{S}^* g \right\rangle_{L_2} \Leftrightarrow \left\langle f, \hat{S}g(-\bullet) \right\rangle_{L_2} = \left\langle f, \hat{S}^* g \right\rangle_{L_2}.$$

<u>Σημείωση</u>. Στην παραπάνω, γράφουμε φορμαλιστικά $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\bullet}dx$ και $\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi ix\bullet}dx$ για τα όρια με την L_2-έννοια ακολουθιών $L_1 \bigcap L_2$-συναρτήσεων, π.χ. της μορφής $\widehat{f_N}(\gamma) = \int_{-N}^{N} f(x)e^{-2\pi i\gamma x}dx$ και $\widehat{g_N}(\gamma) = \int_{-N}^{N} g(x)e^{-2\pi i\gamma x}dx$ αντιστοίχως.

Τελικά:

$$\boxed{\hat{S}^{-1} g = \hat{S}^* g = \hat{S}g(-\bullet)}.$$

Δηλαδή ο αντίστροφος τελεστής $\hat{S}^{-1}$ είναι η ανάκλαση του $\hat{S}$. Τέλος, ορίζουμε τη σύνθετη απεικόνιση

$$\hat{S}^{-1}\hat{S} : L_2 \to L_2 : \ \hat{S}^{-1}\hat{S}f = f = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma\bullet}d\gamma,$$

όπου πάλι το παραπάνω ολοκλήρωμα νοείται ως όριο με την L_2-έννοια ακολουθιών συναρτήσεων $f_N(x) = \int_{-N}^{N} \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma$. Δηλαδή

$$\boxed{f = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma\bullet}d\gamma,}$$

με την έννοια

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \int_{-N}^{N} \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma\bullet}d\gamma \right\|_{L_2} = 0.$$

Ο $\hat{S}$ είναι **τελεστής ανάλυσης** και ο $\hat{S}^{-1}$ είναι **τελεστής σύνθεσης** και καλείται **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier** της $\hat{f}$. Ο τελεστής

$$Tf = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma\bullet}d\gamma$$

καλείται **ολοκλήρωμα Fourier** της f. Δείξαμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2 (Plancherel)

Σε κάθε συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{R})$ *αντιστοιχεί μοναδική συνάρτηση* $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ *που ορίζεται ως όριο με την* L_2*-έννοια οποιασδήποτε ακολουθίας* $L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$ *συναρτήσεων, π.χ. ως*

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\widehat{f} - \int_{-N}^{N} f(x)e^{-2\pi i x\cdot}dx\right\|_{L_2} = 0,$$

τέτοια ώστε:

- *Αν* $f \in L_1 \bigcap L_2(\mathbb{R})$ *τότε η* $\widehat{f}$ *ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Fourier* $\widehat{S}f$ *του ορισμού 3.1.*
- $\left\|\widehat{f}\right\|_{L_2} = \|f\|_{L_2} \quad \forall f \in L_2.$
- $f = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma\cdot}d\gamma$ *με την* L_2-*έννοια, δηλαδή*

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f - \int_{-N}^{N} \widehat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma\cdot}d\gamma\right\|_{L_2} = 0.$$

Σημειώνουμε ότι για κάθε $f, g \in L_2$ *ισχύει η ταυτότητα Parseval*

$$\langle f, g\rangle_{L_2} = \left\langle \widehat{f}, \widehat{g}\right\rangle_{L_2}.$$

Φυσικά η κατά νόρμα σύγκλιση δε συνεπάγεται τη σημειακή σύγκλιση. Όπως όμως και στις σειρές Fourier ισχύει το πολύ σημαντικό

Θεώρημα 3.3 (Carleson)

Το ολοκλήρωμα Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_2$ *συγκλίνει σημειακά στην* f *σχεδόν παντού στο* $\mathbb{R}$*. Με άλλα λόγια*

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} \widehat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma \text{ σ.π. στο } \mathbb{R}.$$

Για τη σημειακή σύγκλιση έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 3.4 *Εστω* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *είναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολής σε μια περιοχή σημείου* x_0. *Τότε*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\widehat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma x_0}d\gamma = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

σημειακά. Αν η f *είναι συνεχής και φραγμένης μεταβολής σε κάποιο διάστημα* (a,b), *τότε*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\widehat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma = f(x),\ \ x\in(a,b),$$

όπου η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα στο εσωτερικό του (a,b).

3.4 Μετασχηματισμός Fourier στον L_p. Γενικευμένες συναρτήσεις

Αν θέλουμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου σε χώρους L_p τότε τα πράγματα δυσκολεύουν διότι σε αντίθεση με τις σειρές Fourier δεν ξέρουμε καν αν ο μετασχηματισμός Fourier είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Στην περίπτωση όμως όπου

$$1 < p < 2$$

έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 3.5 (Hausdorff-Young)

Εστω $1 < p < 2$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Τότε ο τελεστής

$$\hat{S} : L_1 \bigcap L_p(\mathbb{R}) \to L_q(\mathbb{R}) : \ \hat{S}f(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \gamma} dx$$

είναι φραγμένος και εφόσον ο $L_1 \bigcap L_p(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L_p(\mathbb{R})$, ο $\hat{S}$ επεκτείνεται συνεχώς με μοναδικό τρόπο σ' ένα φραγμένο τελεστή πάνω σ' όλο τον $L_p(\mathbb{R})$. Ετσι ο μετασχηματισμός Fourier της $f \in L_p(\mathbb{R})$ ορίζεται οριακά ως εξής:

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \hat{f} - \int_{-N}^{N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot} dx \right\|_{L_q(\mathbb{R})} = 0$$

και

$$\left\| \hat{S} f \right\|_{L_q} \le \| f \|_{L_p} .$$

*Σημειώνουμε όμως ότι ο $\hat{S}$ **<u>δεν</u>** είναι ισομετρία **<u>ούτε επί</u>** του L_q.*

Απόδειξη. Ο $\hat{S} : L_1(\mathbb{R}) \to L_\infty(\mathbb{R})$ είναι φραγμένος και από την προηγούμενη παράγραφο ο $\hat{S} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ είναι φραγμένος. Από το θεώρημα Riesz-Thorin (βλ. Κεφ. 1) προκύπτει το ζητούμενο.

Το θεώρημα Hausdorff-Young **<u>δεν</u>** επεκτείνεται για $p > 2$. Για $p > 2$ ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται με την έννοια των γενικευμένων συναρτήσεων. Ας εξηγήσουμε σύντομα τι εννοούμε.

Ορισμός 3.2 *Ορίζουμε το χώρο συναρτήσεων Schwartz*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R})=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}:\ \varphi\in C_\infty(\mathbb{R})\ \text{και}\ \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n\varphi^{(m)}(x)\right|<\infty\ \forall n,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}.$$

- Για παράδειγμα αν ϕ είναι μια απειροδιαφορίσιμη συνάρτηση πάνω σε συμπαγή φορέα, συμβολικά $\phi\in C_\infty^c(\mathbb{R})$, τότε $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- Αν P είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο, τότε $P(x)e^{-x^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ενας χρήσιμος εναλλακτικός χαρακτηρισμός του χώρου $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι:

$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\ \Leftrightarrow$ *για κάθε* $k,n\geq 0$ *υπάρχουν σταθερές* $C_{k,n}$ *έτσι ώστε*

$$\left|\varphi^{(k)}(x)\right|\leq\frac{C_{k,n}}{1+|x|^n}.$$

Σημειώνουμε ότι αν $\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, τότε $\varphi\psi,\ \varphi*\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και

$$(\varphi*\psi)^{(k)}=\varphi^{(k)}*\psi=\varphi*\psi^{(k)}.$$

Εστω

$$\|\varphi\|_{n,m}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n\varphi^{(m)}(x)\right|$$

και

$$d:\mathcal{S}(\mathbb{R})\times\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^+:\ d(\varphi,\psi)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m+n}}\frac{\|\varphi-\psi\|_{n,m}}{1+\|\varphi-\psi\|_{n,m}}.$$

Αποδεικνύεται ότι η d είναι μια μετρική στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ως προς την οποία ο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Με χρήση αυτής της μετρικής ισχύει

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi\ \Leftrightarrow\ \lim_{k\to\infty}\|\varphi_k-\varphi\|_{n,m}=0\ \ \forall n,m\geq 0.$$

Πρόταση 3.2

Ισχύει $\mathcal{S}(\mathbb{R})\subset L_p(\mathbb{R})\ \forall p\geq 1$. *Επιπλέον, ο χώρος Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *είναι πυκνός στον* $L_p(\mathbb{R})$ *για κάθε* $1\leq p<\infty$.

Εφόσον $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L_p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \le p \le \infty$, ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ορίζεται ως συνήθως

$$\hat{S}\varphi(\gamma) = \hat{\varphi}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i \gamma x} dx$$

και ικανοποιεί όλες της ιδιότητες F1-F9 της πρότασης 3.1. Επιπλέον ισχύει το Λήμμα 3.1, δηλαδή για κάθε $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) dx . \tag{4}$$

Επειδή $x^n \varphi(x) \in L_1$ για κάθε n και $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, έχουμε $\hat{\varphi} \in C_\infty(\mathbb{R})$. Επίσης από τη σχέση $\widehat{\left((-2\pi i x)^n \varphi\right)^{(m)}}(\gamma) = (2\pi i \gamma)^m \hat{\varphi}^{(n)}(\gamma)$ προκύπτει ότι

$$\left\| \hat{\varphi} \right\|_{m,n} < \infty \quad \forall n, m \ge 0 ,$$

άρα

$$\boxed{\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).}$$

Ετσι και ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $\hat{\varphi}$

$$\left(\hat{S}^{-1} \hat{\varphi}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma$$

είναι καλά ορισμένος και ισχύει

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma$$

σημειακά (και με τη μετρική του $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Αποδεικνύεται δε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.6

Ο μετασχηματισμός Fourier $\hat{S} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι ομοιομορφισμός.

Ορισμός 3.4 *Καλούμε χώρο των* ***γενικευμένων συναρτήσεων***[1] *(**space of tempered distributions**) το δυϊκό χώρο* $\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ *του χώρου Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Με άλλα λόγια καλούμε γενικευμένη συνάρτηση ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό*

$$f:\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}.$$

Συνήθως συμβολίζουμε με $\langle f,\varphi\rangle$ *(ή* $T_f(\varphi)$*) την τιμή την οποία αντιστοιχεί στο στοιχείο* $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *η γενικευμένη συνάρτηση* f.

Πρόταση 3.3

Το γραμμικό συναρτησιακό $f:\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ *είναι συνεχές (δηλαδή γενικευμένη συνάρτηση) αν και μόνον αν υπάρχουν σταθερές* $C>0$ *και* $N\in\mathbb{N}$ *έτσι ώστε*

$$\left|\langle f,\varphi\rangle\right|\le C\sum_{n,m=0}^{N}\|\varphi\|_{n,m}\quad\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Παραδείγματα. (α) Εστω f είναι μετρήσιμη συνάρτηση στον $f\in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ και $|f(x)|\le C\left(1+|x|^p\right)$ για κάποιο φυσικό p. Τότε η f ορίζεται ως γενικευμένη συνάρτηση μέσω της σχέσης

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi(x)dx.$$

Πράγματι, εύκολα αποδεικνύεται η Πρόταση 3.3 για $n=p+2,\ m=0$. Επίσης, αν $g\in L_{1,loc}$ είναι πολυωνυμικά φραγμένη, τότε

$$\langle f,\varphi\rangle=\langle g,\varphi\rangle\Rightarrow\ f=g\ \text{σ.π.}$$

(β) Η γενικευμένη συνάρτηση δ_x του Dirac ορίζεται ως εξής:

$$\langle\delta_x,\varphi\rangle=\varphi(x),\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Με μια μη αυστηρή ερμηνεία

[1] Η αγγλική ορολογία είναι **tempered distribution** ως συντομογραφία του όρου distributions of temperate growth.

- $\delta(x)=0,\ \forall x\neq 0$ και
- η δ είναι όσο «άπειρη» χρειάζεται στο μηδέν ώστε το εμβαδόν κάτω του γραφήματός της να ισούται με 1.

Η δ_x είναι όντως γενικευμένη συνάρτηση διότι

$$\left|\langle\delta_x,\varphi\rangle\right|\leq\left|\varphi(x)\right|\leq\|\varphi\|_{0,0},$$

άρα ισχύει η πρόταση 3.3 για $N=0$.

(γ) Η πρωτεύουσα τιμή $P.V.\frac{1}{x}$ της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ ορίζεται ως γενικευμένη συνάρτηση ως εξής:

$$P.V.\left\langle\frac{1}{x},\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Το όριο είναι καλά ορισμένο διότι

$$P.V.\left\langle\frac{1}{x},\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ M\to\infty}}\left(\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{1\leq|x|<M}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ M\to\infty}}\left(\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx+\int_{1\leq|x|<M}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right).$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{\varepsilon}^{1}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right|dx\leq(1-\varepsilon)\sup_x\left|\frac{\varphi'(\xi)2x}{x}\right|\leq 2\|\varphi\|_{0,1}$$

ενώ για το δεύτερο

$$\lim_{M\to\infty}\int_{1\leq|x|<M}\left|\frac{\varphi(x)}{x}\right|dx=\lim_{M\to\infty}\int_{1\leq|x|<M}\left|\frac{x\varphi(x)}{x^2}\right|dx\leq\|\varphi\|_{1,0}\int_{|x|\geq 1}\frac{1}{x^2}=2\|\varphi\|_{1,0}.$$

Τελικά:

$$P.V.\left|\left\langle \frac{1}{x},\varphi \right\rangle\right| \le 2\left(\|\varphi\|_{0,1}+\|\varphi\|_{1,0}\right),$$

άρα από την πρόταση 3.3 για $N=1$ η πρωτεύουσα τιμή της $1/x$ είναι γενικευμένη συνάρτηση.

(δ) Κάθε συνάρτηση $f \in L_p$ $1 \le p \le \infty$ ορίζεται ως γενικευμένη συνάρτηση από τη σχέση

$$\langle f,\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx .$$

Ορισμός 3.5 *Ορίζουμε τη μετάθεση* $f_\tau = f(\cdot - \tau)$, *διαστολή* $D_a f = f(a\cdot)$ *και ανάκλαση* $\tilde{f} = f(-\cdot)$ *μιας γενικευμένης συνάρτησης* $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ *ως εξής:*

$$\langle f_\tau,\varphi \rangle = \langle f,\varphi_{-\tau} \rangle = \langle f,\varphi(\cdot+\tau) \rangle ,$$

$$\langle D_a f,\varphi \rangle = \frac{1}{a}\langle f, D_{1/a}\varphi \rangle,\ a>0 ,$$

και

$$\langle \tilde{f},\varphi \rangle = \langle f,\tilde{\varphi} \rangle$$

αντιστοίχως.

Ορισμός 3.6 *Ορίζουμε την παράγωγο μιας γενικευμένης συνάρτησης* $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ *ως εξής:*

$$\langle f',\varphi \rangle = (-1)\langle f,\varphi' \rangle .$$

Γενικότερα:

$$\left\langle f^{(k)},\varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle f,\varphi^{(k)} \right\rangle .$$

Σημειώνουμε ότι όλες οι παράγωγοι μιας γενικευμένης συνάρτησης υπάρχουν και είναι γενικευμένες συναρτήσεις (αν η $f \in C_1(\mathbb{R})$ ο ορισμός 3.6 ταυτίζεται με την κατά παράγοντες ολοκλήρωση, η οποία και αποτελεί το κίνητρο αυτού του ορισμού).

Παράδειγμα. Εστω $U_0(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση (**Heaviside**). Αυτή ορίζεται ως γενικευμένη συνάρτηση (βλέπε παράδειγμα (α) παραπάνω) με τύπο

$$\langle U_0,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}}U_0(x)\varphi(x)\,dx=\int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx\,.$$

Τότε

$$\langle U_0',\varphi\rangle=-\langle U_0,\varphi'\rangle=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)\,dx=\varphi(0)=\langle\delta_0,\varphi\rangle\,.$$

Αρα

$$U_0'=\delta_0\,.$$

Ορισμός 3.7 *Ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier μιας γενικευμένης συνάρτησης* $f\in\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ *ως εξής:*

$$\left\langle\widehat{f},\varphi\right\rangle=\left\langle f,\widehat{\varphi}\right\rangle.$$

Σημειώνουμε ότι αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *τότε ο ορισμός 3.7 ταυτίζεται με την (4) η οποία και αποτελεί το κίνητρο αυτού του ορισμού. Σημειώνουμε επίσης ότι ο μετασχηματισμός Fourier γενικευμένης συνάρτησης είναι επίσης γενικευμένη συνάρτηση. Τέλος, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier γενικευμένης συνάρτησης* $\widehat{f}$ *ορίζεται από τη σχέση*

$$\left\langle\widehat{f}^{-1},\varphi\right\rangle=\left\langle f,\widehat{\varphi}^{-1}\right\rangle=\left\langle f,\widehat{\varphi}(-\bullet)\right\rangle.$$

Παράδειγμα. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δ_0 οριζεται ως εξής:

$$\left\langle\widehat{\delta_0},\varphi\right\rangle=\left\langle\delta_0,\widehat{\varphi}\right\rangle=\widehat{\varphi}(0)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx=\langle 1,\varphi\rangle\,,$$

άρα

$$\widehat{\delta_0}=1\,.$$

Θεώρημα 3.7

Ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{S}:\mathcal{S}^*(\mathbb{R})\to\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ *είναι ομοιομορφισμός.*

Σημείωση. Εφόσον κάθε συνάρτηση στον $f \in L_p$ μπορεί να θεωρηθεί ως γενικευμένη συνάρτηση (βλέπε παράδειγμα (δ) παραπάνω), με χρήση του ορισμού 3.7 μπορούμε πάντα να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της f ως γενικευμένη συνάρτηση. Φυσικά αν $1 < p < 2$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι μια συνάρτηση στον L_q.

3.5 Θεώρημα αντιστροφής μέσω προσεγγιστικών μονάδων

Εστω $\{K_\lambda\}_{\lambda>0}$ είναι μια προσεγγιστική μονάδα, δηλαδή

(α) $\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x)\,dx = 1 \quad \forall \lambda$,

(β) $\sup_{\lambda>0} \|K_\lambda\|_{L_1(\mathbb{R})} \le C < \infty$, (6)

(γ) $\lim_{\lambda\to 0^+} \int_{|x|>\delta} |K_\lambda(x)|\,dx = 0$ για κάθε φιξαρισμένο $\delta > 0$.

Τότε όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. άσκηση 10) και στο Κεφάλαιο 1 ισχύει

Πρόταση 3.4

*Εστω $\{K_\lambda\}_{\lambda>0}$ είναι μια **προσεγγιστική μονάδα** όπως στην (6). Για κάθε $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$ ισχύει:*

- $\lim_{\lambda\to 0^+} f * K_\lambda(x) = f(x)$ *σημειακά σ.π. στο* $\mathbb{R}$.
- $\lim_{\lambda\to 0^+} \|f * K_\lambda - f\|_{L_p} = 0$.

Αναφέρουμε ορισμένες χρήσιμες προσεγγιστικές μονάδες:

- **Feyer** $\{F_\lambda\}_{\lambda>0}$: $F_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} (1-\lambda|x|)\chi_{[-1/\lambda,1/\lambda]}(x) e^{2\pi i\gamma x} d\gamma = \lambda\left(\frac{\eta\mu(\pi x/\lambda)}{\pi x}\right)^2$.
- **Poisson** $\{P_\lambda\}_{\lambda>0}$: $P_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$.
- **Gauss** $\{G_\lambda\}_{\lambda>0}$: $G_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}$.

Ορισμός 3.8 *Εστω $\hat{f}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας μετρήσιμης συνάρτησης $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$. Τότε (φορμαλιστικά) ορίζουμε*

$$Tf \sim \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma \ , \tag{5}$$

να είναι το ***ολοκλήρωμα Fourier*** *της* f. *Το* $N-$***ιοστό «μερικό άθροισμα» του ολοκληρώματος Fourier*** *ορίζεται ως*

$$T_N f(x) = \int_{-N}^{N} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma \, . \tag{5α}$$

Προφανώς δεν είναι καθόλου προφανές αν το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (5) είναι καλά ορισμένο, ή ανήκει στον L_p, ή συγκλίνει στην f με κάποια έννοια. Το δεξιό μέλος της (5α) είναι όμως καλά ορισμένο. Μελετούμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $T_N f$ (βλ. ορισμό 3.3). Τότε

$$T_N f(x) = \int_{-N}^{N} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma = f * D_N(x),$$

όπου

$$D_N(x) = \frac{\eta\mu(2\pi N x)}{\pi x}.$$

Η ακολουθία $\{D_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ καλείται ***πυρήνας Dirichlet***. Οπως και στις σειρές Fourier, η συνάρτηση D_N είναι άρτια,

$$\int_{\mathbb{R}} D_N(x) dx = 1 \text{ για κάθε } N,$$

αλλά

$$\sup_N \|D_N\|_{L_1} = \infty, \tag{7}$$

(με υπολογισμό παρόμοιο αυτού στις σειρές Fourier). Λόγω της (7) συμπεραίνουμε ότι ο πυρήνας Dirichlet $\{D_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ δεν είναι προσεγγιστική μονάδα, άρα η πρόταση 3.3 δε μπορεί να εφαρμοσθεί. Για να προχωρήσουμε θα χρησιμοποιήσουμε πάλι το μετασχηματισμό Hilbert.

3.6 Ο μετασχηματισμός Hilbert. Ανάλυση Calderon-Zygmund.

Ορισμός 3.9 *Εστω* $\hat{f}$ *είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *όπου* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *είναι ο χώρος Schwartz. Ορίζουμε το* ***μετασχηματισμό Hilbert*** *της* f *ως εξής:*

$$Hf(x) = -i\int_{\mathbb{R}} sign(\gamma)\hat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma .$$

Οπως και στις σειρές Fourier, ο τελεστής H είναι πολλαπλασιαστής (ο ορισμός είναι ανάλογος του ορισμού 1.5) με φίλτρο

$$\Lambda(\gamma) = -i \cdot sign(\gamma).$$

Ας θυμηθούμε τώρα την πρωτεύουσα τιμή της συνάρτησης $1/(\pi x)$ ως γενικευμένη συνάρτηση (βλέπε προηγούμενη παράγραφο):

$$P.V.\frac{1}{\pi}\left\langle \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx .$$

Όπως ήδη έχουμε πει παραπάνω, ο μετασχηματισμός Fourier της γενικευμένης αυτής συνάρτησης ορίζεται ως

$$P.V.\frac{1}{\pi}\left\langle \widehat{\frac{1}{x}}, \varphi \right\rangle = P.V.\frac{1}{\pi}\left\langle \frac{1}{x}, \hat{\varphi} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\hat{\varphi}(x)}{x}dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{1}{x}\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)e^{-2\pi ixy}dy\right)dx = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\left(\int_{|x|>\varepsilon}\frac{e^{-2\pi ixy}}{x}dx\right)dy$$

$$= \frac{-i}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\left(\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\eta\mu(xy)}{x}dx\right)dy = \frac{-i}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\left(\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\eta\mu(xy)}{x}dx\right)dy$$

$$= \frac{-i}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\pi sign(y)dy = \langle \varphi, -i \cdot sign(y) \rangle$$

(λόγω κυριαρχούμενης σύγκλισης, διότι η $\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\eta\mu(xy)}{x}dx$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη). Αρα:

$$\boxed{\widehat{\frac{1}{\pi x}}(\gamma) = -i \cdot sign(\gamma)}$$

με την έννοια των γενικευμένων συναρτήσεων και έτσι μέσω συνέλιξης (επίσης με την έννοια των γενικευμένων συναρτήσεων) παίρνουμε

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy .$$

Παρατήρηση. Το γινόμενο $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με γενικευμένη συνάρτηση $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ ορίζεται ως εξής:

$$\langle f\psi, \varphi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle .$$

Η συνέλιξη $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με γενικευμένη συνάρτηση $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ ορίζεται ως εξής

$$\langle f * \psi, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\psi} * \varphi \rangle ,$$

όπου $\widetilde{\psi}$ είναι η ανάκλαση της ψ. Τότε

$$\widehat{f * \psi} = \widehat{f}\widehat{\psi}$$

με την έννοια των γενικευμένων συναρτήσεων.

Ο μετασχηματισμός Hilbert συνδέεται με φυσικό τρόπο με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων του ολοκληρώματος Fourier μιας συνάρτησης $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ως εξής:

$$T_N f(x) = f * D_N(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\gamma) \chi_{(-N,N)}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma .$$

Αλλά:

$$\chi_{(-N,N)}(\gamma) = \frac{sign(\gamma + N) - sign(\gamma - N)}{2} .$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\gamma) sign(\gamma + N) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\gamma - N) sign(\gamma) e^{2\pi i (\gamma - N) x} d\gamma$$

$$= ie^{-2\pi iNx}\int_{\mathbb{R}}(-i)\,sign(\gamma)\widehat{f}(\gamma - N)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma = ie^{-2\pi iNx}H\left(e^{2\pi iN\cdot}f\right)(x).$$

Ομοίως

$$\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\gamma)\,sign(\gamma - N)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma = ie^{2\pi iNx}H\left(e^{-2\pi iN\cdot}f\right)(x).$$

Τελικά:

$$T_N f(x) = \frac{i}{2}\left(e^{-2\pi iNx}H\left(e^{2\pi iN\cdot}f\right)(x) - e^{2\pi iNx}H\left(e^{-2\pi iN\cdot}f\right)(x)\right). \qquad (8)$$

Αρα όπως και στις σειρές Fourier για τη μελέτη της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων $(T_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του τελεστή Hilbert.

Ισχύει όμως το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.8 (Kolmogorov-Riesz)

Για κάθε $1 < p < \infty$ υπάρχει θετική σταθερά C_p τέτοια ώστε

$$\|Hf\|_p \le C_p\|f\|_p \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Εφόσον ο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L_p(\mathbb{R})$, ο H επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σ' ένα φραγμένο τελεστή (που για απλότητα εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με H)

$$H : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R}).$$

Ο H δεν είναι φραγμένος για $p = 1$ ούτε για $p = \infty$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος 3.8 χρειαζόμαστε ένα πολύ σημαντικό Λήμμα:

Λήμμα 3.3 (κάλυψης Calderon-Zygmund)

Για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R})$ και $\lambda > 0$ υπάρχει μια ακολουθία διαστημάτων $\{\Omega_k\} \subset \left\{\left[\frac{j}{2^\lambda}, \frac{j+1}{2^\lambda}\right) : j, \lambda \in \mathbb{Z}\right\}$ έτσι ώστε:

- *Τα* Ω_k *είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο,* $\left|\bigcup_k \Omega_k\right| \le \frac{\|f\|_1}{\lambda}$ *και*

$$\lambda \le \frac{1}{|\Omega_k|}\int_{\Omega_k} |f(x)|dx \le 2\lambda,$$

- $|f(x)| \le \lambda$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R} - \Omega$*, όπου* $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$.

Τότε ορίζουμε:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R} - \Omega \\ \frac{1}{|\Omega_k|}\int_{\Omega_k} f(x)dx, & x \in \Omega_k \end{cases}$$

και

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Ετσι, $h(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \Omega$ και $\int_{\Omega_k} h(x)dx = 0$. Με άλλα λόγια η $f \in L_1$ αναλύεται σε άθροισμα μιας «καλής» συνάρτησης, της g, η οποία είναι φραγμένη από το 2λ και $\|g\|_1 = \|f\|_1$ και μιας «κακής» συνάρτησης, της h (εκεί όπου η f δεν είναι φραγμένη) με φορέα το Ω και με μηδενικό μέσο όρο σε κάθε διάστημα Ω_k του φορέα της. Αυτή είναι η ***ανάλυση των Calderon-Zygmund***.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση αυτή για να δείξουμε ότι ο τελεστής Hilbert είναι $(1,1)-$ασθενώς φραγμένος.

Απόδειξη θεωρήματος 3.8: Προφανώς ο H είναι $(2,2)$ ισχυρώς φραγμένος. Στην πραγματικότητα είναι ισομετρία, διότι

$$\|Hf\|_2 = \left\|\widehat{Hf}\right\|_2 = \left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ο H είναι $(1,1)-$ασθενώς φραγμένος. Τότε απ' το θεώρημα Marcinkiewicz ο H είναι $(p,p)-$ισχυρώς φραγμένος για κάθε $1 < p < 2$. Τότε λόγω δυϊκότητας ο H θα είναι $(p,p)-$ισχυρώς φραγμένος για κάθε $p > 2$ και εφόσον ο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L_p(\mathbb{R})$ ο H επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σ' ένα φραγμένο τελεστή

$$H : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R}) \quad \forall 1 < p < \infty .$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι ο H είναι $(1,1)-$ασθενώς φραγμένος. Εστω

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow Hf(x) = Hg(x) + Hh(x)$$

είναι η ανάλυση Calderon-Zygmund όπως παραπάνω. Τότε

$$d_{Hf}(\lambda) = \left|\left\{x \in \mathbb{R} : \ |Hf(x)| \geq \lambda\right\}\right| = d_{Hg+Hh}(\lambda) \leq d_{Hg}(\lambda/2) + d_{Hh}(\lambda/2).$$

Εκτιμούμε τον πρώτο όρο $d_{Hg}(\lambda/2)$. Από την ανισότητα Chebychev έχουμε:

$$d_{Hg}(\lambda/2) = \left|\left\{x \in \mathbb{R} : \ |Hg(x)| \geq \lambda/2\right\}\right| \leq \left(\frac{2\|Hg\|_2}{\lambda}\right)^2 = \frac{4\|Hg\|_2^2}{\lambda^2}$$

$$= \frac{4\|g\|_2^2}{\lambda^2} = \frac{4}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \leq \frac{8}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx = \frac{8\|g\|_1}{\lambda} = \frac{8\|f\|_1}{\lambda}.$$

Εκτιμούμε τώρα το δεύτερο όρο $d_{Hh}(\lambda/2)$. Εστω $2\Omega_k$ είναι δυαδικό διάστημα ίδιου κέντρου με το Ω_k και $\Omega^* = \bigcup_k (2\Omega_k)$. Τότε $|\Omega^*| \leq 2|\Omega|$ και

$$d_{Hh}(\lambda/2) = \left|\left\{x \in \mathbb{R} : \ |Hh(x)| \geq \lambda/2\right\}\right| \leq |\Omega^*| + \left|\left\{x \notin \Omega^* : \ |Hh(x)| \geq \lambda/2\right\}\right|$$

$$\leq \frac{2}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}-\Omega^*} |Hh(x)| dx = \frac{2}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}-\bigcup_k \Omega_k} |Hh(x)| dx.$$

Προφανώς

$$h(x) = \sum_k \underbrace{\left(f(x) - \frac{1}{|\Omega_k|}\int_{\Omega_k} f(x)dx\right)\chi_{\Omega_k}(x)}_{b_k(x)} = \sum_k b_k(x),$$

$h \in L_1$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_k \int_{\mathbb{R}-2\Omega_k} \left| Hb_k(x) \right| dx \le c \| f \|_1 .$$

Αλλά

$$\int_{\mathbb{R}-2\Omega_k} \left| Hb_k(x) \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}-2\Omega_k} \left| \int_{\Omega_k} \frac{b_k(y)}{x-y} dy \right| dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}-2\Omega_k} \left| \int_{\Omega_k} b_k(y) \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_k} \right) dy \right| dx$$

(c_k είναι το κέντρο του Ω_k και $\int_{\Omega_k} b_k(y) dy = 0$)

$$\le \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_k} \left| b_k(y) \right| \left(\int_{\mathbb{R}-2\Omega_k} \left| \frac{y-c_k}{(x-y)(x-c_k)} \right| dx \right) dy$$

$$\le \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_k} \left| b_k(y) \right| \left(\int_{\mathbb{R}-2\Omega_k} \frac{|\Omega_k|}{(x-c_k)^2} dx \right) dy = \frac{2}{\pi} \int_{\Omega_k} \left| b_k(y) \right| dy ,$$

(διότι $|y-c_k| \le |\Omega_k|/2$ και $|x-y| > |x-c_k|/2$). Αρα

$$\sum_k \int_{\mathbb{R}-2\Omega_k} \left| Hb_k(x) \right| dx \le \frac{2}{\pi} \sum_k \int_{\Omega_k} \left| b_k(y) \right| dy \le \frac{4}{\pi} \| f \|_1 . \qquad \blacksquare$$

3.7 Σύγκλιση ολοκληρωμάτων Fourier στον $L_p(\mathbb{R})$ $(1<p<\infty)$

Συνδυάζοντας το θεώρημα 3.8 με την (8) έχουμε

$$\|T_N f\|_{L_p} \le \left\|H\left(e^{2\pi i N\cdot} f\right)\right\|_{L_p} + \left\|H\left(e^{-2\pi i N\cdot} f\right)\right\|_{L_p} \le C_p \|f\|_{L_p} < \infty \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

και λόγω πυκνότητας του $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ο T_N επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σ' ένα φραγμένο (απ' το C_p) τελεστή πάνω σ' όλο τον L_p, δηλαδή

$$T_N : L_p \to L_p : \; T_N f = f * D_N .$$

Από την αρχή ομοιόμορφα φραγμένου έχουμε

$$\sup_N \|T_N\|_{L_p \to L_p} \le C_p < \infty , \tag{9}$$

όπου $\|T_N\|_{L_p \to L_p}$ είναι η συνήθης νόρμα του τελεστή T_N. Ισχύει όμως η ακόλουθη

Πρόταση 3.5

Για κάθε $1<p<\infty$ *έχουμε* $\lim_{N\to\infty} \|T_N f - f\|_{L_p} = 0$.

Απόδειξη. Το σύνολο

$$A = \left\{ f \in L_p : \; \lim_{N\to\infty} \|T_N f - f\|_{L_p} = 0 \right\}$$

είναι κλειστό (η απόδειξη παρόμοια με αυτή της πρότασης 1.4 του Κεφαλαίου 1). Απ' την άλλη μεριά ο χώρος

$$BL = \left\{ f \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}) : \; \widehat{f} \text{ εχει φραγμένο φορέα} \right\}$$

είναι πυκνός στον L_p (π.χ. θεωρείστε την προσεγγιστική μονάδα του Feyer, οπότε $\lim_N f * F_N = f$ με την L_p −νόρμα, ενώ $\widehat{f * F_N}$ έχει φραγμένο φορέα για κάθε N). Απ' την άλλη μεριά, για κάθε $g \in BL$ έχουμε $T_N g = g$ υπό την προϋπόθεση ότι ο φορέας του g ανήκει

στο $(-N,N)$. Αρα $BL \subseteq A$ και αφού το A είναι κλειστό, αναγκαστικά $A = L_p$. ■

Οσον αφορά τη σημειακή σχεδόν παντού σύγκλιση των ολοκληρωμάτων Fourier απλά αναφέρουμε την ακόλουθη πολύ σημαντική γενίκευση του θεωρήματος Carleson-Hunt

Θεώρημα 3.9

Για κάθε $1 < p < \infty$ *έχουμε*

$$\lim_{N\to\infty} f * D_N(x) = f(x) \text{ σημειακά σ.π. στο } \mathbb{R}.$$

3.8 Συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις και μετασχηματισμός Hilbert

Ας δούμε τώρα πως συνδέεται ο μετασχηματισμός Hilbert με τις συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις στο άνω ημιεπίπεδο

$$\Pi^+ = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ t > 0 \right\}.$$

Αρχικά θα βρούμε την αρμονική επέκταση μιας συνάρτησης $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ στο Π^+, δηλαδή θα λύσουμε το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x,t) = 0 \text{ στο } \Pi^+ \\ u(x,0) = f(x) \text{ στο } \mathbb{R} \end{cases},$$

όπου Δ είναι ο τελεστής Laplace όπως ορίσθηκε στο Κεφάλαιο 1. Για $\gamma \in \mathbb{R}$ και $(x,t) \in \Pi^+$, παρατηρούμε ότι

$$\Delta u_\gamma(x,t) = \Delta\left(e^{2\pi i \gamma x} e^{-2\pi|\gamma|t} \right) = 0$$

(απλή εφαρμογή), οπότε είναι λογικό να ορίσουμε ως (μοναδική) λύση του παραπάνω προβλήματος την

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} e^{-2\pi|\gamma|t} d\gamma,$$

διότι η u ικανοποιεί την $\Delta u = 0$ στο Π^+ και

$$u(x,t) = f * P_t(x),$$

όπου η

$$P_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}, \ t > 0$$

είναι η προσεγγιστική μονάδα του Poisson και συνεπώς

$$u(x,0) = \lim_{t \to 0^+} u(x,t) = \lim_{t \to 0^+} f * P_t(x) = f(x).$$

Η συνάρτηση $P_t(x)$ είναι αρμονική στο Π^+ και μάλιστα είναι το πραγματικό μέρος του πυρήνα Cauchy

$$g(z)=\frac{i}{\pi z},\ z=x+it\in\Pi^{+}.$$

Ετσι, η συζυγής αρμονική της P_r (για σταθερά ίση με μηδέν) είναι η

$$\operatorname{Im}\left(\frac{i}{\pi z}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{i}{\pi(x+it)}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+t^2}:=H_t(x).$$

Η οικογένεια $\{H_t\}_{t>0}$ καλείται ***συζυγής πυρήνας Poisson*** και δεν είναι προσεγγιστική μονάδα. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t\to 0^+}H_t(x)=\frac{1}{\pi x}:=H(x)$$

δηλαδή οριακά παίρνουμε τον τελεστή Hilbert. Για $z=x+it\in\Pi^{+}$ ορίζουμε

$$g(z)=g(x+it)=f*P_t(x)+i\,f*H_t(x)=P_tf(x)+i\,H_tf(x)$$

$$=\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(y)}{x+it-y}dy=\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(y)}{z-y}dy.$$

Η g είναι αναλυτική στο Π^{+} και

$$\lim_{t\to 0^+}H_tf(x)=H_t*f(x)=\lim_{t\to 0^+}\int_{|y|>t}\frac{f(x-y)}{y}dy=Hf(x).$$

Λόγω πυκνότητας του $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ στον L_p $(1<p<\infty)$ για κάθε $f\in L_p$ παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0^+}g(\bullet+it)=f+i\,Hf$$

σημειακά σ.π. ή με την L_p-έννοια. Αυτή είναι η αναλυτική αναπαράσταση της f. Παρατηρούμε ότι

$$f+i\,Hf\sim\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma\bullet}d\gamma+i(-i)\int_{\mathbb{R}}sign(\gamma)\widehat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma\bullet}d\gamma=\int_0^{\infty}\widehat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma\bullet}d\gamma$$

Δηλαδή δεν υπάρχουν πλέον αρνητικές συχνότητες.

3.9 Χώροι Paley-Wiener

Υπάρχουν κλάσεις συναρτήσεων των οποίων ο μετασχηματισμός Fourier επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση σε κάποιο χωρίο του επιπέδου.

<u>Κλάση Α.</u>

Εστω $F \in L_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $F(\gamma)=0 \ \ \forall \gamma < 0$ και

$$f(z)=\int_0^\infty F(\gamma)e^{2\pi i z\gamma}d\gamma, \ \ z\in\Pi^+, \tag{10}$$

όπου $\Pi^+=\{z=x+iy:\ y>0\}$. Για τέτοιες τιμές του z έχουμε $\left|e^{2\pi i\gamma z}\right|=e^{-2\pi\gamma y}$, άρα το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο. Τώρα για $z_n \to z$ με $\mathrm{Im}(z)>\delta>0$ και $\mathrm{Im}(z_n)>\delta>0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(z)-f(z_n)\right|^2 \le \lim_{n\to\infty}\|F\|_2^2\int_0^\infty\left|e^{2\pi i z\gamma}-e^{2\pi i z_n\gamma}\right|^2 d\gamma$$

$$=\|F\|_2^2\int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left|e^{2\pi i z\gamma}-e^{2\pi i z_n\gamma}\right|^2 d\gamma=0,$$

διότι $\left|e^{2\pi i z\gamma}-e^{2\pi i z_n\gamma}\right|^2 \le 4e^{-2\pi\gamma\delta}\in L_1$ και $\lim_{n\to\infty}\left|e^{2\pi i z\gamma}-e^{2\pi i z_n\gamma}\right|^2=0$ λόγω συνεχείας της $e^{2\pi i z\gamma}$, άρα η εναλλαγή ορίου προκύπτει από το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης. Κατά συνέπεια η f είναι συνεχής στο Π^+. Με χρήση των θεωρημάτων Fubini και Cauchy, για κάθε κλειστό δρόμο $c\in\Pi^+$ ισχύει

$$\oint_c f(z)dz=\int_0^\infty F(\gamma)\oint_c e^{2\pi i z\gamma}dzd\gamma=0,$$

συνεπώς απ' το θεώρημα Morera η f είναι ολόμορφη στο Π^+. Επίσης, γράφοντας

$$f(z)=f(x+iy)=\int_0^\infty F(\gamma)e^{-2\pi\gamma y}e^{2\pi i\gamma x}d\gamma=\int_{\mathbb{R}}F(\gamma)e^{-2\pi\gamma y}\chi_{[0,\infty)}(\gamma)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma,$$

από το θεώρημα Plancherel έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x+iy\right) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left| F\left(\gamma\right) e^{-2\pi\gamma y} \chi_{[0,\infty)} \right|^2 d\gamma \le \left\| F \right\|_2^2 < \infty .$$

Τελικά:

(α) *Αν* $F \in L_2\left(0,+\infty\right)$*, τότε η* f *που ορίζεται από τη (10) είναι αναλυτική στο άνω ημιεπίπεδο και οι περιορισμοί αυτής πάνω σε κάθε οριζόντια ευθεία του άνω ημιεπιπέδου είναι* L_2*-συναρτήσεις.*

<u>Κλάση Β.</u>

Ας δούμε τώρα μια άλλη κλάση της μορφής

$$f\left(z\right) = \int_{-A/2}^{A/2} F\left(\gamma\right) e^{2\pi i z\gamma} d\gamma, \tag{11}$$

όπου $0 < A < \infty$, $F \in L_2\left(\mathbb{R}\right)$ και $F\left(\gamma\right) = 0 \ \ \forall \gamma \notin \left[-A/2, A/2\right]$. Τέτοιες συναρτήσεις είναι ακέραιες, δηλαδή ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ (με απόδειξη παρόμοια όπως παραπάνω) και επιπλέον

$$\left| f\left(z\right) \right| \le \int_{-A/2}^{A/2} \left| F\left(\gamma\right) \right| e^{-2\pi y\gamma} d\gamma \le e^{\pi A y} \int_{-A/2}^{A/2} \left| F\left(\gamma\right) \right| d\gamma = C e^{\pi A y} .$$

Αρα

$$\left| f\left(z\right) \right| \le C e^{\pi A |z|} . \tag{12}$$

Ακέραιες συναρτήσεις που ικανοποιούν ένα φράγμα τύπου (12) καλούνται ***εκθετικού τύπου***. Τελικά:

(β) *Κάθε συνάρτηση* f *που ορίζεται από την (11) είναι ακεραία και εκθετικού τύπου, ο δε περιορισμός της στον πραγματικό άξονα είναι συνάρτηση στον* $L_2\left(\mathbb{R}\right)$*.*

Είναι αξιοσημείωτο ότι ισχύουν και οι αντίστροφοι ισχυρισμοί των (α) και (β). Δηλαδή έχουμε

Πρόταση 3.6

Εστω f *ολόμορφη στο* Π^+ *και* $\sup\limits_{0<y<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x+iy\right) \right|^2 dx = C < \infty$*. Τότε υπάρχει συνάρτηση* $F \in L_2\left(0,+\infty\right)$ *έτσι ώστε*

$$f(z)=\int_0^{\infty} F(\gamma)e^{2\pi iz\gamma}d\gamma,\ \ z\in\Pi^+$$

και

$$C=\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\gamma)\right|^2 d\gamma\,.$$

Πρόταση 3.8 (Paley-Wiener)

Εστω f είναι ακεραία (ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και εκθετικού τύπου

$$\left|f(z)\right|\le Ce^{\pi A|z|}$$

για κάποιο $0<A<\infty$ και $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx<\infty$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $F\in L_2(\mathbb{R})$ με

$$F(\gamma)=0\ \ \forall\gamma\notin\left[-A/2,A/2\right]$$

έτσι ώστε

$$f(z)=\int_{-A/2}^{A/2}F(\gamma)e^{2\pi iz\gamma}d\gamma.$$

Ορισμός 3.10 *Ο χώρος όλων των ακεραίων συναρτήσεων εκθετικής τάξης $A>0$ των οποίων ο περιορισμός πάνω στην πραγματική ευθεία είναι συνάρτηση του $L_2(\mathbb{R})$ καλείται* ***Paley-Wiener χώρος****, συμβολικά PW_A.*

Ο περιορισμός των στοιχείων των χώρων Paley-Wiener στην πραγματική ευθεία καλούνται συναρτήσεις ***πεπερασμένου φάσματος (band-limited)***. Οι χώροι συναρτήσεων πεπερασμένου φάσματος είναι χώροι Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο του L_2

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{g(x)}dx\,.$$

ισομετρικά ισόμορφοι με τον $L_2\left[-A/2,A/2\right]$. Ετσι οι ιδιότητες του $L_2\left[-A/2,A/2\right]$ μεταφέρονται σε χώρους συναρτήσεων πεπερασμένου φάσματος και αντιστρόφως. Εφόσον

$$f=\int_{-A/2}^{A/2}F(\gamma)e^{2\pi i\gamma\cdot}d\gamma\,,$$

όπου $F(\gamma)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της f και εφόσον η F

μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο του $L_2\left[-A/2, A/2\right]$ έχουμε

$$f = \frac{1}{A}\int_{-A/2}^{A/2}\sum_n \widehat{F}(n)e^{2\pi in\gamma/A}e^{2\pi i\gamma\bullet}d\gamma = \frac{1}{A}\sum_n \widehat{F}(n)\int_{-A/2}^{A/2}e^{2\pi i\gamma(\bullet+n/A)}d\gamma$$

$$= \frac{1}{A}\sum_n f\left(-\frac{n}{A}\right)\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-A/2,A/2]}(\gamma)e^{2\pi i\gamma(\bullet+n/A)}d\gamma = \sum_n f\left(-\frac{n}{A}\right)\frac{\eta\mu\left[\pi A\left(\bullet+n/A\right)\right]}{A\pi\left(\bullet+n/A\right)}$$

ή

$$f = \sum_n f\left(\frac{n}{A}\right)\frac{\eta\mu\left[\pi A\left(\bullet-n/A\right)\right]}{\pi A\left(\bullet-n/A\right)}.$$

Με άλλα λόγια η f μπορεί να ανακατασκευασθεί με γνώση μόνον των τιμών της στα σημεία n/A. Αυτό είναι το ***δειγματοληπτικό θεώρημα Shannon*** που παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία επικοινωνιών. Ετσι δείξαμε το ακόλουθο

Θεώρημα 3.10 (δειγματοληψίας Shannon-Whittaker)

Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη και L_2-ολοκληρώσιμη συνάρτηση σ-πεπερασμένου φάσματος, δηλαδή $\widehat{f}(\gamma)=0\ \forall|\gamma|>\sigma/2,$ για κάποιο $\sigma>0$. Τότε η f ανακατασκευάζεται πλήρως από τις τιμές της στα σημεία $x_n = n/\sigma$ μέσω της σχέσης

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\sigma}\right)\frac{\eta\mu\left[\pi\sigma\left(x-n/\sigma\right)\right]}{\pi\sigma\left(x-n/\sigma\right)}.$$

Η σύγκλιση είναι απόλυτη και ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$. Η f επεκτείνεται σε μια ακεραία συνάρτηση εκθετικού τύπου όπως παραπάνω.

Σημείωση. Η συχνότητα λήψης των δειγμάτων της f (ανά μονάδα μήκους) ισούται με το διπλάσιο του μέγιστου φάσματος ($\sigma/2$) της f και καλείται συχνότητα λήψης Nyquist. Αν η συχνότητα λήψης είναι μικρότερη αυτής τότε δεν μπορούμε να επιτύχουμε πλήρη ανακατασκευή.

3.10 Τελεστές Calderon-Zygmund

Οι τελεστές Calderon-Zygmund αποτελούν γενίκευση του τελεστή Hilbert. Πράγματι έχουμε τον ακόλουθο

Ορισμός 3.11 *Εστω ότι η συνάρτηση* $K:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{C}$ *ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες για κάποια σταθερά* C*:*

(i) $\left|K(x)\right|\le\dfrac{C}{|x|}\quad\forall x\ne 0,$

(ii) $\int_{|x|>2|y|}\left|K(x)-K(x-y)\right|dx\le C\quad\forall y\in\mathbb{R}-\{0\},$

(iii) $\int_{r<|x|<s}K(x)\,dx=0\quad\forall 0<r<s<\infty.$

Τότε λέμε ότι η K *είναι ένας* ***πυρήνας Calderon-Zygmund****. Αν* K *είναι ένας πυρήνας Calderon-Zygmund, τότε για κάθε* $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *ορίζουμε έναν* ***τελεστή Calderon-Zygmund*** *ως εξής:*

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x-y)f(y)\,dy=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|y|>\varepsilon}K(y)f(x-y)\,dy.$$

Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι κάθε τελεστής Calderon-Zygmund είναι φραγμένος στον $L_p(\mathbb{R})$ για κάθε $1<p<\infty$. Η αποδεικτική μεθοδολογία βασίζεται ακριβώς όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 3.8. Δηλαδή θα δείξουμε ότι ο T είναι (2,2) ισχυρώς φραγμένος και (1,1) ασθενώς φραγμένος.

Πρόταση 3.9 *Εστω* K *και* T *είναι ένας πυρήνας Calderon-Zygmund και τελεστής Calderon-Zygmund αντιστοίχως. Τότε υπάρχει σταθερά* $D>0$ *έτσι ώστε*

$$\|Tf\|_{L_2}\le D\|f\|_{L_2}\quad\forall f\,\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Απόδειξη. Εστω $0<r<s<\infty$ και

$$T_{r,s}f(x)=\int_{r<|y|<s}K(y)f(x-y)\,dy.$$

Για κάθε $0<r<s<\infty$ η συνάρτηση $K\chi_{[r,s]\cup[-s,-r]}\in L_1\cap L_2$ (λόγω (**i**)), άρα $K\chi_{[r,s]\cup[-s,-r]}*f\in L_1\cap L_\infty\subseteq L_2$ και από το θεώρημα Plancherel παίρνουμε

$$\left\|T_{r,s}f\right\|_{L_2}\le\left\|K\chi_{[r,s]\cup[-s,-r]}*f\right\|_{L_2}=\left\|\widehat{K\chi_{[r,s]\cup[-s,-r]}}\widehat{f}\right\|_{L_2}.$$

$$\le\sup_{\gamma}\left|\widehat{K\chi_{[r,s]\cup[-s,-r]}}\right|\left\|f\right\|_{L_2}=\left\|\widehat{K\chi_{[r,s]\cup[-s,-r]}}\right\|_{L_\infty}\left\|f\right\|_{L_2}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\sup_{r,s}\left\|\widehat{K\chi_{[r,s]\cup[-s,-r]}}\right\|_{L_\infty}\le D<\infty$$

για κάποια θετική σταθερά D. Εφόσον $Tf(x)=\lim_{r\to0,s\to\infty}T_{r,s}f(x)$, από το Λήμμα Fatou και την παραπάνω θα έχουμε το ζητούμενο, αφού

$$\left\|Tf\right\|_{L_2}\le\lim_{r\to0,s\to\infty}\left\|T_{r,s}f\right\|_{L_2}\le D\left\|f\right\|_{L_2}.$$

Αλλά

$$\widehat{K\chi_{[r,s]\cup[-s,-r]}}(\gamma)=\int_{r<|x|\le|\gamma|^{-1}}K(x)e^{-2\pi i\gamma x}dx+\int_{|\gamma|^{-1}<|x|<s}K(x)e^{-2\pi i\gamma x}dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left|\int_{r<|x|\le|\gamma|^{-1}}K(x)e^{-2\pi i\gamma x}dx\right|=\left|\int_{r<|x|\le|\gamma|^{-1}}K(x)\left(e^{-2\pi i\gamma x}-1\right)dx\right|\ \text{(λόγω (iii))}$$

$$\le\int_{r<|x|\le|\gamma|^{-1}}\left|K(x)\right|2\pi\left|\gamma x\right|dx\le2\pi\left|\gamma\right|\int_{r<|x|\le|\gamma|^{-1}}dx\ \text{(λόγω (i))}$$

$$\le2\pi\left|\gamma\right|\int_{r<|x|\le|\gamma|^{-1}}dx\le4\pi.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{|\gamma|^{-1}<|x|<s}K(x)e^{-2\pi i\gamma x}dx=-\int_{|\gamma|^{-1}<|x|<s}K(x)e^{-2\pi i\gamma\left(x+\frac{1}{2\gamma}\right)}dx,$$

άρα

$$2\int_{|\gamma|^{-1}<|x|<s} K(x)e^{-2\pi i\gamma x}dx = \int_{|\gamma|^{-1}<|x|<s}\left(K(x)-K\left(x-\frac{1}{2\gamma}\right)\right)e^{-2\pi i\gamma x}dx + R(\gamma),$$

όπου

$$R(\gamma) = \int_{|\gamma|^{-1}<|x|<s} K\left(x-\frac{1}{2\gamma}\right)e^{-2\pi i\gamma x}dx - \int_{|\gamma|^{-1}<\left|x-\frac{1}{2\gamma}\right|<s} K\left(x-\frac{1}{2\gamma}\right)e^{-2\pi i\gamma x}dx.$$

Από τη συνθήκη (**ii**) για $y = 1/(2\gamma)$ παίρνουμε

$$\left|\int_{|\gamma|^{-1}<|x|<s}\left(K(x)-K\left(x-\frac{1}{2\gamma}\right)\right)e^{-2\pi i\gamma x}dx\right| \le \int_{|\gamma|^{-1}<|x|<s}\left|K(x)-K\left(x-\frac{1}{2\gamma}\right)\right|dx \le C.$$

Επίσης από τον ορισμό της R προκύπτει ότι η R ορίζεται μέσω ενός ολοκληρώματος πάνω σε χωρίο U του $\mathbb{R}$ μήκους το πολύ $|U| = 1/|\gamma|$ και τέτοιο ώστε $|x| > 1/(2|\gamma|)$. Συνεπώς:

$$|R(\gamma)| \le \int_U \left|K\left(x-\frac{1}{2\gamma}\right)\right|dx = \int_{U-\frac{1}{2\gamma}} |K(x)|dx \le \int_{U-\frac{1}{2\gamma}} \frac{1}{|x|}dx \le 2\int_U |\gamma|dx \le 2.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι $\sup_{r,s}\left\|\widehat{K\chi_{[r,s]\cup[-s,-r]}}\right\|_{L_\infty} \le D < \infty$ για κάποια θετική σταθερά D και η πρόταση αποδείχθηκε. ■

Πρόταση 3.10 *Εστω T είναι τελεστής Calderon-Zygmund όπως παραπάνω. Τότε ο T είναι (1,1) ασθενώς φραγμένος.*

Απόδειξη. Είναι ακριβώς ίδια με την απόδειξη ότι ο τελεστής Hilbert είναι (1,1)-ασθενώς φραγμένος. ■

Θεώρημα 3.11 *Εστω T είναι τελεστής Calderon-Zygmund όπως παραπάνω.* Τότε ο T είναι φραγμένος στον $L_p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 < p < \infty$.

Απόδειξη. Με το θεώρημα Marcinkiewisz και συνεπεία των προτάσεων 3.9 και 3.10 προκύπτει ότι ο T είναι (p,p)-ισχυρώς φραγμένος για κάθε $1 < p < 2$ στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και λόγω πυκνότητας του $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση του T πάνω στον

$L_p(\mathbb{R})$. Για $p > 2$ το αποτέλεσμα προκύπτει μέσω δυϊκότητας. ■

Τονίζουμε εδώ ότι στην απόδειξη της πρότασης 3.10 μόνον η συνθήκη **(ii)** χρησιμοποιείται. Η συνθήκη αυτή καλείται ***συνθήκη Hormander***. Μια ικανή συνθήκη ώστε να ισχύει η συνθήκη Hormander είναι η ακόλουθη:

Εστω $K : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{C}$ *είναι παραγωγίσιμη για κάθε* $x \neq 0$ *και*

$$\left|K'(x)\right| \leq C|x|^{-2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Τότε ισχύει η συνθήκη Hormander

$$\int_{|x|>2|y|} \left|K(x) - K(x-y)\right| dx \leq C \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Από την παραπάνω συζήτηση διαπιστώνουμε ότι κάθε (2,2)-ισχυρώς φραγμένος τελεστής που ικανοποιεί τη συνθήκη Hormander (ή τη συνθήκη $\left|K'(x)\right| \leq C|x|^{-2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$) είναι φραγμένος στον L_p για κάθε $1 < p < \infty$.

Κλείνοντας τονίζουμε ότι σε καμία περίπτωση η ισχύς όλων των αποτελεσμάτων στο $\mathbb{R}$ μεταφέρεται αυτούσια και στον $\mathbb{R}^n$ (κάποια ναι, πολλά όμως όχι). Η ανάλυση Fourier στον $\mathbb{R}^n$ είναι πολύ πιο επίπονη απ' ότι στον $\mathbb{R}$ και χρειάζεται πολύ προσοχή όταν κάποιος εργάζεται σε χώρους ανώτερης διάστασης.

3.11 Ασκήσεις

1. Δείξτε τις ιδιότητες F1-F9 της πρότασης 3.1.

2. Εστω $f \in L_1(\mathbb{R}), f > 0$. Δείξτε ότι $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \le \widehat{f}(0)$.

3. Αν $\int_{\mathbb{R}} \left|t^k f(t)\right| dt < \infty \ \forall k = 0,1,...,n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι

(α) $\widehat{f}$ είναι $n-$φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(β) $(-2\pi i)^k \int_{\mathbb{R}} t^k f(t) dt = \widehat{f}^{(k)}(0) \ \ \forall k = 0,1,...,n$.

4. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f \in L_2$ τέτοιο ώστε $f \notin L_1(\mathbb{R})$ αλλά $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

5. Δείξτε ότι δεν υπάρχει $g \in L_1(\mathbb{R}) - \{0\}$ με $f * g = f \quad \forall f \in L_1(\mathbb{R})$.

6. Εστω $f \in L_p(\mathbb{R}), g \in L_q(\mathbb{R})$, όπου οι $p,q \ge 1$ είναι συζυγείς εκθέτες και $h = f * g$. Δείξτε ότι h είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν $p > 1$ δείξτε ότι $h \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ το οποίο όμως δεν ισχύει για $p = 1$.

7. Αν $a > 0$ υπολογίστε τη συνέλιξη $g(t) = \chi_{[-a/2,\, a/2]} * \chi_{[-a/2,\, a/2]}(t)$ και στη συνέχεια το μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων

- $f(t) = \chi_{[-a/2,\, a/2]}(t)$,
- $g(t) = \chi_{[-a/2,\, a/2]} * \chi_{[-a/2,\, a/2]}(t)$,
- $h(t) = \chi_{[-a/2,\, a/2]} * \chi_{[-a/2,\, a/2]} * \chi_{[-a/2,\, a/2]} * \chi_{[-a/2,\, a/2]}(t)$.

Πως επηρεάζει η συνέλιξη το φορέα της f;

8. Εστω $n \in \mathbb{N}$, $g_n(t) = \chi_{[-n,n]}(t)$, $h(t) = \chi_{[-1,1]}(t)$ και $f_n(t) = g_n * h(t)$. Δείξτε ότι:

(α) $f_n(t)=\begin{cases} 2, & |t|\le n-1 \\ n+1-|t|, & n-1\le |t|\le n+1 \end{cases}$.

(β) $\widehat{f_n}(\gamma)=\dfrac{\eta\mu(2\pi n\gamma)\eta\mu(2\pi\gamma)}{\pi^2\gamma^2}\in L_1$.

(γ) $\left\|\widehat{f_n}\right\|_{L_1}\to\infty$.

9. Δείξτε ότι η εικόνα του μετασχηματισμού Fourier $\widehat{S}f:L_1(\mathbb{R})\to\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ το οποίο είναι πυκνό στο $\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη: Ο χώρος Schwartz είναι πυκνός στο $\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$.

10. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\dfrac{\eta\mu(ax)}{x}e^{-2\pi i\gamma x}dx$, ($a>0$ σταθερά).

11. (Θεώρημα αντιστροφής) Εστω $f,\widehat{f}\in L_1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\widehat{f}(\gamma)e^{2\pi i\gamma x}d\gamma=f(x),\ \text{σημειακά σ.π. στο } \mathbb{R}.$$

12. Δείξτε ότι $\dfrac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\pi x/2)}{1-x^2}\sigma\upsilon\nu(2\pi\gamma x)dx=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu(2\pi\gamma) & |\gamma|<1/4\\ 0 & |\gamma|>1/4\end{cases}$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε θεώρημα αντιστροφής (βλ. άσκ. 11).

13. Για $a>0$, δείξτε ότι η συνάρτηση $f(t)=e^{-a|t|}(1+a|t|)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $\widehat{f}(\gamma)=\dfrac{4a^3-8a\pi i\gamma}{\left(a^2+(2\pi\gamma)^2\right)^2}$.

14. Υπολογίστε την οικογένεια συναρτήσεων

$$f_a(\gamma)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\eta\mu(2\pi ax)}{\pi x}\frac{e^{2\pi i\gamma x}}{1+(2\pi x)^2}dx,\ a>0,\ \gamma\in\mathbb{R}.$$

Υπόδειξη: Συνέλιξη κάποιων (γνωστών) συναρτήσεων.

15. Δείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)} = \frac{\pi}{ab(a+b)},\ a,b>0,\ a>-b$.

Υπόδειξη: Εφαρμογή ταυτότητας Parseval.

16. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, με χρήση ιδιοτήτων υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier της f που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_{-x-a}^{-x+a} f(y)\,dy = e^{-|x-2|} - e^{-2|x|}.$$

17. (Poisson Summation formula) Εστω $f = O\left(x^{-1-\varepsilon}\right), \widehat{f} = O\left(x^{-1-a}\right)$, για $\varepsilon, a > 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i x n} \text{ σημειακά σ.π. στο } \mathbf{T}.$$

Εφαρμόστε κατάλληλα την PSF για τη συνάρτηση $f = e^{-a|x|},\ a>0$ και δείξτε την ισότητα $\frac{e^a+1}{e^a-1} = \sum_n \frac{2a}{a^2+(2\pi n)^2}$.

18. Εστω $f, g \in L_p(\mathbb{R})$, $1<p<2$ και p,q είναι συζυγείς εκθέτες. Δείξτε την ταυτότητα «τύπου» Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\gamma) g(\gamma)\,d\gamma.$$

19. Υπολογίστε $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε $f * g \notin L_2(\mathbb{R})$.

20. Υπολογίστε προσεγγιστική μονάδα $\{f_\lambda\}_{\lambda>0}$ στο σύνολο $\mathbf{C}_\infty^c(\mathbb{R})$, όπου $\mathbf{C}_\infty^c(\mathbb{R})$ είναι ο χώρος των απειροδιαφορίσιμων συναρτήσεων με φραγμένο φορέα.

21. Εστω $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ και $g \in \mathbf{C}_\infty^c(\mathbb{R})$, όπου $\mathbf{C}_\infty^c(\mathbb{R})$ είναι όπως στην άσκηση 20. Δείξτε ότι $f * g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ και υπάρχουν ακολουθίες

συναρτήσεων $g_n \in \mathbf{C}_\infty^c(\mathbb{R})$ ώστε $\|f * g_n - f\|_1 \to 0 \;\; n \to \infty$.

22. Δείξτε ότι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f \in L_p(\mathbb{R}),\ 1 \le p < \infty$ των οποίων ο μετασχηματισμός Fourier έχει συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L_p(\mathbb{R})$.

23. Αν $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ και $\left|\hat{f}(\gamma)\right| \le \dfrac{A}{1+|\gamma|^{1+a}},\ 0 < a < 1$, δείξτε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Holder τάξης a, δηλαδή για κάποια θετική σταθερά M

$$\left|f(x+h) - f(x)\right| \le M|h|^a \;\; \forall x, h \in \mathbb{R}.$$

24. Αν f είναι συνεχής, $f \in L_2(\mathbb{R})$ και $\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-y^2+2xy} dy = 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $f(x) = 0 \;\forall x$.

Υπόδειξη: Για $g(x) = e^{-x^2}$, θεωρείστε τη συνέλιξη $f * g(x)$.

25. (Μετασχηματισμός Fourier στον $\mathbb{R}^n$)

Ο Μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ορίζεται ως

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \gamma \bullet x} dx,\ \gamma, x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\gamma \bullet x$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

- Αν $g(x) = f(A \cdot x)$, όπου A είναι αντιστρέψιμος γραμμικός τελεστής στον $\mathbb{R}^n$ (δηλ. $n \times n$ πίνακας), υπολογίστε τη $\hat{g}$.

- Δείξτε ότι αν η f είναι αναλλοίωτη ως προς τις περιστροφές (ορθομοναδιαίους γραμμικούς τελεστές A με $|A| = 1$), δηλαδή αν $f(A \cdot x) = f(x)$ τότε το ίδιο ισχύει για τη $\hat{g}$.

- Δείξτε ότι $\widehat{\dfrac{\partial^k f}{\partial x_i^k}}(\gamma) = (2\pi i \gamma_i)^k \hat{f}(\gamma),\ \left(x = (x_1, \ldots, x_n), \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\right)$,

υπό τη προϋπόθεση $\frac{\partial^\nu f}{\partial x_i^\nu} \in L_1 \cap \mathbf{C}_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ για κάθε $\nu = 1,\ldots,k$.

- Αν Δf είναι ο τελεστής Laplace της f με $\frac{\partial^\nu f}{\partial x_i^\nu} \in L_1 \cap \mathbf{C}_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ για κάθε $\nu = 1,2$ και $g = \Delta f$, υπολογίστε τη $\hat{g}$.

26. Αν $u \in L_1\left(\mathbb{R}^2\right), g, h \in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ και η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι 2ης τάξης όλες στον $L_1 \cap \mathbf{C}_0\left(\mathbb{R}^2\right)$, να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{cases}, \; x \in \mathbb{R},\; t > 0.$$

27. Αν $u \in L_1\left(\mathbb{R}^2\right)$ και η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στον $L_1 \cap \mathbf{C}_0\left(\mathbb{R}^n\right)$, να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-|x|} \end{cases}, \; x \in \mathbb{R},\; t > 0.$$

28. Εστω $\left\{P_r(x)\right\}_{0<r<1}$ είναι ο πυρήνας Poisson. Δείξτε ότι $\left\{-xP_r'\right\}$ είναι προσεγγιστική μονάδα.

29. Αν $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ δείξτε ότι υπάρχουν σταθερές $C > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|\varphi\|_p \le C\left(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{n,0}\right) \quad (1 \le p \le \infty).$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι ο χώρος $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L_p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \le p < \infty$.

30. Δείξτε ότι $H\chi_{[a,b]} = \log\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$. Συμπεράνετε ότι ο μετασχηματισμός Hilbert δεν είναι φραγμένος στον $L_1(\mathbb{R})$ ούτε στον $L_\infty(\mathbb{R})$.

31. Με χρήση του ορισμού δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Hilbert των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi cx)$ και $g(x) = \eta\mu(2\pi cx)$ ισούται με $Hf(x) = \eta\mu(2\pi cx)$ και $Hg(x) = -\sigma\upsilon\nu(2\pi cx)$ αντιστοίχως. Στη συνέχεια δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Hilbert της συνάρτησης $h(x) = e^{2\pi icx}$ ισούται με $Hh(x) = -ie^{2\pi icx}$, όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

32. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier (με την έννοια των γενικευμένων συναρτήσεων) της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης:

$$U(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

καθώς επίσης και των συναρτήσεων $e^{2\pi ix\gamma_0}$, $\sigma\upsilon\nu 2\pi\gamma_0 x$, $\eta\mu 2\pi\gamma_0 x$, $(\delta_0)^{(k)}$, x^k, $k \in \mathbb{N}$, όπου γ_0 σταθερά.

33. Δείξτε ότι $\widehat{\left(-\frac{1}{\pi x^2}\right)} = 2\pi|\gamma|$.

34. Μια συνάρτηση καλείται αιτιατή (causal) αν $f(t) = 0$, $t < 0$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας πραγματικής συνάρτησης μπορεί (φορμαλιστικά) να παρασταθεί συναρτήσει του μετασχηματισμού Fourier μιας αιτιατής συνάρτησης.

Υπόδειξη. Θεωρείστε $g = f + i\,Hf$.

35. Εστω $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\lim_{N\to\infty} P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi iNx}}{x}\varphi(x)\,dx = \varphi(0)\pi i$

και

$$\lim_{N\to-\infty} P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi iNx}}{x}\varphi(x)\,dx = -\varphi(0)\pi i\,.$$

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση χρόνου/συχνότητας

4.1 Εισαγωγή.

Η ανάλυση χρόνου/συχνότητας (Time-Frequency Analysis) μελετά μετασχηματισμούς συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$, (όπου $X = \mathbb{N}$ ή $\mathbb{Z}$ ή $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ή $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ κλπ) που σχεδιάζονται ώστε να αποκαλύπτουν στοχευμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά της f (μετά τη δράση του μετασχηματισμού) για να μπορέσουμε να συνάγουμε ευκολότερα συμπεράσματα σχετικά με τη μελέτη και τα ερωτήματα που θέτουμε. Η επιλογή του κατάλληλου μετασχηματισμού εξαρτάται τόσο από τη συνάρτηση αυτή καθ' εαυτή, π.χ. αν έχει συμπαγή φορέα στο χρόνο, ή αν είναι λεία, $p-$ολοκληρώσιμη κλπ, όσο και από τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που θέλουμε να μελετήσουμε σ' αυτή, όπως π.χ. το συχνοτικό περιεχόμενό της συναρτήσει του χρόνου. Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός Fourier της f (προς στιγμήν υποθέτουμε ότι $f \in L_1(\mathbb{R})$) στη συχνότητα γ

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \gamma x} dx ,$$

είναι ένα μέτρο του «συνολικού» συχνοτικού περιεχομένου γ της συνάρτησης f στο $(-\infty, +\infty)$. Σε πιο σύνθετα ερωτήματα που αφορούν π.χ. σε ποιες χρονικές στιγμές t εντοπίζονται υψηλές συχνότητες γ (που αντανακλούν σε «απότομες» μεταβολές στο γράφημα της f), τότε ο μετασχηματισμός Fourier δεν μπορεί εύκολα (ή και καθόλου) να ανταποκριθεί. Με τέτοιου τύπου ερωτήματα (και όχι μόνον) ασχολείται η ανάλυση χρόνου/συχνότητας. Επειδή τέτοιοι μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε εφαρμογές, απαιτούμε εκ των προτέρων

- να είναι συνεχείς και συνεχώς αντιστρέψιμοι.
- Να μπορούν να διακριτοποιηθούν και να υπολογίζονται μέσω αριθμητικού αλγορίθμου.

4.2 Ο συνεχής μετασχηματισμός Gabor.

Η ανεπάρκεια του μετασχηματισμού Fourier όσον αφορά προβλήματα χρόνου/συχνότητας είχε ήδη εντοπισθεί από τον D. Gabor ο οποίος το 1946 όρισε ένα «παράθυρο» στο χρόνο για να μπορέσει να λύσει το πρόβλημα της «τοπικής» φασματικής πληροφορίας.

Ορισμός 4.1 *Καλούμε μια συνάρτηση* $g \in L_2(\mathbb{R})$ ***παράθυρο στο χρόνο****, αν* $xg(x) \in L_2(\mathbb{R})$*. Το* ***κέντρο*** t_g^* *(επικρατούσα τιμή) και η* ***ακτίνα*** Δ_g *(τυπική απόκλιση) της* g *ορίζονται από τις σχέσεις*

$$t_g^* = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} x |g(x)|^2 \, dx$$

και

$$\Delta_g = \frac{1}{\|g\|_2} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(x - t_g^*\right)^2 |g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Ορίζουμε το ***μήκος του παραθύρου*** g *να είναι ίσο με* $2\Delta_g$*. Καλούμε* ***ουσιώδη φορέα*** *της* g *το διάστημα* $\left[t_g^* - \Delta_g, t_g^* + \Delta_g\right]$*.*

Το παράθυρο που χρησιμοποίησε ο Gabor ήταν η συνάρτηση Gauss

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}, \ (a > 0).$$

Τότε:

$$\boxed{t_{g_a}^* = 0}.$$

Επίσης, εφόσον $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-Ax^2} dx = \sqrt{\pi} A^{-1/2}$, με παραγώγιση ως προς A παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-Ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A^{-3/2}.$$

Ετσι για $A = 1/(2a)$ έχουμε $\|g_a\|_2 = (8\pi a)^{-1/4}$ και έτσι υπολογίζουμε

$$\boxed{\Delta_{g_a} = \sqrt{a}}.$$

Αρα ο ουσιώδης φορέας της g_a είναι το διάστημα $\left[-\sqrt{a},\sqrt{a}\right]$.

Ορισμός 4.2 *Για καθορισμένο* $a>0$ *και* g_a *να είναι η συνάρτηση Gauss όπως παραπάνω, ορίζουμε το* ***μετασχηματισμό Gabor*** *μιας συνάρτησης* $f\in L_2(\mathbb{R})$ *να είναι ο γραμμικός τελεστής*

$$\mathcal{G}_{g_a}: L_2(\mathbb{R})\to L_\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}):\ \mathcal{G}_{g_a} f(x,\gamma)=\int_{\mathbb{R}} f(t)g_a(t-x)e^{-2\pi i\gamma t}dt\,.$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: για φιξαρισμένο x και μικρό $a>0$, η συνάρτηση $f(t)g_a(t-x)$ «τοπικοποιεί» την f σε μια περιοχή του x (δηλαδή «σχεδόν μηδενίζει» το γράφημα της f έξω από μια περιοχή του x της μορφής $\left[x-\sqrt{a},x+\sqrt{a}\right]$ που αντιστοιχεί στον ουσιώδη φορέα της g_a) και στη συνέχεια υπολογίζει το μετασχηματισμό Fourier της $f(t)g_a(t-x)$ στη συχνότητα γ. Με άλλα λόγια

$$\mathcal{G}_{g_a} f(x,\gamma)=\widehat{f(\cdot)g_a(\cdot-x)}(\gamma)\,.$$

Με μια μη αυστηρή ερμηνεία μπορούμε να πούμε ότι ο μετασχηματισμός Gabor της f είναι ένα μέτρο του συχνοτικού περιεχομένου της f «τοπικά» στο x.

Στο εξής χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$\begin{cases} T_x f(t)=f(t-x) \\ M_\gamma f(t)=e^{2\pi i\gamma t}f(t) \end{cases}.$$

Τότε

$$T_x M_\gamma f(t)=e^{-2\pi i x\gamma}M_\gamma T_x f(t), \qquad (1)$$

συνεπώς οι δυο τελεστές T_x και M_γ αντιμετατίθενται αν και μόνον αν $x\gamma\in\mathbb{Z}$. Σημειώνουμε εδώ ότι

$$\left\|T_x M_\gamma f\right\|_p=\left\|f\right\|_p\ \ \forall 1\le p\le\infty\,.$$

Επίσης:

$$\begin{cases} \widehat{T_x f} = M_{-x}\widehat{f} \\ \widehat{M_\gamma f} = T_\gamma \widehat{f} \end{cases}.$$

Τότε:

$$\widehat{M_\gamma T_x f} = e^{-2\pi i\gamma x}\widehat{T_x M_\gamma f} = e^{-2\pi i\gamma x} M_{-x} T_\gamma \widehat{f} = T_\gamma M_{-x}\widehat{f}\,, \qquad (2)$$

όπου η 1η και η τελευταία ισότητα στη (2) προέκυψε από την (1). Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε

$$g_a(t-x)e^{-2\pi i\gamma t} = M_{-\gamma}T_x g_a(t)$$

και

$$\mathcal{G}_a f(x,\gamma) = \langle f, M_\gamma T_x g_a \rangle,$$

όπου $\langle \cdot,\cdot \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $L_2(\mathbb{R})$ και g_a είναι η συνάρτηση Gauss όπως παραπάνω. Τότε απ' την ταυτότητα Parseval και τη (2) παίρνουμε

$$\mathcal{G}_{g_a} f(x,\gamma) = \langle f, M_\gamma T_x g_a \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{M_\gamma T_x g_a} \rangle$$

$$= \langle \widehat{f}, T_\gamma M_{-x}\widehat{g_a} \rangle = e^{-2\pi i x\gamma}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\widehat{g_a}(\omega-\gamma)e^{2\pi i x\omega}d\omega \qquad (3)$$

$$= e^{-2\pi i x\gamma}\mathcal{G}_{\widehat{g_a}}\widehat{f}(\gamma,-x). \qquad (4)$$

Η ισότητα (4) είναι ουσιώδης στην ανάλυση χρόνου/συχνότητας διότι συνδυάζει τόσο την f όσο και την $\widehat{f}$ σε μια κοινή αναπαράσταση χρόνου/συχνότητας. Εφόσον ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης Gauss g_a είναι πάλι η συνάρτηση Gauss

$$\widehat{g_a}(\gamma) = 2\sqrt{a}e^{-4a\pi^2\gamma^2},$$

η σχέση (3) ερμηνεύεται ως εξής: η $\widehat{f}(\omega)\widehat{g_a}(\omega-\gamma)$ «τοπικοποιεί» την $\widehat{f}$ (δηλαδή «σχεδόν μηδενίζει» την $\widehat{f}$ έξω από μια περιοχή του γ που αντιστοιχεί στον ουσιώδη φορέα της $\widehat{g_a}$) και στη συνέχεια υπολογίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $\widehat{f}(\omega)\widehat{g_a}(\omega-\gamma)$. Δηλαδή, η πληροφορία του συχνοτικού

περιεχομένου γ που αναζητούμε μελετώντας «τοπικά» τη συνάρτηση f σε μια περιοχή του σημείου $t = x$ με χρήση του παραθύρου g_a ταυτίζεται με την πληροφορία που αντλούμε από τη μελέτη της $\widehat{f}$ σε μια περιοχή του σημείου $\omega = \gamma$ με χρήση του παραθύρου $\widehat{g_a}$ τη χρονική στιγμή $t = x$.

Εργαζόμενοι όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$\boxed{t^*_{\widehat{g_a}} = 0}, \quad \boxed{\Delta_{\widehat{g_a}} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{a}}}$$

και λέμε ότι η $\widehat{g_a}$ είναι ένα ***παράθυρο στις συχνότητες*** με ***κέντρο*** $t^*_{\widehat{g_a}} = 0$ και ***ύψος*** ίσο με $2\Delta_{\widehat{g_a}}$. Για κάθε ζεύγος $(x,\gamma) \in \mathbb{R}^2$, το καρτεσιανό γινόμενο

$$I_{x,\gamma} = \left[x + (t^*_{g_a} - \Delta_{g_a}), x + (t^*_{g_a} + \Delta_{g_a})\right] \times \left[\gamma + (t^*_{\widehat{g_a}} - \Delta_{\widehat{g_a}}), x + (t^*_{\widehat{g_a}} + \Delta_{\widehat{g_a}})\right]$$

$$= \left[x - \sqrt{a},\ x + \sqrt{a}\right] \times \left[\gamma - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{a}},\ \gamma + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{a}}\right], \tag{5}$$

καλείται ορθογώνιο παράθυρο χρόνου/συχνότητας.

Παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο $I_{x,\gamma}$ έχει **<u>πάντα σταθερό μήκος και ύψος</u>** και εμβαδόν ανεξάρτητο της παραμέτρου a, ίσο με

$$\left(2\Delta_{g_a}\right)\left(2\Delta_{\widehat{g_a}}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

Αυτό είναι ένα μειονέκτημα του μετασχηματισμού Gabor διότι για τον εντοπισμό είτε υψηλών είτε χαμηλών συχνοτήτων το παράθυρο στο χρόνο έχει πάντα σταθερό μήκος ίσο με $2\sqrt{a}$. Θα προτιμούσαμε το μήκος του παραθύρου να «στενεύει» στο χρόνο όταν θέλουμε να εντοπίσουμε υψηλές συχνότητες και να «απλώνεται» όταν θέλουμε να αναλύσουμε καλύτερα χαμηλές συχνότητες. Αυτό το επιτυγχάνουμε πολύ καλύτερα με το μετασχηματισμό κυματιδίων.

Με βάση τα παραπάνω δίνουμε μια ακόμη ερμηνεία του

μετασχηματισμού Gabor: Για κάθε ζεύγος (x,γ), η «ατομική» συνάρτηση

$$M_\gamma T_x g_a$$

έχει ουσιώδη φορέα στο χρόνο $\left[x-\sqrt{a},\, x+\sqrt{a}\right]$ και ουσιώδη φορέα στις συχνότητες $\left[\gamma-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{a}},\, \gamma+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{a}}\right]$ και συνεπώς αντιστοιχεί σ' ένα «κελί» $I_{x,\gamma}$ όπως στην (5) στο διάγραμμα χρόνου/συχνότητας. Ετσι, ο μετασχηματισμός Gabor είναι ένα μέτρο της συνεισφοράς αυτής της ατομικής συνάρτησης στην ανάλυση της f στο πεδίο χρόνου/συχνότητας.

4.3 Ο μετασχηματισμός Fourier βραχέος χρόνου (Short-time Fourier Transform).

Τα παραπάνω γενικεύονται στην περίπτωση που αντί της συνάρτησης Gauss χρησιμοποιηθεί μια οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση που δρα ως παράθυρο στο χρόνο.

Ορισμός 4.3 *Εστω* $g \in L_2(\mathbb{R})$ *είναι παράθυρο στο χρόνο με την έννοια του ορισμού 4.1. Τότε, ο* ***μετασχηματισμός Fourier βραχέος χρόνου*** *μιας συνάρτησης* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *ορίζεται ως εξής:*

$$V_g : L_2(\mathbb{R}) \to L_\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}): \quad V_g f(x,\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi i\gamma t}dt .$$

Σημείωση. Αν $f \in L_p(\mathbb{R})$ και $g \in L_q(\mathbb{R})$, όπου p,q είναι συζυγείς εκθέτες, τότε η συνάρτηση $V_g f$ είναι καλά ορισμένη. Επίσης η $V_g f$ ορίζεται για κάθε γενικευμένη συνάρτηση f, υπό την προϋπόθεση ότι η g είναι συνάρτηση στο χώρο Schwartz. Στην παράγραφο αυτή για απλότητα εργαζόμαστε στον $L_2(\mathbb{R})$.

Πρόταση 4.1 *Εστω* $f_1, f_2 \in L_2(\mathbb{R})$ *και* $g_1, g_2 \in L_\infty(\mathbb{R})$ *είναι παράθυρα στο χρόνο όπως ορίσθηκαν παραπάνω. Τότε* $V_{g_j} f_j \in L_2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1,2$ *και*

$$\left\langle V_{g_1} f_1,\ V_{g_2} f_2 \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \left\langle f_1, f_2 \right\rangle_{L_2(\mathbb{R})} \overline{\left\langle g_1, g_2 \right\rangle}_{L_2(\mathbb{R})} .$$

Απόδειξη. Εφόσον g_1, g_2 είναι παράθυρα στο χρόνο, έχουμε $(1+|t|)g_1(t),\ (1+|t|)g_2(t) \in L_2(\mathbb{R})$, άρα $g_1, g_2 \in L_1(\mathbb{R})$. Συνεπώς απ' την υπόθεση $g_1, g_2 \in L_1 \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Απ' την άλλη μεριά

$$V_{g_j} f_j(x,\gamma) = \widehat{f_j(\cdot)\overline{g_j}(\cdot - x)}(\gamma),$$

όπου $f_j \cdot T_x \overline{g_j} \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και $j = 1,2$. Αρα

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left| V_{g_j} f_j(x,\gamma) \right|^2 d\gamma dx = \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \widehat{f_j \cdot T_x \overline{g_j}}(\gamma) \right|^2 d\gamma dx$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \left| f_j \cdot T_x \overline{g_j}(t) \right|^2 dtdx = \iint_{\mathbb{R}^2} \left| f_j \cdot T_x \overline{g_j}(t) \right|^2 dxdt = \left\| f_j \right\|_2^2 \left\| g_j \right\|_2^2 < \infty .$$

Αρα $V_{g_j} f_j \in L_2\left(\mathbb{R}^2\right),\ j = 1,2$. Με όμοιο τρόπο παίρνουμε

$$\left\langle V_{g_1} f_1,\ V_{g_2} f_2 \right\rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} V_{g_1} f_1(x,\gamma) \overline{V_{g_2} f_2}(x,\gamma)\, d\gamma dx$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{f_1 \cdot T_x \overline{g_1}}(\gamma)\ \overline{\widehat{f_2 \cdot T_x \overline{g_2}}(\gamma)} d\gamma dx \text{ (Parseval)}$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f_1(t) \cdot T_x \overline{g_1}(t)\ \overline{f_2}(t) \cdot T_x g_2(t)\, dtdx \text{ (Fubini)}$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f_1(t) \overline{g_1}(t-x)\ \overline{f_2}(t) \cdot g_2(t-x)\, dxdt$$

$$= \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}. \qquad \blacksquare$$

Σημείωση. Η Πρόταση 4.1 επεκτείνεται για κάθε $g_2 \in L_2(\mathbb{R})$ επεκτείνοντας συνεχώς το συναρτησιακό

$$g_2 : L_1 \cap L_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} :\ g_2 \to \left\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \right\rangle$$

πάνω στον $L_2(\mathbb{R})$. Ομοίως για τη g_1.

Πόρισμα 4.1 *Εστω* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *και* g *παράθυρο στο χρόνο με* $\|g\|_{L_2} = 1$. *Τότε*

$$\left\| V_g f \right\|_{L_2\left(\mathbb{R}^2\right)} = \| f \|_{L_2(\mathbb{R})},$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier βραχέος χρόνου είναι ισομετρία απ' τον $L_2(\mathbb{R})$ *μέσα στον* $L_2\left(\mathbb{R}^2\right)$, *άρα και 1-1.*

Απόδειξη. Αμεση από την Πρόταση 4.1. $\blacksquare$

Θεώρημα 4.1 (Αντιστροφής) *Εστω* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *και* g, h *παράθυρα έτσι ώστε* $\langle g, h \rangle \neq 0$. *Τότε για κάθε* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *έχουμε*

$$f(\bullet)=\frac{1}{\langle h,g\rangle}\iint_{\mathbb{R}^2} V_g f(x,\gamma)\,h(\bullet-x)\,e^{2\pi i\gamma\bullet}\,d\gamma\,dx\,,$$

όπου η σύγκλιση είναι ασθενής.

Απόδειξη. Εχουμε ήδη δείξει ότι $V_g f\in L_2(\mathbb{R}^2)$. Εστω

$$\widetilde{f}(\bullet)=\frac{1}{\langle h,g\rangle}\iint_{\mathbb{R}^2} V_g f(x,\gamma)\,h(\bullet-x)\,e^{2\pi i\gamma\bullet}\,d\gamma\,dx$$

$$=\frac{1}{\langle h,g\rangle}\iint_{\mathbb{R}^2} V_g f(x,\gamma)\;M_\gamma T_x h(\bullet)\,d\gamma\,dx\,.$$

Αν $b\in L_2(\mathbb{R})$, τότε

$$\left|\langle \widetilde{f},b\rangle\right|=\left|\frac{1}{\langle h,g\rangle}\iint_{\mathbb{R}^2} V_g f(x,\gamma)\,\overline{V_h b(x,\gamma)}\,d\gamma\,dx\right|$$

$$\le\frac{1}{\left|\langle h,g\rangle\right|}\left\|V_g f\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\left\|V_h b\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}<\infty\,,$$

αρα το συναρτησιακό $b\to\langle \widetilde{f},b\rangle$ είναι φραγμένο στον $L_2(\mathbb{R})$ και συνεπώς απ' το θεώρημα αναπαράστασης Riesz θα πρέπει $\widetilde{f}\in L_2(\mathbb{R})$. Τότε

$$\langle \widetilde{f},b\rangle=\frac{1}{\langle h,g\rangle}\int_{\mathbb{R}^2} V_g f(x,\gamma)\;\langle M_\gamma T_x h,b\rangle\,d\gamma\,dx$$

$$=\frac{1}{\langle h,g\rangle}\int_{\mathbb{R}^2} V_g f(x,\gamma)\;\overline{V_h b(x,\gamma)}\,d\gamma\,dx$$

$$=\frac{1}{\langle h,g\rangle}\langle V_g f,V_h b\rangle=\frac{1}{\langle h,g\rangle}\langle f,b\rangle\overline{\langle g,h\rangle}=\langle f,b\rangle\,.$$

Αρα $\widetilde{f}=f$ και το θεώρημα αποδείχθηκε. ■

4.4 Αρχή αβεβαιότητας.

Από τα παραπάνω φαίνεται ο σημαντικός ρόλος του παραθύρου g όσον αφορά την ανάλυση χρόνου/συχνοτήτων. Στην παράγραφο 4.1 είδαμε ότι η συνάρτηση Gauss αποτελεί παράθυρο τόσο στο χρόνο όσο και στις συχνότητες πράγμα που αποτελεί γενικότερη επιδίωξή μας. Αναρωτιόμαστε αν υπάρχουν και άλλες τέτοιου τύπου συναρτήσεις. Οσον αφορά τη συνάρτηση Gauss g_a της παραγράφου 4.1 είδαμε ότι ο ουσιώδης φορέας αυτής στο χρόνο είναι

$$2\Delta_{g_a} = 2\sqrt{a}$$

και ο ουσιώδης φορέας αυτής στις συχνότητες είναι

$$2\Delta_{\widehat{g_a}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{a}}.$$

Αυτό σημαίνει ότι αν το a είναι μικρό τότε ο φορέας «απλώνεται» στις συχνότητες και αντίστροφα, άρα καλή ανάλυση στο χρόνο σημαίνει χειρότερη ανάλυση στις συχνότητες και αντιστρόφως. Παρ΄όλα αυτά

$$\left(2\Delta_{g_a}\right)\left(2\Delta_{\widehat{g_a}}\right) = \frac{1}{\pi}. \qquad (6)$$

Προφανώς μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις που φθίνουν γρήγορα στο άπειρο τόσο στο χρόνο όσο και στις συχνότητες. Για παράδειγμα μπορούμε να επιλέξουμε μια συνάρτηση Schwartz ή μια απειροδιαφορίσιμη συνάρτηση με συμπαγή φορέα στο χρόνο. Το ερώτημα είναι: υπάρχουν παράθυρα που να μειώνουν περαιτέρω την (6); Η απάντηση είναι όχι, λόγω της **αρχής αβεβαιότητας**:

$$\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Με άλλα λόγια, μια συνάρτηση δε μπορεί να «συγκεντρωθεί» ***ταυτόχρονα*** *σε μικρά σύνολα στο πεδίο χρόνου και συχνοτήτων όποια ανάλυση χρόνου/συχνότητας κι αν χρησιμοποιηθεί.*

Θεώρημα 4.2 *Εστω g είναι παραγωγίσιμη σ.π. στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\left(1+|x|\right)g(x) \in L_2(\mathbb{R})$ και $\left(1+|x|\right)g'(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Τότε*

$$\frac{1}{\|g\|_2\left\|\hat{g}\right\|_2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|xg(x)\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\gamma\hat{g}(\gamma)\right|^2d\gamma\right)^{1/2}\geq\frac{1}{4\pi}.$$

Με άλλα λόγια αν οι επικρατούσες τιμές των κατανομών $|g|^2/\|g\|_2^2$ *και* $\left|\hat{g}\right|^2/\left\|\hat{g}\right\|_2^2$ *είναι* $t_g^*=0$ *και* $t_{\hat{g}}^*=0$ *αντιστοίχως, τότε*

$$\Delta_g\Delta_{\hat{g}}\geq\frac{1}{4\pi}.$$

Απόδειξη. Απ' την υπόθεση βρίσκουμε ότι $g,g'\in L_1\cap L_2(\mathbb{R})$ και

$$\left(\Delta_g\Delta_{\hat{g}}\right)^2=\frac{\int_{\mathbb{R}}\left|xg(x)\right|^2dx\int_{\mathbb{R}}\left|\gamma\hat{g}(\gamma)\right|^2d\gamma}{\|g\|_2^2\left\|\hat{g}\right\|_2^2}$$

$$=\frac{\int_{\mathbb{R}}\left|xg(x)\right|^2dx\int_{\mathbb{R}}\left|g'(x)\right|^2dx}{4\pi^2\|g\|_2^4}$$

$$=\frac{\left\|xg(x)\right\|_2^2\left\|g'(x)\right\|_2^2}{4\pi^2\|g\|_2^4}\geq\frac{\left|\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}xg(x)\overline{g'(x)}dx\right|^2}{4\pi^2\|g\|_2^4}$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}x\frac{d}{dx}\left|g(x)\right|^2dx\right|^2}{4\pi^2\|g\|_2^4}=\frac{\left|x\left|g(x)\right|^2\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{\mathbb{R}}\left|g(x)\right|^2dx\right|^2}{16\pi^2\|g\|_2^4}$$

και επειδή $\left(x\left|g(x)\right|^2\right)'\in L_1\Rightarrow\lim_{|x|\to\infty}\left(x\left|g(x)\right|^2\right)=0$, άρα

$$\left(\Delta_g\Delta_{\hat{g}}\right)^2\geq\frac{\left(\int_{\mathbb{R}}\left|g(x)\right|^2dx\right)^2}{16\pi^2\|g\|_2^4}=\frac{1}{16\pi^2}\Rightarrow\Delta_g\Delta_{\hat{g}}\geq\frac{1}{4\pi}.\qquad\blacksquare$$

4.5 Διακριτοποίηση.

Οι παραπάνω συνεχείς αναπαραστάσεις χρόνου/συχνότητας δεν είναι πάντα τόσο χρήσιμες για πρακτικές εφαρμογές. Υπό μια έννοια, το θεώρημα αντιστροφής 4.2 παριστάνει μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της f με χρήση ενός υπεραριθμήσιμου συστήματος συναρτήσεων της μορφής

$$\left\{M_\gamma T_x h:\ (x,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Απ' την άλλη μεριά, εφόσον ο $L_2(\mathbb{R})$ είναι διαχωρίσιμος, μια αναπαράσταση με σειρά ως προς ένα αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων του παραπάνω συνόλου θα πρέπει να επαρκεί για να ανακατασκευάσει κάθε στοιχείο του $L_2(\mathbb{R})$. Για παράδειγμα αν το παράθυρο h έχει ουσιώδη φορέα σ' ένα σύνολο $E\subset\mathbb{R}^2$ στο πεδίο χρόνου/συχνότητας και αν (x_1,γ_1) και (x_2,γ_2) είναι δυο γειτονικά σημεία, τότε οι ουσιώδεις φορείς των συναρτήσεων $M_{\gamma_1}T_{x_1}h$ και $M_{\gamma_2}T_{x_2}h$, είναι σχεδόν οι ίδιοι και συνεπώς οι μετασχηματισμοί $V_h f(x_1,\gamma_1)$ και $V_h f(x_2,\gamma_2)$ μεταφέρουν παρόμοια πληροφορία. Θα προτιμούσαμε λοιπόν μια αναπαράσταση με χρήση αριθμησίμου πλήθους στοιχείων της μορφής $M_\gamma T_x h$ των οποίων οι ουσιώδεις φορείς ανά δυο να παρουσιάζουν όσο το δυνατόν μικρότερη τομή. Μια λογική προσπάθεια είναι να αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα στο Θεώρημα 4.2 από ένα άθροισμα Riemann του τύπου

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}V_g f(ak,bn)\,M_{bn}T_{ak}h$$

για κάποιες παραμέτρους $a,b>0$ που ελέγχουν το πόσο πυκνό είναι το πλέγμα που χρησιμοποιούμε. Μια άλλη πιο εξεζητημένη προσπάθεια είναι να αναζητήσουμε μια σειρά της μορφής

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{k,n}\,M_{bn}T_{ak}h\,,$$

όπου $\left\{c_{k,n}\right\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια ακολουθία μιγαδικών συντελεστών που θα πρέπει να προσδιορισθούν κατάλληλα ώστε να πετύχουμε ανακατασκευή για κάθε $f\in L_2(\mathbb{R})$. Ενας τρίτος τρόπος είναι να αναζητήσουμε μια πυκνή δειγματοληψία ώστε η νόρμα της

συνάρτησης να διατηρείται μέσω της διακριτοποίησης με την έννοια

$$A\|f\|_2^2 \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|V_h f(ak,bn)\right|^2 \le B\|f\|_2^2 \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}),$$

για κάποιες απόλυτες και θετικές σταθερές A και B. Τέτοιες σειρές καλούνται **σειρές Gabor**. Η μελέτη τέτοιων σειρών είναι πιο πολύπλοκη και εκφεύγει αυτών των σημειώσεων, παρ' όλα αυτά είναι πολύ πιο χρήσιμη για πρακτικές εφαρμογές σε σχέση με τους αντίστοιχους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς. Αναφέρουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.3 *Εστω g είναι παράθυρο στο χρόνο όπως παραπάνω, a,b θετικές παράμετροι και*

$$\mathcal{G}(g,a,b) = \left\{T_{ak}M_{bn}g : \ (k,n) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

είναι ένα σύστημα Gabor. Τότε:

Α) *Το σύστημα Gabor $\mathcal{G}(g,a,b)$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$ αν και μόνον αν:*

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|V_g f(ak,bn)\right|^2 = \|f\|_2^2 \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R})$, *$C$ σταθερά,*
- $\|g\|_2 = 1$,
- $\boxed{ab = 1}$.

Β) Αν

$$\boxed{ab > 1},$$

τότε το $\mathcal{G}(g,a,b)$ δεν είναι πλήρες σύστημα στον $L_2(\mathbb{R})$.

Γ) Το *$\mathcal{G}(g,a,b)$ είναι πλήρες σύστημα στον $L_2(\mathbb{R})$ αν και μόνον αν*

$$\boxed{ab < 1}.$$

Στην περίπτωση όμως κατά την οποία $ab = 1$, σημειώνουμε ότι ακόλουθο

Θεώρημα 4.4 (Balian-Low) *Εστω* $g \in L_2(\mathbb{R})$ *και το σύστημα Gabor*

$$\mathcal{G}(g,a,b) = \left\{ T_{ak} M_{bn} g : \ (k,n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

είναι ορθοκανονικό στον $L_2(\mathbb{R})$. *Τότε*

$$\int_{\mathbb{R}} \left| x g(x) \right|^2 dx = \infty \ \text{ ή } \int_{\mathbb{R}} \left| \gamma \hat{g}(\gamma) \right|^2 d\gamma = \infty .$$

Με άλλα λόγια, κάθε συνάρτηση g που «παράγει» ένα ορθοκανονικό σύστημα Gabor φθίνει «αργά» στο άπειρο είτε στο χρόνο είτε στις συχνότητες, άρα δε μπορεί να είναι ταυτόχρονα «καλό» παράθυρο και στο χρόνο και στις συχνότητες. Αντιθέτως, μπορούμε να κατασκευάσουμε ορθοκανονικές βάσεις **κυματιδίων** με καλή «τοπική» συμπεριφορά τόσο στο χρόνο όσο και στις συχνότητες.

4.6 Ο συνεχής μετασχηματισμός κυματιδίων.

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε ότι ένα μειονέκτημα του μετασχηματισμού Gabor (και γενικότερα του μετασχηματισμού Fourier βραχέος χρόνου), είναι ότι για κάθε ζεύγος (x,γ) <u>τόσο το μήκος όσο και το ύψος του παραθύρου χρόνου/συχνότητας παραμένει πάντα σταθερό</u>.

Εστω $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ είναι ένα παράθυρο στο χρόνο. Μια σημαντική ιδιότητα που μας δίνει τη δυνατότητα να κάνουμε το παράθυρο χρόνου/συχνότητας πιο ευέλικτο/προσαρμοστικό είναι να απαιτήσουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,dt = 0,$$

μια ιδιότητα την οποία δεν ικανοποιεί η συνάρτηση του Gauss (βλ. μετασχηματισμό Gabor).

Ορισμός 4.4 *Εστω $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ είναι παράθυρο στο χρόνο που ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη «επιλεξιμότητας»*

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\psi}(\gamma)\right|^2 / |\gamma|\,d\gamma < \infty. \tag{7}$$

*Στο εξής καλούμε μια τέτοια συνάρτηση **κυματίδιο** (**wavelet**). Τότε ο (συνεχής) μετασχηματισμός κυματιδίων ορίζεται πάνω στον $L_2(\mathbb{R})$ ως εξής:*

$$\left(W_\psi f\right)(b,a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt, \quad b,a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι εφόσον η ψ είναι παράθυρο στο χρόνο, ισχύει $\psi \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$, άρα η $\widehat{\psi}$ είναι συνεχής κι έτσι για να ισχύει η (7) θα πρέπει $\widehat{\psi}(0) = 0$ ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,dt = 0.$$

Λόγω (και) αυτής της σχέσης καλούμε την ψ κυματίδιο, αφού το γράφημα της ψ θα πρέπει αναγκαστικά να ταλαντεύεται

εκατέρωθεν του άξονα x′x και να «σβήνει» στο άπειρο. Θέτοντας

$$\psi_{b,a}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\left(W_\psi f\right)(b,a)=\left\langle f,\psi_{b,a}\right\rangle_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Ας μελετήσουμε τώρα το παράθυρο χρόνου που σχετίζεται με την ψ. Εστω t_ψ^* είναι το κέντρο και Δ_ψ είναι η ακτίνα του παραθύρου όπως στον ορισμό 4.1. Τότε το κέντρο και η ακτίνα της $\psi_{b,a}$ είναι

$$\boxed{t_{\psi_{b,a}}^*=b+at_\psi^*},\quad \boxed{\Delta_{\psi_{b,a}}=|a|\Delta_\psi}$$

αντιστοίχως. Κατά συνέπεια ο συνεχής μετασχηματισμόςκυματιδίων μας δίνει «τοπική» πληροφορία μιας συνάρτησης f στο χρόνο ως προς το παράθυρο

$$\left[b+at_\psi^*-|a|\Delta_\psi,b+at_\psi^*+|a|\Delta_\psi\right].$$

Για μικρές τιμές του $|a|$ το παράθυρο «στενεύει» ενώ για μεγάλες τιμές του $|a|$ το παράθυρο «απλώνεται». Απ' την άλλη μεριά έχουμε

$$\widehat{\psi_{b,a}}(\gamma)=|a|^{1/2}\widehat{\psi}(a\gamma)e^{-2\pi ib\gamma},$$

άρα

$$\left(W_\psi f\right)(b,a)=\left\langle f,\psi_{b,a}\right\rangle_{L_2(\mathbb{R})}=\left\langle \widehat{f},\widehat{\psi_{b,a}}\right\rangle_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$=|a|^{1/2}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\gamma)\overline{\widehat{\psi}(a\gamma)}e^{2\pi ib\gamma}d\gamma. \qquad (8)$$

Εστω $t_{\hat{\psi}}^*$ και $\Delta_{\hat{\psi}}$ είναι το κέντρο και η ακτίνα που σχετίζεται με την $\widehat{\psi}$ (προς στιγμή θεωρούμε ότι και η $\widehat{\psi}$ είναι παράθυρο). Αν

$$\hat{\eta}(\gamma):=\widehat{\psi}\left(\gamma+t_{\hat{\psi}}^*\right),$$

τότε η $\hat{\eta}$ έχει κέντρο το $t^*_{\hat{\eta}} = 0$, ακτίνα $\Delta_{\hat{\eta}} = \Delta_{\hat{\psi}}$ και η (8) γράφεται ως

$$\left(W_\psi f\right)(b,a) = |a|^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{\eta}\left(a\left(\gamma - \frac{t^*_{\hat{\psi}}}{a}\right)\right)} e^{2\pi i b\gamma} d\gamma .$$

Αλλά η $\hat{\eta}\left(a\left(\gamma - \frac{t^*_{\hat{\psi}}}{a}\right)\right) = \hat{\psi}(a\gamma)$ έχει ακτίνα $\frac{1}{|a|}\Delta_{\hat{\psi}}$, άρα η παραπάνω σχέση μας δίνει «τοπική» πληροφορία της συνάρτησης f στη συχνότητα γ ως προς το παράθυρο

$$\left[\frac{t^*_{\hat{\psi}}}{|a|} - \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{|a|},\ \frac{t^*_{\hat{\psi}}}{|a|} + \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{|a|}\right],$$

κέντρου $\frac{t^*_{\hat{\psi}}}{|a|}$ και ύψους $2\frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{|a|}$. Παρατηρούμε ότι ο λόγος

$$\frac{\kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o}{\acute{\upsilon}\psi o\varsigma} = \frac{t^*_{\hat{\psi}}}{\Delta_{\hat{\psi}}}$$

είναι ανεξάρτητος της παραμέτρου a. Αν θεωρήσουμε $\gamma = \frac{t^*_{\hat{\psi}}}{a}$ και $x = b + at^*_\psi$, τότε το (b,a)-πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ως πεδίο χρόνου/συχνότητας (x,γ) με παράθυρο

$$I_{x,\gamma} = \left[x - a\Delta_\psi, x + a\Delta_\psi\right] \times \left[\gamma - \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a},\ \gamma + \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a}\right]$$

σταθερού μεν εμβαδού

$$\left|I_{x,\gamma}\right| = \left(2|a|\Delta_\psi\right)\left(2\frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{|a|}\right) = 4\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$$

αλλά *προσαρμοστικού* δε, με την έννοια ότι όταν το $I_{x,\gamma}$ «στενεύει» στο χρόνο «απλώνεται» στις συχνότητες για να εντοπίσει και φαινόμενα υψηλού συχνοτικού περιεχομένου, ενώ όταν «απλώνε-

ται» στο χρόνο «στενεύει» στις συχνότητες για να αναλύσει καλύτερα φαινόμενα χαμηλού συχνοτικού περιεχομένου.

Πρόταση 4.2 *Εστω* $f,g \in L_2(\mathbb{R})$, ψ *είναι ένα κυματίδιο και* C_ψ *είναι σταθερά όπως στον ορισμό 4.4. Τότε*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(b,a)\overline{W_\psi g(b,a)}\frac{dbda}{a^2} = C_\psi \langle f,g \rangle .$$

Απόδειξη. $\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(b,a)\overline{W_\psi g(b,a)}db = \int_{\mathbb{R}} \langle f,\psi_{b,a} \rangle \overline{\langle f,\psi_{b,a} \rangle} db$

$= |a| \int_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{f}, \widehat{\psi}(a\cdot)e^{-2\pi i b\cdot} \right\rangle \overline{\left\langle \hat{g}, \widehat{\psi}(a\cdot)e^{-2\pi i b\cdot} \right\rangle} db$ (ορισμός μετασχ. Fourier)

$= |a| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\hat{f}(\cdot)\overline{\widehat{\psi}}(a\cdot)}(b)\ \overline{\widehat{\hat{g}(\cdot)\overline{\widehat{\psi}}(a\cdot)}}(b) db$ (Parseval)

$= |a| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma)\overline{\widehat{\psi}}(a\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)\overline{\widehat{\psi}}(a\gamma)}\, d\gamma .$

Αρα:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(b,a)\overline{W_\psi g(b,a)}\frac{dbda}{a^2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}}(\gamma)\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{\psi}(a\gamma)\right|^2}{|a|} da \right) d\gamma$$

$$= C_\psi \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}}(\gamma) d\gamma = C_\psi \langle f,g \rangle . \qquad \blacksquare$$

Πόρισμα 4.2 *Εστω* $f \in L_2(\mathbb{R})$, ψ *είναι ένα κυματίδιο και* C_ψ *είναι σταθερά όπως παραπάνω. Τότε*

$$\left\| W_\psi f \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = C_\psi^{1/2} \left\| f \right\|_{L_2(\mathbb{R})} .$$

Απόδειξη. Αμεση από την Πρόταση 4.2. $\blacksquare$

Θεώρημα 4.5 (Αντιστροφής) *Εστω* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *και* ψ *είναι ένα κυματίδιο με σταθερά* C_ψ. *Τότε για κάθε* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *έχουμε*

$$f(\bullet)=\frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(b,a)\psi\left(\frac{\bullet-b}{a}\right)\frac{dbda}{a^2},$$

όπου η σύγκλιση είναι ασθενής.

Απόδειξη. Εστω $f\in L_2(\mathbb{R})$. Για κάθε $g\in L_2(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{C_\psi}\iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(b,a)\overline{W_\psi g(b,a)}\frac{dbda}{a^2}$$

λόγω της Πρότασης 4.2. Η παραπάνω γράφεται ως

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{C_\psi}\iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(b,a)\overline{\langle g,\psi_{b,a}\rangle}\frac{dbda}{a^2} \qquad .$$

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{C_\psi}\iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(b,a)\langle \psi_{b,a},g\rangle\frac{dbda}{a^2}$$

$$\langle f,g\rangle=\left\langle \frac{1}{C_\psi}\iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(b,a)\psi_{b,a}(\bullet)\frac{dbda}{a^2},\ g\right\rangle.$$

Αρα

$$f(\bullet)=\frac{1}{C_\psi}\iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(b,a)\psi_{b,a}(\bullet)\frac{dbda}{a^2}. \qquad \blacksquare$$

Σημείωση. (α) Το θεώρημα αντιστροφής ισχύει και με την ισχυρότερη L_2-έννοια, δηλαδή

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ B,C\to+\infty}}\left\| f-\frac{1}{C_\psi}\iint_{\substack{A\le|a|\le B\\ |b|\le C}} W_\psi f(b,a)\psi_{b,a}(\bullet)\frac{dbda}{a^2}\right\|_{L_2(\mathbb{R})}=0.$$

(β) Στον τύπο ανακατασκευής μπορούμε υπό κατάλληλες συνθήκες να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό κυματίδιο (βλέπε ασκήσεις).

(γ) Μπορούμε να περιορισθούμε μόνον σε $a>0$. Σ' αυτή την περίπτωση απαιτούμε

$$\int_0^\infty \left|\widehat{\psi}(\gamma)\right|^2 / |\gamma| d\gamma = \int_{-\infty}^0 \left|\widehat{\psi}(\gamma)\right|^2 / |\gamma| d\gamma = \frac{C_\psi}{2} < \infty .$$

Τότε

$$f(\bullet) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(b,a) \psi_{b,a}(\bullet) db . \tag{9}$$

Πρόταση 4.3 *Εστω* ψ *τέτοια ώστε* $(1+|x|)\psi(x) \in L_1(\mathbb{R})$ *και* $\widehat{\psi}(0) = 0$. *Αν* f *είναι φραγμένη συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha ,\ 0 < \alpha \le 1,$$

τότε

$$|W_\psi f(b,a)| \le C'|a|^{1/2+\alpha} .$$

Απόδειξη. Εφόσον $\widehat{\psi}(0) = 0 = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx$ έχουμε

$$|W_\psi f(b,a)| = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \right| = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(b)) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \right|$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(b)| \left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right| dt \le \frac{C}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} |t-b|^\alpha \left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right| dt$$

$$= \frac{C}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} |t|^\alpha \left|\psi\left(\frac{t}{a}\right)\right| dt \le \frac{C|a|^{1+\alpha}}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} |\tau|^\alpha |\psi(\tau)| d\tau$$

$$= C\|t\psi\|_{L_1} |a|^{1/2+\alpha} = C'|a|^{1/2+\alpha} . \qquad \blacksquare$$

Για το αντίστροφο έχουμε:

Πρόταση 4.4 *Εστω* ψ *έχει συμπαγή φορέα και* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *είναι συνεχής και φραγμένη συνάρτηση. Αν για κάποιο* $\alpha \in (0,1)$ *ο μετασχηματισμός* $W_\psi f$ *ικανοποιεί την ανισότητα*

$$|W_\psi f(b,a)| \le C'|a|^{1/2+\alpha} ,$$

τότε η f είναι $\alpha-$Holder.

Με άλλα λόγια μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το δείκτη Holder μιας συνάρτησης f μέσω της φθίσης του μέτρου του μετασχηματισμού κυματιδίων αυτής ως προς τη μεταβλητή a.

4.7 Διακριτοποίηση.

Όπως και στο μετασχηματισμό Fourier βραχέος χρόνου έτσι και στο μετασχηματισμό κυματιδίων οι συνεχείς αναπαραστάσεις δεν είναι πάντα τόσο χρήσιμες για πρακτικές εφαρμογές. Στην περίπτωση των κυματιδίων το θεώρημα αντιστροφής 4.5 παριστάνει μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της f με χρήση ενός υπεραριθμήσιμου συστήματος συναρτήσεων της μορφής

$$\left\{T_b D_{1/a}\psi :\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\},$$

όπου $D_a f = |a|^{1/2} f(a\cdot),\ a>0$ είναι ο συνήθης τελεστής διαστολής και $T_b f = f(\cdot - b)$ είναι τελεστής μετάθεσης. Για να περιοριστούμε σε διακριτές τιμές, εφόσον η μεταβλητή a αντιστοιχεί σε διαστολή είναι λογικό να θεωρήσουμε $a = a_0^j,\ j\in\mathbb{Z}$ για κάποιο $a_0>1$ (αν και αυτό δεν είναι απαραίτητα αφού $j\in\mathbb{Z}$). Για $j=0$, εφόσον η μεταβλητή b αντιστοιχεί σε μετάθεση είναι λογικό να θεωρήσουμε $b = kb_0,\ k\in\mathbb{Z}$ για κάποιο $b_0>0$ έτσι ώστε οι μεταθέσεις $\psi(\cdot - kb_0)$ να καλύπτουν όλο το $\mathbb{R}$. Για $j\neq 0$, εφόσον ο ουσιώδης φορέας της $\psi\left(a_0^{-j}x\right)$ ισούται με a_0^j-φορές τον ουσιώδη φορέα της ψ θεωρούμε $b = kb_0 a_0^j,\ k\in\mathbb{Z}$ έτσι ώστε όλες οι $b-$μεταθέσεις της $\psi\left(a_0^{-j}\cdot\right)$ να καλύπτουν όλο το $\mathbb{R}$. Θεωρούμε λοιπόν

$$\begin{cases} a = a_0^j \\ b = kb_0 a_0^j \end{cases},\ a_0>1,\ b_0>0$$

και ορίζουμε την οικογένεια συναρτήσεων

$$\Psi^{b_0,a_0} = \left\{\psi_{j,k}^{b_0,a_0} = \psi_{kb_0a_0^j,a_0^{-j}} = a_0^{-j/2}\psi\left(a_0^{-j}\cdot - kb_0\right),\ j,k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Η επιλογή των παραμέτρων $a_0>1,\ b_0>0$ εξαρτάται από το κυματίδιο ψ. Στην παράγραφο αυτή μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε κυματίδια ψ, έτσι ώστε για κάποια επιλογή του ζεύγου (b_0,a_0) παραμέτρων, η οικογένεια Ψ^{b_0,a_0} να αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$ και συνεπώς κάθε συνάρτηση $f\in L_2(\mathbb{R})$ να

ανακατασκευάζεται μέσω του τύπου

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle f, \psi_{j,k}^{b_0,a_0} \right\rangle \psi_{j,k}^{b_0,a_0}$$

τουλάχιστον με την L_2-έννοια. Σημειώνουμε ότι δεν προκύπτει ορθοκανονική βάση για οποιαδήποτε επιλογή των παραμέτρων (b_0, a_0). Το πρόβλημα γίνεται πιο απλό αν θεωρήσουμε την «βολικότερη» επιλογή $a_0 = 2$, διότι μ' αυτή την επιλογή έχουμε

$$a = 2^{-j},\ j \in \mathbb{Z},$$

κι έτσι κάθε διαστολή κατά 2 ή ½ αντιστοιχεί σε υποδιπλασιασμό ή διπλασιασμό του προηγούμενου βήματος μετάθεσης. Ενας άλλος λόγος είναι ότι τέτοιες τιμές του a αντιστοιχούν σε δυαδικές μπάντες συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην πράξη. Για απλότητα θεωρούμε $b_0 = 1$ κι έτσι ορίζουμε

$$\Psi = \left\{ \psi_{j,k} = \psi_{j,k}^{1,2} = 2^{-j/2} \psi\left(2^{-j} \cdot -k\right),\ j,k \in \mathbb{Z} \right\}$$

και επιδιώκουμε να κατασκευάσουμε συνάρτηση ψ τέτοια ώστε το σύνολο Ψ να είναι ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$.

Πρόταση 4.3 *Εστω Ψ είναι μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$. Τότε:*

$$\int_0^{\infty} \frac{\left|\widehat{\psi}(\gamma)\right|^2}{|\gamma|} d\gamma = \int_{-\infty}^{0} \frac{\left|\widehat{\psi}(\gamma)\right|^2}{|\gamma|} d\gamma = 2\ln 2.$$

Η Πρόταση 4.3 μας δίνει μια αναγκαία συνθήκη ορθοκανονικότητας:

Η συνάρτηση ψ θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη επιλεξιμότητας (7), άρα θα πρέπει να είναι κυματίδιο.

Η κατασκευή μιας μεγάλης γκάμας ορθοκανονικών κυματιδίων επιτυγχάνεται μέσω της πολυδιακριτής ανάλυσης.

4.8 Πολυδιακριτή Ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$.

Ορισμός 4.5 *Καλούμε πολυδιακριτή ανάλυση του* $L_2(\mathbb{R})$ *μια «διατεταγμένη» ακολουθία*

$$\ldots \subset V_N \subset \ldots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \ldots \subset V_{-N} \subset \ldots, \quad (N \in \mathbb{N})$$

κλειστών υπόχωρων του $L_2(\mathbb{R})$ *έτσι ώστε:*

(1) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$.

(2) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

(3) $f \in V_j \Leftrightarrow f\left(2^j \cdot\right) \in V_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

(4) *Υπάρχει συνάρτηση* $\phi \in V_0$ *που καλείται* ***κλιμακωτή*** *συνάρτηση τέτοια ώστε το σύνολο* $\{\phi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ *να αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου* V_0.

Εστω ότι υπάρχει $\phi \in V_0$ όπως στην (4) του παραπάνω ορισμού. Ορίζουμε

$$\phi_{j,k} = 2^{-j/2}\phi\left(2^{-j} \cdot - k\right), \; j,k \in \mathbb{Z}.$$

Τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι για κάθε $j \in \mathbb{Z}$, το σύνολο

$$\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V_j. Πράγματι λόγω της (3) του ορισμού 4.5 έχουμε

$$f \in V_j \Leftrightarrow f\left(2^j \cdot\right) \in V_0$$

$$\Rightarrow f\left(2^j \cdot\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f\left(2^j \cdot\right), \phi(\cdot - k)\right\rangle \phi(\cdot - k)$$

$$\Rightarrow f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f\left(2^j \cdot\right), \phi(\cdot - k)\right\rangle \phi\left(2^{-j} \cdot - k\right)$$

$$\Rightarrow f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \left\langle f, \phi\left(2^{-j}\cdot - k\right)\right\rangle \phi\left(2^{-j}\cdot - k\right)$$

$$\Rightarrow f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \phi_{j,k}\right\rangle \phi_{j,k}$$

και

$$\left\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l}\right\rangle = \left\langle \phi_{0,k}, \phi_{0,l}\right\rangle = \delta_{k,l}\,.$$

Παράδειγμα Εστω $\phi = \chi_{[0,1)}$. Τότε οι υπόχωροι

$$V_j = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : f = (\text{σταθερά})_j \ \ \forall x \in \chi_{\left[2^j k,\ 2^j(k+1)\right)} \right\}$$

αποτελούν μια πολυδιακριτή ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$ που καλείται πολυδιακριτή ανάλυση του Haar.

Θεώρημα 4.6 *Σε κάθε πολυδιακριτή ανάλυση* $\left\{V_j :\ V_j \subset V_{j+1}\right\}$ *του* $L_2(\mathbb{R})$ *αντιστοιχεί μια ορθοκανονική βάση*

$$\left\{\psi_{j,k} = 2^{-j/2}\psi\left(2^{-j}\cdot - k\right),\ j,k \in \mathbb{Z}\right\}$$

του $L_2(\mathbb{R})$ *η οποία παράγεται από διαστολές και μεταθέσεις ενός (όχι κατ' ανάγκη μοναδικού) κυματιδίου* $\psi \in V_{-1}$ *έτσι ώστε για κάθε* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *να ισχύει*

$$P_{j-1} f = P_j f + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \psi_{j,k}\right\rangle \psi_{j,k}\,, \tag{10}$$

όπου $P_j f$ *είναι η ορθογώνια προβολή της* f *στον υποχώρο* V_j *της πολυδιακριτής ανάλυσης. Το κυματίδιο* ψ *υπολογίζεται από τη σχέση*

$$\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \left\langle \phi,\ \phi_{-1,k-1}\right\rangle \phi_{-1,k}\,,$$

όπου ϕ *είναι η κλιμακωτή συνάρτηση της πολυδιακριτής ανάλυσης.*

Απόδειξη. Για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε μια ακολουθία (κλειστών) υποχώρων $\left\{W_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ έτσι ώστε ο W_j να είναι το ορθογώνιο συμπλή-

ρωμα του υποχώρου V_j στον υπόχωρο V_{j-1}. Δηλαδή

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j . \tag{11}$$

Επειδή

$$W_{j-1} \perp V_{j-1} \supset V_j \perp W_j$$

προκύπτει ότι

$$W_{j-1} \perp W_j \quad \forall j .$$

Απ' την άλλη μεριά, εφόσον εξ υποθέσεως έχουμε $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$ και $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, από τη (11) για N, M αρκούντως μεγάλα παίρνουμε

$$V_{-N-1} = V_{-N} \oplus W_{-N} = \left(V_{-N+1} \oplus W_{-N+1}\right) \oplus W_{-N}$$

$$= \left(V_{-N+2} \oplus W_{-N+2}\right) \oplus W_{-N+1} \oplus W_{-N} = \ldots$$

$$= V_M \oplus_{j=M}^{-N} W_j ,$$

συνεπώς για $N, M \to +\infty$ παίρνουμε

$$L_2(\mathbb{R}) = \oplus_{j=-\infty}^{-\infty} W_j . \tag{12}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (10) και (11) διαπιστώνουμε ότι για να ισχύει η (10) πρέπει και αρκεί να υπάρχει οικογένεια $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ που να αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου W_j. Τότε λόγω της (12) η οικογένεια $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ θα αποτελεί και μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$. Απ' την άλλη μεριά κάθε χώρος W_j ανήκει στον V_{j-1} και επομένως λόγω της (3) του ορισμού 4.5 θα ισχύει

$$f \in W_j \Leftrightarrow f\left(2^j \cdot\right) \in W_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} .$$

Συνεπώς (και με βάση τα παραπάνω) για να είναι η οικογένεια $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ ορθοκανονική βάση του W_j αρκεί να υπάρχει μια συνάρτηση $\psi \in V_{-1}$ τέτοια ώστε το σύνολο

$$\left\{\psi_{0,k} = \psi\left(\cdot - k\right):\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

να αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου W_0. Ετσι λοιπόν το πρόβλημά μας ανάγεται στην εύρεση μιας τέτοιας συνάρτησης $\psi \in V_{-1}$ οι ακέραιες μεταθέσεις της οποίας αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του χώρου W_0. Για την εύρεσή της εργαζόμαστε ως εξής:

Εστω ϕ είναι κλιμακωτή συνάρτηση οι ακέραιες μεταθέσεις της οποίας αποτελούν μια βάση του υποχώρου V_0 όπως στην (4) του ορισμού 4.5. Εφόσον $V_0 \subset V_{-1}$ έχουμε

$$\phi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle \phi, \phi_{-1,n} \right\rangle \phi_{-1,n} \tag{13}$$

με την L_2 – έννοια. Σημειώνουμε εδώ ότι

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \left\langle \phi, \phi_{-1,n} \right\rangle \right|^2 = 1, \tag{14}$$

ως άμεση εφαρμογή της ταυτότητας Parseval και της ορθοκανονικότητας της ϕ. Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier και στα δυο μέλη της (13) έχουμε

$$\hat{\phi}(\gamma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle \phi, \phi_{-1,n} \right\rangle \widehat{\phi_{-1,n}}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle \phi, \phi_{-1,n} \right\rangle e^{-2\pi i n \frac{\gamma}{2}}}_{m_0(\gamma/2)} \hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(\gamma) = m_0\left(\frac{\gamma}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \tag{15}$$

όπου

$$m_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle \phi, \phi_{-1,n} \right\rangle e^{-2\pi i n \gamma}$$

είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη 1-περιοδική συνάρτηση. Επιπλέον η m_0 ικανοποιεί την κάτωθι ιδιότητα

$$\left| m_0(\gamma) \right|^2 + \left| m_0\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1, \text{ σ.π. στο } [0,1) \tag{16}$$

συνεπεία του γεγονότος ότι το σύνολο $\{\phi(\cdot - n):\ n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονικό. Πράγματι,

$$\delta_{0,k} = \langle \phi_{0,0}, \phi_{0,k} \rangle = \langle \phi, \phi(\cdot - k) \rangle = \langle \hat{\phi}, \hat{\phi} e^{-2\pi i k \cdot} \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\phi}(\gamma) \right|^2 e^{2\pi i k \gamma} d\gamma = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \left| \hat{\phi}(\gamma) \right|^2 e^{2\pi i k \gamma} d\gamma$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \left| \hat{\phi}(\gamma + n) \right|^2 e^{2\pi i k \gamma} d\gamma$$

$$= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\gamma + n) \right|^2 e^{2\pi i k \gamma} d\gamma \text{ (μονότονη σύγκλιση).}$$

Από την τελευταία ισότητα συνάγουμε ότι συντελεστές Fourier της 1-περιοδικής και ολοκληρώσιμης συνάρτησης $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\gamma + n) \right|^2$ είναι ίσοι με $\delta_{0,k}$. Απ' την άλλη μεριά και οι συντελεστές Fourier της 1-περιοδικής συνάρτησης $g = \chi_{[0,1)}$ είναι ίσοι με $\delta_{0,k}$. Από το θεώρημα μοναδικότητας των σειρών Fourier προκύπτει ότι

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\gamma + n) \right|^2 = 1 \text{ σ.π. στο } [0,1). \tag{17}$$

Συνδυάζουμε τώρα τις σχέσεις (14), (15) και (17) και έχουμε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\gamma + n) \right|^2 = 1 \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\gamma + n}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\gamma + n}{2}\right) \right|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\gamma + 2n}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\gamma + 2n}{2}\right) \right|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\gamma + 2n + 1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\gamma + 2n + 1}{2}\right) \right|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| m_0\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2} + n\right) \right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\gamma + 1}{2} + n\right) \right|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| m_0\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) \right|^2 = 1 \text{ σ.π. στο } [0,1).$$

Απ' την τελευταία προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής η (16). Απ' την άλλη μεριά έστω $f \in W_0$. Τότε πάλι $W_0 \subset V_{-1}$ οπότε

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \phi_{-1,n} \right\rangle \phi_{-1,n} \tag{18}$$

με την $L_2 -$έννοια. Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier και στα δυο μέλη της (18) έχουμε

$$\widehat{f}(\gamma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \phi_{-1,n} \right\rangle \widehat{f_{-1,n}}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \phi_{-1,n} \right\rangle e^{-2\pi i n \frac{\gamma}{2}}}_{m_f(\gamma/2)} \hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \widehat{f}(\gamma) = m_f\left(\frac{\gamma}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \tag{19}$$

όπου

$$m_f(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \phi_{-1,n} \right\rangle e^{-2\pi i n \gamma}$$

είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη 1-περιοδική συνάρτηση. Επιπλέον η m_f ικανοποιεί την κάτωθι ιδιότητα

$$m_f(\gamma)\overline{m_0(\gamma)} + m_f\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\overline{m_0\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)} = 0, \text{ σ.π. στο } [0,1) \tag{20}$$

συνεπεία του γεγονότος ότι $f \in W_0 \perp V_0$. Πράγματι,

$$0 = \left\langle f, \phi_{0,k} \right\rangle = \left\langle f, \phi(\cdot - k) \right\rangle = \left\langle \widehat{f}, \hat{\phi} e^{-2\pi i k \cdot} \right\rangle$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \widehat{f}(\gamma + n) \overline{\hat{\phi}(\gamma + n)} e^{2\pi i k \gamma} d\gamma$$

$$= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\gamma + n) \overline{\hat{\phi}(\gamma + n)} e^{2\pi i k \gamma} d\gamma \text{ (φραγμένη σύγκλιση).}$$

Από την τελευταία ισότητα συνάγουμε ότι συντελεστές Fourier της 1-περιοδικής και ολοκληρώσιμης συνάρτησης $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\gamma + n) \overline{\hat{\phi}(\gamma + n)}$ είναι ίσοι με 0, άρα αναγκαστικά

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\gamma+n)\overline{\hat{\phi}(\gamma+n)} = 0 \text{ σ.π. στο } [0,1).$$

Συνδυάζοντας με τη (19) και την (16) παίρνουμε

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\gamma+n)\overline{\hat{\phi}(\gamma+n)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_f\left(\frac{\gamma+n}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\gamma+n}{2}\right)}\left|\hat{\phi}\left(\frac{\gamma+n}{2}\right)\right|^2 = 0$$

και αναλύοντας το άθροισμα σε άρτιους και περιττούς όρους υπολογίζουμε

$$m_f\left(\frac{\gamma}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}+n\right)\right|^2 + m_f\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}\left(\frac{\gamma+1}{2}+n\right)\right|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m_f\left(\frac{\gamma}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)} + m_f\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} = 0,$$

συνεπώς με αλλαγή μεταβλητής προκύπτει η (20). Λόγω της (16), οι συναρτήσεις m_0 και $m_0\left(\cdot+\frac{1}{2}\right)$ δεν μπορούν να μηδενισθούν ταυτόχρονα σ' ένα σύνολο θετικού μέτρου. Αρα αναγκαστικά θα υπάρχει μια 1-περιοδική συνάρτηση λ τέτοια ώστε

$$m_f(\gamma) = \lambda(\gamma)\overline{m_0\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)} \text{ σ.π. στο } [0,1)$$

και

$$\lambda(\gamma) + \lambda\left(\gamma+\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ σ.π. στο } [0,1). \qquad (21)$$

Προφανώς η επιλογή

$$\lambda(\gamma) = e^{2\pi i\gamma}\nu(2\gamma)$$

όπου $\nu(2\gamma)$ είναι οποιαδήποτε 1-περιοδική συνάρτηση ικανοποιεί τη συνθήκη (21), οπότε

$$m_f(\gamma) = e^{2\pi i\gamma}\nu(2\gamma)\overline{m_0\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}$$

και αντικαθιστώντας στη (19) παίρνουμε

$$\widehat{f}(\gamma)=m_f\left(\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}\right)=e^{\pi i\gamma}v(\gamma)\overline{m_0\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \qquad (22)$$

για κάθε $f\in W_0$. Η παραπάνω υπονοεί να θεωρήσουμε την

$$\widehat{\psi}(\gamma)=e^{\pi i\gamma}\overline{m_0\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \qquad (23)$$

ως υποψήφιο κυματίδιο. Μ' αυτή την επιλογή τουλάχιστον φορμαλιστικά, αντικαθιστώντας στην (22) έχουμε

$$\widehat{f}(\gamma)=v(\gamma)\widehat{\psi}(\gamma)=\left(\sum_k\widehat{v_k}e^{2\pi ik\gamma}\right)\widehat{\psi}(\gamma),$$

άρα

$$f=\sum_k\widehat{v_k}e^{2\pi ik\gamma}\psi(\cdot-k)$$

και το σύνολο $\{\psi(\cdot-k):\ k\in\mathbb{Z}\}$ είναι υποψήφιο για τη βάση που ψάχνουμε. Αρκεί να δείξουμε ότι $v\in L_2[0,1)$ και $\{\psi(\cdot-k):\ k\in\mathbb{Z}\}$ ορθοκανονικό σύνολο. Για το πρώτο έχουμε

$$\|v\|_2^2=2\int_0^{1/2}|\lambda(\gamma)|^2\,d\gamma=2\int_0^{1/2}|\lambda(\gamma)|^2\left(|m_0(\gamma)|^2+\left|m_0\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\right|^2\right)d\gamma \text{ (λόγω (16))}$$

$$=4\int_0^{1/2}\left|\lambda(\gamma)m_0\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\right|^2d\gamma=4\int_0^{1/2}|m_f(\gamma)|^2\,d\gamma\le 4\|m_f\|_2^2<\infty.$$

Τέλος:

$$\langle\psi,\psi(\cdot-k)\rangle=\langle\widehat{\psi},\widehat{\psi}e^{-2\pi ik\cdot}\rangle=\ldots=\int_0^1\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\psi}(\gamma+n)\right|^2e^{2\pi ik\gamma}d\gamma. \qquad (24)$$

Αλλά από την (23) έχουμε

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\psi}(\gamma+n)\right|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|m_0\left(\frac{\gamma+n+1}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\gamma+n}{2}\right)\right|^2$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|m_0\left(\frac{\gamma+2n+1}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\gamma+2n}{2}\right)\right|^2+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|m_0\left(\frac{\gamma+2n+2}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\gamma+2n+1}{2}\right)\right|^2$$

$$=\left|m_0\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right|^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}+n\right)\right|^2+\left|m_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right|^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}\left(\frac{\gamma+1}{2}+n\right)\right|^2$$

$$=\left|m_0\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right|^2+\left|m_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right|^2=1 \text{ σ.π. στο } [0,1). \tag{25}$$

Αντικαθιστώντας την (25) στην (24) προκύπτει το ζητούμενο. Τελικά

$$\hat{\psi}(\gamma)=e^{\pi i\gamma}\overline{m_0\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

ή ισοδύναμα στο χρόνο

$$\psi=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{k-1}\langle\phi,\ \phi_{-1,k-1}\rangle\phi_{-1,k}\ . \qquad \blacksquare$$

Παρατηρήσεις.

(α) Το θεώρημα μπορεί να γενικευθεί και για την περίπτωση όπου η οικογένεια κυματιδίων δεν είναι ορθοκανονική βάση αλλά Riesz βάση ή πλαίσιο (frame) στον $L_2(\mathbb{R})$.

(β) Υπάρχουν ορθοκανονικές βάσεις κυματιδίων που **δεν** παράγονται από πολυδιακριτή ανάλυση.

(γ) Αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε συνάρτηση $\phi\in L_2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

- $\hat{\phi}\in L_\infty(\mathbb{R})$ με $\hat{\phi}(0)\neq 0$,
- $\sum_n\left|\hat{\phi}(\gamma+n)\right|^2>A>0$ και
- $\phi=\sum_n c_n\phi_{-1,n}$

παράγει μια πολυδιακριτή ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$.

(δ) Η πολυδιακριτή ανάλυση οδηγεί με φυσικό τρόπο σ' ένα

«ιεραρχικό» και «γρήγορο» μοντέλο υπολογισμού των κυματιδιακών συντελεστών $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$. Πράγματι, έστω

$$h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \text{ και } g_n = \langle \psi, \phi_{-1,n} \rangle .$$

Τότε από τα παραπάνω έχουμε

$$g_n = (-1)^n h_{1-n} ,$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(x) &= 2^{-j/2} \psi\left(2^{-j} x - k\right) \\ &= 2^{-j/2} \sum_n g_n 2^{1/2} \phi\left(2^{-j+1} x - 2k - n\right) \\ &= \sum_n \overline{g_{n-2k}} \phi_{j-1,n} . \end{aligned}$$

Ετσι για $j = 1$ έχουμε

$$\langle f, \psi_{1,k} \rangle = \sum_n g_{n-2k} \langle f, \phi_{0,n} \rangle ,$$

δηλαδή η ακολουθία $\{\langle f, \psi_{1,k} \rangle : k \in \mathbb{Z}\}$ προκύπτει από τη συνέλιξη της $\{\langle f, \phi_{0,k} \rangle : k \in \mathbb{Z}\}$ με τη $\{g_{-n} : n \in \mathbb{Z}\}$ κρατώντας μόνον τους ζυγούς δείκτες. Ομοίως:

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_n \overline{g_{n-2k}} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \tag{26}$$

υπό την προϋπόθεση ότι η ακολουθία $\{\langle f, \phi_{j-1,n} \rangle : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι γνωστή. Αλλά με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω δείχνουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(x) &= 2^{-j/2} \phi\left(2^{-j} x - k\right) \\ &= 2^{-j/2} \sum_n h_n 2^{1/2} \phi\left(2^{-j+1} x - 2k - n\right) \\ &= \sum_n \overline{h_{n-2k}} \phi_{j-1,n} . \end{aligned}$$

Γενικεύοντας:

$$\left\langle f,\phi_{j,k}\right\rangle = \sum_n \overline{h_{n-2k}}\left\langle f,\phi_{j-1,n}\right\rangle. \tag{27}$$

Η διαδικασία τώρα είναι απλή:

Ξεκινώντας από την ακολουθία $\left\{\left\langle f,\phi_{0,n}\right\rangle:\ n\in\mathbb{Z}\right\}$ στο 1ο επίπεδο/ βήμα υπολογίζουμε τους συντελεστές

$$\left\{\left\langle f,\phi_{1,n}\right\rangle:\ n\in\mathbb{Z}\right\} \text{ και } \left\{\left\langle f,\psi_{1,n}\right\rangle:\ n\in\mathbb{Z}\right\}$$

από τις (26) και (27) και συνεχίζουμε αναδρομικά πάλι μέσω των (26) και (27) υπολογίζοντας τους συντελεστές

$$\left\{\left\langle f,\phi_{j,n}\right\rangle:\ n\in\mathbb{Z}\right\} \text{ και } \left\{\left\langle f,\psi_{j,n}\right\rangle:\ n\in\mathbb{Z}\right\}$$

στο j-επίπεδο/βήμα. Η συνολική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως ο υπολογισμός διαδοχικών προσεγγίσεων της συνάρτησης f μαζί με τη «λεπτομέρεια» μεταξύ των διαδοχικών προσεγγίσεων. Στην πράξη ξεκινούμε από μια ικανοποιητική προσέγγιση f_N της f που αντιστοιχεί σ' έναν υπόχωρο V_{-N} της πολυδιακριτής ανάλυσης Στο 1ο βήμα αναλύουμε

$$f_N = f^0_{N-1} + f^1_{N-1},\ \left(f^0_{N-1}\in V_{-N+1}, f^1_{N-1}\in W_{-N+1}\right)$$

όπου f^0_{N-1} είναι μια λιγότερο καλή προσέγγιση της f και f^1_{N-1} είναι η «λεπτομέρεια» που χάνεται κατά την μετάβαση από την προσέγγιση f_N στη λιγότερο καλή προσέγγιση f^0_{N-1}. Οι φόρμουλες (26) και (27) δίνουν τον τρόπο υπολογισμού των συντελεστών κυματιδίων των f^0_{N-1} και f^1_{N-1}. Στη συνέχεια συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Για την ανακατασκευή ακολουθούμε την αντίστροφη διαδικασία.

Παραδείγματα.

1. Η πολυδιακριτή ανάλυση του Haar.

Παράγεται από την κλιμακωτή συνάρτηση

$$\phi = \chi_{[0,1)}.$$

Το κυματίδιο Haar είναι

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1/2 \\ -1 & 1/2 < x < 1 \end{cases}.$$

2. Η πολυδιακριτή ανάλυση του Shannon.

Παράγεται από την κλιμακωτή συνάρτηση

$$\phi(x) = \frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x}.$$

Το κυματίδιο Shannon ορίζεται μέσω του μετασχηματισμού Fourier από τη σχέση

$$\hat{\psi}(\gamma) = \begin{cases} 1, & 1/2 \le |\gamma| < 1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}.$$

3. Η πολυδιακριτή ανάλυση του Meyer.

Είναι μια οικογένεια πολυδιακριτών αναλύσεων που γενικεύει την πολυδιακριτή ανάλυση του Shannon. Παράγεται από την κλιμακωτή συνάρτηση

$$\hat{\phi}(\gamma) = \begin{cases} 1 & |\gamma| \le 1/3 \\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2}|\gamma| - 1\right)\right), & 1/3 < |\gamma| \le 2/3, \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

όπου ν είναι μια λεία συνάρτηση τέτοια ώστε $\nu(\gamma) + \nu(1-\gamma) = 1$.

4.8 Ασκήσεις

1. Εστω $f \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι σε κάθε σημείο συνέχειας της f ισχύει η ακόλουθη φόρμουλα αντιστροφής του μετασχηματισμού Gabor

$$f(t) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_a f(x,\omega) g_a(t-x) e^{2\pi i \omega t} d\omega dx .$$

2. Αν $f \in L_2(\mathbb{R})$ είναι παράθυρο στο χρόνο, δείξτε ότι $f \in L_1(\mathbb{R})$.

3. Αν $f' \in L_1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

4. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier βραχέος χρόνου μιας συνάρτησης $f \in L_2(\mathbb{R})$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

5. (Γενίκευση θεωρήματος αντιστροφής κυματιδίων) Εστω $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, $\psi_1, \psi_2 \in L_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$C_{\psi_1,\psi_2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi_1}(\gamma)\overline{\widehat{\psi_2}(\gamma)}}{|\gamma|} < \infty .$$

Δείξτε ότι

$$\iint_{\mathbb{R}^2} W_{\psi_1} f(b,a) \overline{W_{\psi_2} g(b,a)} \frac{dbda}{a^2} = C_{\psi_1,\psi_2} \langle f, g \rangle$$

και

$$f(\bullet) = \frac{1}{C_{\psi_1,\psi_2}} \iint_{\mathbb{R}^2} W_{\psi_1} f(b,a) \psi_2\left(\frac{\bullet - b}{a}\right) \frac{dbda}{a^2}$$

ασθενώς.

6. Δείξτε το θεώρημα αντιστροφής της σχέσης (9).

7. Εστω $f \in L_2(\mathbb{R})$ ικανοποιεί σημειακά το θεώρημα αντιστροφής Fourier. Τότε

$$\frac{1}{C_\psi} \lim_{\substack{A\to 0 \\ B,C\to+\infty}} \iint_{\substack{A\le|a|\le B \\ |b|\le C}} W_\psi f(b,a) \psi_{b,a}(x) \frac{dbda}{a^2} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} .$$

8. Εστω $\{V_j\}$ είναι μια πολυδιακριτή ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$ με κλιμακωτή συνάρτηση $\phi, \hat{\phi} \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$, $\hat{\phi}(0) \neq 0$ και $\hat{\phi}(\gamma) = m_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, όπου $m_0(\gamma) = \sum_n \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle e^{2\pi i n \gamma}$ ικανοποιεί την ισότητα $|m_0(\gamma)|^2 + \left|m_0\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$. Δείξτε ότι:

(α) $m_0(0) = 1$ και $m_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

(β) $\sum_n \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle = 2$.

(γ) $\sum_n (-1)^n \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle = 0$.

9. Εστω $\{V_j\}$ είναι μια πολυδιακριτή ανάλυση με κλιμακωτή συνάρτηση $\phi \in L_2(\mathbb{R})$.

(α) Αν $\sum_n \left|\hat{\phi}(\gamma + n)\right|^2 > A > 0$, δείξτε ότι $\bigcap_j V_j = \{0\}$.

(β) Επιπλέον, αν $\hat{\phi} \in L_\infty(\mathbb{R})$, $\hat{\phi}(0) \neq 0$ δείξτε ότι $\overline{\bigcup_j V_j} = L_2(\mathbb{R})$.

10. Δείξτε ότι οι ακέραιες μεταθέσεις της κλιμακωτής συνάρτησης του Meyer αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα και παράγουν μια πολυδιακριτή ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$. Υπολογίστε το κυματίδιο του Meyer.

Παράρτημα Α

Στοιχεία θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης.

Α.1 Χώροι μέτρου

Πέραν της «διαισθητικής» περιγραφής του μέτρου «σχετικά απλών» συνόλων στο $\mathbb{R}$ από το μήκος τους (όπως π.χ. είναι τα διαστήματα, ενώσεις/τομές διαστημάτων κλπ), πολλές φορές προκύπτουν στην ανάλυση αρκετά πιο πολύπλοκα σύνολα, π.χ. ως όρια (με κάποια έννοια) άλλων συνόλων. Ως εκ τούτου, μια επέκταση της έννοιας του «μήκους» συνόλου είναι απαραίτητη ώστε αφενός να περιλάβει και μη Borel σύνολα, αφετέρου να έχει «καλή» συμπεριφορά (με κάποια έννοια) όσον αφορά τη δράση του ορίου. Ετσι οδηγούμαστε στο μέτρο Lebesgue και στη συνέχεια στο ολοκλήρωμα Lebesgue. Με μια μη αυστηρή ερμηνεία, το μέτρο Lebesgue γενικεύει την έννοια του μήκους σε μη κατ' ανάγκη Borel σύνολα, τα μετρήσιμα σύνολα, ενώ το ολοκλήρωμα Lebesgue επιτρέπει την ολοκλήρωση σε πιο σύνθετα σύνολα και σε μεγαλύτερη κλάση συναρτήσεων, τις μετρήσιμες συναρτήσεις. Ταυτοχρόνως, το μέτρο Lebesgue επιτρέπει σε χρήσιμες ιδιότητες ακολουθιών συναρτήσεων όπως π.χ. η μετρησιμότητα να κληρονομηθούν από την οριακή συνάρτηση.

Αρχικά ξεκινούμε με το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ και μετά γενικεύουμε σε αφηρημένους χώρους μέτρου.

Εστω $\mathcal{I}$ είναι το σύνολο των διαστημάτων της πραγματικής ευθείας, $I \in \mathcal{I}$ και $|I|$ είναι το μήκος του I. Η συνολοσυνάρτηση

$$\ell(I) = \begin{cases} |I| & I \text{ φραγμένο} \\ +\infty, & I \text{ μη φραγμένο} \\ 0 & I = \varnothing \end{cases}$$

ορίζει ένα μέτρο πάνω στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των συνόλων Borel. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο σ-άλγεβρα εννοούμε μια οικογένεια συνόλων που είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα και τις αριθμήσιμες ενώσεις (άρα και τομές) στοιχείων της. Απ' την άλλη μεριά, μια συνολοσυνάρτηση μ πάνω σε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X καλείται ***μέτρο***, αν

- $\mu(E) \geq 0 \ \ \forall E \in \mathcal{M}$,
- $\mu(\varnothing) = 0$,
- για κάθε ακολουθία $\{E_n\} \in \mathcal{M}$, ξένων μεταξύ τους ανα δύο συνόλων E_n ισχύει

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά (άρα και κλειστά) σύνολα του $\mathbb{R}$. Θα θέλαμε να επεκτείνουμε το μέτρο ℓ πάνω στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\mathbb{R})$ αλλά αυτό δεν είναι εφικτό. Αποδεικνύεται όμως ότι υπάρχει μια επέκταση της ℓ πάνω σε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{M}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Η $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ καλείται ***σ-άλγεβρα των μετρήσιμων υποσυνόλων του*** $\mathbb{R}$ και περιέχει όλα τα σύνολα $B \subset \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$m^*(B) = m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c), \ \forall E \subset \mathbb{R},$$

($B^c = \mathbb{R} - B$), όπου η συνολοσυνάρτηση

$$m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty] : \ m^*(E) = \inf_{\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{I}} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \ell(A_j) : \ E \subseteq \bigcup_j A_j \right\}$$

καλείται ***εξωτερικό μέτρο Lebesgue***. Αποδεικνύεται ότι η συνολοσυνάρτηση

$$m : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty] : \ m(B) = m^*(B)$$

είναι μέτρο το οποίο καλούμε ***μέτρο Lebesgue*** στην πραγματική ευθεία. Υπάρχουν μη μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, η κατασκευή τους όμως δεν είναι εύκολη. Εφόσον η σ-άλγεβρα των μετρησίμων συνόλων περιέχει όλα τα Borel σύνολα, τα ανοικτά και κλειστά σύνολα είναι Lebesgue μετρήσιμα, το συμπλήρωμα (στο $\mathbb{R}$) μετρησίμου συνόλου είναι μετρήσιμο σύνολο και η ένωση/τομή

αριθμησίμου πλήθους μετρησίμων συνόλων είναι επίσης μετρήσιμα σύνολα.

Γενικότερα, καλούμε ***χώρο μέτρου*** $(X,\mathcal{M},\mu)$ ένα σύνολο X μαζί μ' ένα μέτρο μ που έχει ορισθεί πάνω σε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του X την οποία καλούμε άλγεβρα των μετρήσιμων υποσυνόλων του X. Για παράδειγμα

- η τριάδα $(\mathbb{R},\mathcal{M},m)$ είναι χώρος μέτρου.

- Αν X οποιοδήποτε σύνολο, τότε η τριάδα $(X,\mathcal{P},\mu)$ είναι χώρος μέτρου ως προς το ***μέτρο αθροισιμότητας*** $\mu:\mathcal{P}(X)\to[0,+\infty]$:

$$\mu(A)=\begin{cases}\text{πλήθος στοιχείων του } A, & A\subseteq X \text{ έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων}\\ \infty, & A\subseteq X \text{ έχει άπειρο πλήθος στοιχείων}\end{cases}$$

.

Αν $(X,\mathcal{M},\mu)$ είναι χώρος μέτρου τότε ένα σύνολο $B\in\mathcal{M}$ καλείται ***μηδενικού μέτρου*** αν $\mu(B)=0$. Οσον αφορά το μέτρο Lebesgue στην πραγματική ευθεία αποδεικνύεται ότι όλα τα σύνολα μηδενικού μέτρου είναι μετρήσιμα. Σε γενικότερες περιπτώσεις αυτό μπορεί να μην ισχύει. Δηλαδή για $B\in\mathcal{M}$ με $\mu(B)=0$, ενδέχεται να υπάρχει $A\subset B$ με $A\notin\mathcal{M}$. Παρ' όλα αυτά μπορούμε πάντα να επεκτείνουμε το μέτρο μας σε μια μεγαλύτερη σ-άλγεβρα έτσι ώστε $\mu(A)=0$ για τις παραπάνω περιπτώσεις. Τότε όλα τα σύνολα μηδενικού μέτρου είναι μετρήσιμα και στο εξής πάντα θα υιοθετούμε αυτή την προσέγγιση.

Σημειώνουμε ότι στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R},\mathcal{M},m)$, το κενό σύνολο, τα μονοσύνολα και ενώσεις αριθμησίμου πλήθους συνόλων μηδενικού μέτρου είναι μετρήσιμα σύνολα μηδενικού μέτρου. Αρα τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ είναι σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue. Υπάρχουν όμως και υπεραριθμήσιμα σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue με το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα να είναι το σύνολο Cantor.

Θα λέμε ότι μια ιδιότητα ισχύει $\mu-$***σχεδόν παντού (σ.π.)*** σε κάποιο σύνολο E, αν η ιδιότητα αυτή ισχύει στο E εκτός από ένα υποσύνολο του E μηδενικού μέτρου.

Α.1.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Καλούμε το σύνολο

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στο εξής θεωρούμε πάντα $0 \cdot \infty = 0$, ενώ η πράξη $\infty - \infty$ είναι απροσδιόριστη. Τα ανοικτά σύνολα στο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι τα $[-\infty, a)$, $(b, \infty]$, (a, b) και αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων αυτού του τύπου.

Εστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου. Κάθε συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ καλείται ***επεκτεταμένη πραγματική συνάρτηση***. Καλούμε ***φορέα*** της f το σύνολο

$$\operatorname{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Ορισμός Α.1 *Εστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι επεκτεταμένη πραγματική συνάρτηση όπως παραπάνω. Η f καλείται **μετρήσιμη** στο X αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(V)$ κάθε ανοικτού συνόλου V του $\overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμο σύνολο, δηλαδή $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$.*

Πρακτικά, για τη μετρησιμότητα της f αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(a, +\infty]$ είναι μετρήσιμο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Εστω X είναι τοπολογικός χώρος (για ευκολία θεωρείστε τον X μετρικό χώρο) και $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Εφόσον μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής αν και μόνον αν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο προκύπτει άμεσα ότι

- Κάθε ***συνεχής*** συνάρτηση f είναι ***μετρήσιμη***.

Εκτός των συνεχών, υπάρχει και πληθώρα μη συνεχών πλην όμως μετρησίμων συναρτήσεων. Μια κλάση τέτοιων συναρτήσεων προκύπτει απ' τη ***χαρακτηριστική συνάρτηση***

$$\chi_E : X \to \mathbb{R} : \ \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0 & x \in \mathbb{R} - E \end{cases}, \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Αυτή είναι μη συνεχής και μετρήσιμη συνάρτηση στο X, διότι

$$\chi_E^{-1}(a,+\infty)=\begin{cases}\varnothing & a>1\\ E, & 0<a\le 1,\\ X & a\le 0\end{cases}$$

τα οποία είναι όλα μετρήσιμα σύνολα. Σημειώνουμε ότι γραμμικοί συνδυασμοί μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, όπως επίσης και το γινόμενο και πηλίκο τους (στο κοινό πεδίο ορισμού τους).

Ορισμός Α.2 *Εστω* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *είναι χώρος μέτρου. Κάθε συνάρτηση*

$$\phi : X \to \mathbb{R} : \ \phi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x), \qquad (1)$$

όπου $\{a_1,...,a_n\}\in\mathbb{R},\ a_i\ne a_j$ *και* $E_1,...,E_n$ *είναι μη κενά, ξένα μεταξύ τους ανά δύο μετρήσιμα σύνολα με* $\mu(E_n)<\infty$ *καλείται* ***απλή συνάρτηση*** *και είναι προφανώς μετρήσιμη.*

Σημείωση. Αν $E_1,...,E_n$ είναι μη κενά, ξένα μεταξύ τους διαστήματα της πραγματικής ευθείας και $\{a_1,...,a_n\}\in\mathbb{R},\ a_i\ne a_j$, τότε η συνάρτηση

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ \psi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$$

καλείται ***κλιμακωτή συνάρτηση***.

Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και $g(x)=f(x)$ $\mu-$σ.π. στο X, τότε και η g είναι μετρήσιμη στο X, διότι σύνολα μηδενικού μέτρου είναι μετρήσιμα, συνεπώς με όποιον τρόπο κι αν ορίσουμε την g σε σύνολο μηδενικού μέτρου παραμένει μετρήσιμη (θυμηθείτε ότι $0\cdot\infty=0$). Με την ίδια λογική, αν η f ορίζεται $\mu-$σ.π. στο X, θα θεωρούμε ότι η f είναι μετρήσιμη στο X. Αρα ***συναρτήσεις συνεχείς*** $\mu-$***σ.π. στο*** X ***είναι μετρήσιμες***. Αν $f,g : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες, τότε και οι συναρτήσεις

(α) $\max\{f(x),g(x)\}$, $\min\{f(x),g(x)\}$,

(β) $f^+ : X \to \mathbb{R} : f^+(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge 0\\ 0, & f(x)<0\end{cases}$,

(γ) $f^- : X \to \mathbb{R} : f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \le 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}$,

είναι επίσης μετρήσιμες. Από τις πιο σημαντικές ιδιότητες της μετρησιμότητας είναι ότι διατηρείται υπό τη δράση μιας οριακής διαδικασίας. Με άλλα λόγια ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων είναι κλειστός ως προς το όριο. Ετσι, αν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία (επεκτεταμένων) μετρησίμων συναρτήσεων στο X, αποδεικνύεται ότι και οι συναρτήσεις

$$\sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\} : \quad \left(\sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}\right)(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\} : \quad \left(\inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}\right)(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι μετρήσιμες στο X. Αρα και οι συναρτήσεις $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$ είναι επίσης μετρήσιμες στο X και έτσι αν

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ σημειακά,}$$

τότε και η οριακή συνάρτηση f είναι μετρήσιμη. Το ακόλουθο θεώρημα και πόρισμα είναι σημαντικά διότι δείχνουν ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση είναι όριο μιας απλής συνάρτησης.

Θεώρημα Α.1

Εστω $f \ge 0$ είναι μη αρνητική και $\mu-$σ.π. πεπερασμένη μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση στο X. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{\phi_n\}$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων τύπου (1), έτσι ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x) \text{ σημειακά στο } X.$$

Απόδειξη. (α) Εστω $\mu(\operatorname{supp} f) = M < \infty$ για κάποιο $M > 0$ και $0 \le f(x) \le M \quad \forall x \in \operatorname{supp} f$. Ορίζουμε ακολουθία διαμερίσεων

$$\Delta_k = \left\{ \frac{i}{2^k} : i = 0, \ldots, M2^k \right\}$$

του $[0,M]$ και στη συνέχεια για κάθε k ορίζουμε τα σύνολα

$$E_{i,k}=\left\{x\in \operatorname{supp} f:\ \frac{i}{2^k}\le f(x)<\frac{i+1}{2^k}\right\},\ i=0,...,M2^k .$$

Τα σύνολα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο, είναι μετρήσιμα (λόγω μετρησιμότητας της f) και $\bigcup_{i=0}^{M2^k} E_{i,k}=\operatorname{supp} f$. Εστω $\{\phi_k\}$ ακολουθία απλών συναρτήσεων της μορφής:

$$\phi_k=\sum_{i=0}^{M2^k}\frac{i}{2^k}\chi_{E_{i,k}} . \qquad (2)$$

Τότε $0\le\phi_k\le f\le M$ στο $\operatorname{supp} f$. Επιπλέον η $\{\phi_k\}$ είναι αύξουσα. Πράγματι, φιξάρουμε $k\in\mathbb{N}$ και $x_0\in\operatorname{supp} f$. Τότε $x_0\in E_{i_0,k}$ για κάποιο δείκτη i_0 και $\phi_k(x_0)=\frac{i_0}{2^k}$. Επίσης $x_0\in E_{2i_0,k+1}$ με $\phi_{k+1}(x_0)=\frac{i_0}{2^k}$, ή $x_0\in E_{2i_0+1,k+1}$ με $\phi_{k+1}(x_0)=\frac{i_0}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$. Ετσι, σε κάθε περίπτωση $\phi_k(x_0)\le\phi_{k+1}(x_0)$ και αφού το x_0 είναι τυχαίο, $\phi_k\le\phi_{k+1}\ \forall k$. Τέλος, $\forall x\in\operatorname{supp} f$

$$\left|f(x)-\phi_k(x)\right|\le\frac{1}{2^k}\to 0,\ k\to\infty ,$$

απ' όπου προκύπτει η σημειακή σύγκλιση.

(β) Εστω f είναι $\mu-$σ.π. πεπερασμένη μετρήσιμη συνάρτηση (όχι κατ' ανάγκην φραγμένη ούτε με φραγμένο φορέα). Κατασκευάζουμε ακολουθία συναρτήσεων $\{f_k\}$ τύπου **(α)** με $f_k\le k$ σε σύνολο $A_k\subset X$ με $\mu(A_k)=k$, $f_k=0$ στο $X-A_k$ και $\lim_{k\to\infty} f_k=f$ σημειακά στο X. Πράγματι, έστω

$$f_k(x)=\begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x)\le k\ \ \forall x\in A_k \\ k, & \text{αν } f(x)>k\ \ \forall x\in A_k \\ 0 & \forall x\in X-A_k \end{cases} .$$

Η $\{f_k\}$ είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων πάνω σε φραγμένο φορέα. Επίσης $f_k\le f_{k+1}\ \forall k$. Οσον αφορά τη

σημειακή σύγκλιση, έστω $x_0 \in X$ και $l := l_{x_0} \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x_0 \notin A_k \ \forall k < l$. Τότε $f_k(x_0) = 0 \ \forall k < l$. Αν $f(x) \le l$, $f_k(x_0) = f(x_0)$ $\forall k > l_{x_0}$, άρα $\lim_{k\to\infty} f_k = f$. Αν $f(x) > l$, διαλέγουμε τον πρώτο δείκτη i_0 έτσι ώστε $i_0 + l \ge f(x) > l$, οπότε $f_k(x_0) = f(x_0) \ \forall k > i_0 + l_{x_0}$ και έτσι $\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$. Τελικά σε κάθε περίπτωση έχουμε $\lim_{k\to\infty} f_k = f$. Απ' την άλλη μεριά, για κάθε k η συνάρτηση f_k έχει φορέα το φραγμένο σύνολο A_k και $|f_k| \le k$. Αρα από το **(α)** υπάρχει αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων $\{\psi_{k,n}\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} \psi_{k,n} = f_k$ σημειακά. Εστω $\phi_k = \psi_{k,k}$. Τότε:

$$|\phi_k - f| \le |\psi_{kk} - f_k| + |f_k - f| \le \frac{1}{2^k} + |f_k - f| \to 0, \ k \to \infty. \qquad \blacksquare$$

Πόρισμα Α.1

Για κάθε $\mu-$σ.π. πεπερασμένη πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση f στο X υπάρχει ακολουθία $\{\phi_n\}$ απλών συναρτήσεων έτσι ώστε $|\phi_n| \le |\phi_{n+1}| \le |f| \ \forall n$ και $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$ σημειακά στο X.

Απόδειξη. Γράφουμε $f = f^+ - f^-$ όπου f^+, f^- είναι μη αρνητικές, $\mu-$σ.π. πεπερασμένες μετρήσιμες συναρτήσεις όπως παραπάνω. Από το Θεώρημα Α.1 υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $\{\eta_k\}$ και $\{\psi_k\}$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων έτσι ώστε $\lim_{k\to\infty} \eta_k = f^+$ και $\lim_{k\to\infty} \psi_k = f^-$ σημειακά στο X. Εστω $\phi_k = \eta_k - \psi_k$. Τότε $\lim_{k\to\infty} \phi_k = f$ σημειακά στο X. Αν

$$E_1 = \{x : f(x) < 0\}, \ E_2 = \{x : f(x) > 0\} \text{ και } E_3 = \{x : f(x) = 0\},$$

τότε $\phi_k(x) = 0 \ \forall x \in E_3$, διότι οι f, f^+, f^- μηδενίζονται στο E_3. Επίσης $\phi_k(x) = -\psi_k(x) \ \forall x \in E_1$ και $\phi_k(x) = \eta_k(x) \ \forall x \in E_2$. Δηλαδή

$$|\phi_k| = \eta_k + \psi_k$$

η οποία είναι προφανώς αύξουσα. $\blacksquare$

A.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων

A.2.1 Φραγμένες συναρτήσεις πάνω σε φραγμένο φορέα.

Αν ϕ είναι μια απλή συνάρτηση όπως στην (1), ορίζουμε

$$\int_X \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \; \mu(E_i)$$

και αν $E \subset X$ είναι μετρήσιμο σύνολο,

$$\int_E \phi \, d\mu = \int_X \phi \; \chi_E \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \; \mu(E_i \cap E).$$

Σημείωση. (α) Ο αριθμός $\int_X \phi$ (ή $\int_E \phi$) είναι πεπερασμένος διότι η ϕ είναι φραγμένη συνάρτηση πάνω σε φραγμένο φορέα.

(β) Μια απλή συνάρτηση δεν εκφράζεται με μοναδικό τρόπο μέσω της (1). Παρόλα αυτά αποδεικνύεται ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο έκφρασης του τύπου της απλής συνάρτησης.

(γ) Αν ϕ, ψ είναι απλές συναρτήσεις όπως παραπάνω, τότε

$$\int_X a\phi + b\psi = a\int_X \phi + b\int_X \psi, \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

και

$$\phi \le \psi \;\; \text{μ-σ.π. στο } X \;\Rightarrow\; \int_X \phi \le \int_X \psi \, .$$

Εστω τώρα f είναι μια $\mu-$σ.π. πεπερασμένη πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση στο X. Λόγω του Πορίσματος Α.1, ένας λογικός τρόπος ορισμού του ολοκληρώματος της f θα ήταν

$$\int_X f \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n \; d\mu \, ,$$

όπου $\{\phi_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} \phi_n = f$ σημειακά στο X. Ενας τέτοιος ορισμός όμως εν γένει επηρεάζεται απ' την επιλογή της ακολουθίας $\{\phi_n\}$. Για παράδειγμα έστω $f = 0$ στο $\mathbb{R}$. Τότε η ακολουθία $\phi_k = \chi_{(0,\, 1/k)}$ συγκλίνει σημειακά στη μηδενική συνάρτηση και

$$0=\int_{\mathbb{R}} f\ dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\phi_k\ dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\chi_{(0,\ 1/k)}\ dx=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0\,.$$

(θεωρούμε $dm=dx$). Απ' την άλλη μεριά όμως και η ακολουθία $\psi_k=k\chi_{(0,\ 1/k)}$ συγκλίνει σημειακά στη μηδενική συνάρτηση, αλλά

$$0=\int_{\mathbb{R}} f\ dx\neq\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\psi_k\ dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}k\chi_{(0,\ 1/k)}\ dx=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k}=1\,.$$

Αν όμως η $f:X\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και $\mu(X)<\infty$, τότε αποδεικνύεται ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη της επιλογής της ακολουθίας $\{\phi_n\}$. Ετσι δίνουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός Α.3 *Εστω $f:X\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση με $\mu(X)<\infty$. Ορίζουμε το* ***ολοκλήρωμα Lebesgue*** *της f στο X να είναι ο πεπερασμένος αριθμός*

$$\int_X f=\lim_{n\to\infty}\int_X\phi_n\,,$$

όπου $\{\phi_n\}$ είναι μια (οποιαδήποτε) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία απλών συναρτήσεων στο X με $\lim_{n\to\infty}\phi_n=f$ σημειακά στο X.

Παρατήρηση. Συνδυάζοντας τον ορισμό Α.3 με την απόδειξη της περίπτωσης (α) του Θεωρήματος Α.1 διαπιστώνουμε τη διαφορά φιλοσοφίας μεταξύ των ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue. Το ολοκλήρωμα Riemann διαμερίζει το πεδίο ορισμού της f ενώ το ολοκλήρωμα Lebesgue διαμερίζει το πεδίο τιμών της f.

Θεώρημα Α.2 (Φραγμένης σύγκλισης)

Εστω $\{f_k\}$ είναι ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων πάνω σε σύνολο X με $\mu(X)<\infty$ έτσι ώστε

- $|f_k|\le M\ \ \forall k$ *για κάποιο $M>0$ και*
- $\lim_{k\to\infty}f_k=f$ *σημειακά στο X.*

Τότε και η οριακή συνάρτηση f είναι φραγμένη στο X και

$$\lim_{k\to\infty}\int_X |f_k - f|\, d\mu = 0 .$$

Επίσης:

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_k\, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu .$$

Α.2.2 Μη αρνητικές συναρτήσεις.

Εστω τώρα $f \geq 0$ είναι $\mu-$σ.π. πεπερασμένη (όχι κατ' ανάγκη φραγμένη) μετρήσιμη συνάρτηση στο X. Τότε πάλι υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{f_k\}$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων πάνω σε φραγμένο φορέα τέτοια ώστε $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ σημειακά στο X (βλ. πόρισμα Α.1). Μπορεί κάλλιστα να υπάρχουν και άλλες τέτοιου τύπου ακολουθίες συναρτήσεων. Ετσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο

Ορισμός Α.4 *Εστω $f : X \to [0,+\infty]$ είναι μια σ.π. πεπερασμένη, επεκτεταμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τον (επεκτεταμένο) μη αρνητικό αριθμό*

$$\int_X f\, d\mu = \sup_{0\leq g\leq f}\int_X g\, d\mu ,$$

όπου g είναι (οποιαδήποτε) φραγμένη πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση πάνω σε φραγμένο φορέα. Λέμε ότι η f είναι ***ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο*** *X και γράφουμε $f \in L_1(X) := L_1(X,\mu)$, αν*

$$\int_X f\, d\mu < \infty .$$

Αν $E \subset X$ είναι μετρήσιμο σύνολο, τότε ορίζουμε

$$\int_E f\, d\mu = \int_X f\, \chi_E\, d\mu .$$

Αν $f, g : X \to [0,+\infty]$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, αποδεικνύεται ότι

- $\int_X af + bg = a\int_X f + b\int_X g$.
- $f \leq g$ μ-σ.π. $\Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$.

- Αν $f \in L_1(X)$, τότε η f είναι $\mu-$σ.π. πεπερασμένη στο X.

- Αν $\int_X f = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-σ.π.

- Αν $f = g$ $\mu-$σ.π. $\Rightarrow \int_X f = \int_X g$.

Εχοντας ορίσει το ολοκλήρωμα μη αρνητικών συναρτήσεων, το άμεσο ερώτημα είναι αν μπορεί να εναλλαχθεί το όριο με το ολοκλήρωμα. Γενικά αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Ισχύει όμως πάντοτε το ακόλουθο

Λήμμα Α.1 (Fatou)

Εστω $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών μετρησίμων πραγματικών συναρτήσεων. Τότε

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_n \int_X f_n .$$

Θεώρημα Α.3 (Μονότονης σύγκλισης)

Εστω $0 \le f_1 \le \ldots \le f_n \le \ldots$ είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρησίμων πραγματικών συναρτήσεων στο X. Τότε:

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n .$$

Πόρισμα Α.2

Εστω $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών μετρησίμων πραγματικών συναρτήσεων στο X. Τότε

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X f_n \right).$$

Α.2.3 Το ολοκλήρωμα στη γενική περίπτωση

Ορισμός Α.5 *Εστω* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Αν τουλάχιστον μια από τις μη αρνητικές συναρτήσεις* f^+, f^- *είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο* X*, τότε ορίζεται ο (επεκτεταμένος) αριθμός*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu .$$

Λέμε ότι η f *είναι* ***ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο*** X *και γράφουμε* $f \in L_1(X) := L_1(X, \mu)$*, αν*

$$\int_X f \, d\mu < \infty .$$

Αν $E \subset X$ *είναι μετρήσιμο σύνολο, τότε ορίζουμε*

$$\int_E f \, d\mu = \int_X f \, \chi_E \, d\mu .$$

Προφανώς ισχύει η ισοδυναμία:

$$f \in L_1(X) \Leftrightarrow |f| \in L_1(X),$$

άρα η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο X αν και μόνον αν

$$\int_X |f| \, d\mu < \infty .$$

Ορισμός Α.6 *Εστω* $f : X \to \mathbb{C} : f = u + iv$ *είναι μια* ***μιγαδική*** *μετρήσιμη συνάρτηση, δηλαδή οι* u, v *είναι μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Ορίζουμε τον (επεκτεταμένο) αριθμό*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X u \, d\mu + i \int_X v \, d\mu .$$

Λέμε ότι η f *είναι* ***ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο*** X *και γράφουμε* $f \in L_1(X)$*, αν*

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_X \left(u^2 + v^2\right)^{1/2} \, d\mu < \infty .$$

Ορισμός Α.7 *Συμβολίζουμε με* $L_1(X) := L_1(X,\mu)$ *το χώρο όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο* X *.*

Θεώρημα Α.4 (Κυριαρχούμενης σύγκλισης)

Εστω $\{f_k\}$ *είναι μια ακολουθία μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων τέτοια ώστε* $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ *σημειακά* $\mu-$*σ.π. στο* X *. Αν υπάρχει* $g \in L_1(X)$ *έτσι ώστε*

$$|f_k| \le g \quad \forall k\,,$$

τότε $f \in L_1(X)$ *και επιπλέον*

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_k \; d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} f_k \; d\mu\,.$$

Σημείωση. Στο εξής μιλάμε για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και εννοούμε ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, τότε οι τιμές των ολοκληρωμάτων Lebesgue και Riemann ταυτίζονται. Ετσι μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει όλους τους γνωστούς κανόνες ολοκλήρωσης (αντικατάσταση, κατά παράγοντες κλπ.) Για παράδειγμα αν $f \in L_1(\mathbb{R})$ τότε ισχύει

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f\,,\ \int_{-\infty}^a f = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^a f$$

(εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχούμενης σύγκλισης).

Παράρτημα Β

Στοιχεία Θεωρίας Τελεστών και Συναρτησιακής Ανάλυσης

Β.1 Χώροι Banach. Βάσεις Schauder.

Στο εξής συμβολίζουμε με X,Y,Z γραμμικούς (διανυσματικούς) χώρους πάνω απ' το ίδιο σώμα $K=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και γράφουμε απλά ότι οι X,Y,Z είναι χώροι.

Μια απεικόνιση $\|\cdot\|: X\to[0,+\infty)$ καλείται ***νόρμα*** αν για κάθε $x,y\in X$

(i) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$.
(ii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|,\ \ \forall\lambda\in K$.
(iii) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

Αν ο X έχει νόρμα (δεν ισχύει πάντα) τότε λέμε ότι ο X είναι ***νορμικός χώρος*** και ορίζεται η μετρική

$$d:X\times X\to[0,+\infty):\ \ d(x,y)=\|x-y\|.$$

Το σύνολο

$$\mathcal{B}_\varepsilon(x)=\{y\in X:\ \|y-x\|<\varepsilon\}$$

καλείται ***ανοικτή περιοχή*** (***ή γειτονιά***) ***κέντρου*** $x\in X$ ***και ακτίνας*** ε. Θεωρώντας ότι ένα υποσύνολο του X είναι ***ανοικτό*** αν και μόνον αν είναι (πιθανώς αριθμήσιμη) ένωση ανοικτών περιοχών όπως παραπάνω προκύπτει με φυσικό τρόπο μια τοπολογία στο X. Τότε λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}\in X$ συγκλίνει στο X (σε στοιχείο $x\in X$), αν

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n>n_0\Rightarrow\|x-x_n\|<\varepsilon.$$

Επίσης λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ συγκλίνει απόλυτα αν $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$. Ακόμη λέμε ότι μια απεικόνιση $f:X\to Y$ είναι συνεχής αν για κάθε $x_0\in X$ ισχύει

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0:\ \forall 0<\|x-x_0\|_X<\delta\Rightarrow\|f(x)-f(x_0)\|_Y<\varepsilon.$$

Στην παραπάνω ο Y είναι νορμικός χώρος με νόρμα $\|\cdot\|_Y$. Αν A είναι υποσύνολο ενός νορμικού (ή και τοπολογικού) χώρου, συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την ***κλειστότητα*** του A, δηλαδή το A μαζί με τα σημεία συσσώρευσής του. Προφανώς $\overline{A} = A$ αν και μόνον αν το A είναι κλειστό.

Ορισμός Β.1 *Ενα υποσύνολο A (αριθμήσιμο ή όχι) ενός νορμικού (ή και τοπολογικού) χώρου X καλείται **πυκνό** στο X, αν*

$$\overline{A} = X .$$

Ορισμός Β.2 *Ενας νορμικός χώρος X καλείται **πλήρης ή Banach** αν κάθε ακολουθία Cauchy στο X συγκλίνει στο X, δηλαδή*

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon\right) \Rightarrow \lim_n x_n = x \in X .$$

Προφανώς κάθε χώρος Banach είναι κλειστός αλλά και κάθε κλειστός υπόχωρος χώρου Banach είναι επίσης χώρος Banach. Επικεντρωνόμαστε σε χώρους Banach επειδή αυτοί οι χώροι είναι αρκετά «πλούσιοι» (εφόσον περιέχουν και όρια) και χρησιμεύουν ως ένα στέρεο μαθηματικό μοντέλο μελέτης διαφόρων φυσικών φαινομένων. Οι χώροι Banach που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι απειροδιάστατοι και χρειάζεται κάποια προσοχή όσον αφορά τη γενίκευση της έννοιας της βάσης σε τέτοιους χώρους.

Στο εξής θεωρούμε ότι ο X είναι χώρος Banach. Οταν γράφουμε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ εννοούμε ότι η σύγκλιση είναι ως προς τη νόρμα του X εκτός αν κάτι δηλώνεται κάτι διαφορετικό.

Ορισμός Β.3 *Εστω $\Phi = \{\varphi_b\}_{b\in B}$ είναι μια οικογένεια στοιχείων του X (αριθμήσιμη ή όχι) και $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Καλούμε **γραμμικό περίβλημα** του Φ (ή **γραμμική θήκη** του Φ), συμβολικά*

$$span(\Phi) = \left\{\sum_{b\in B} c_b \varphi_b : \ c_b \in K\right\},$$

*τον υπόχωρο του X που περιλαμβάνει όλους τους **<u>πεπερασμένους</u>** γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του Φ (με την έννοια ότι $a_b = 0$ εκτός πεπερασμένου πλήθους συντελεστών).*

Ορισμός Β.4 *Αν υπάρχει* ***αριθμήσιμη*** *οικογένεια* $\Phi = \{\varphi_n\} \in X$ *έτσι ώστε* $span(\Phi)$ *είναι πυκνό στο* X *τότε ο* X *καλείται* ***διαχωρίσιμος***.

Ορισμός Β.5 *Εστω* $\Phi = \{\varphi_b\}_{b \in B}$ *είναι μια οικογένεια στοιχείων του* X *(αριθμήσιμη ή όχι). Λέμε ότι η* Φ *είναι* ***γραμμικά ανεξάρτητη*** *(ή τα στοιχεία της είναι γραμμικώς ανεξάρτητα), αν*

$$\sum_b c_b \varphi_b = 0 \Rightarrow c_b = 0 \quad \forall b \in B .$$

Σημείωση. Με τον ορισμό που δώσαμε, αν η Φ είναι γραμμικά ανεξάρτητη τότε και κάθε πεπερασμένο υποσύνολό της είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Το αντίστροφο όμως **δεν** ισχύει.

Ορισμός Β.6 *Λέμε ότι μια* ***αριθμήσιμη*** *οικογένεια* $\Phi = \{\varphi_n\} \in X$ *είναι μια* ***βάση Schauder*** *στο* X, *αν υπάρχει* ***μοναδική*** *ακολουθία συντελεστών* $c = \{c_n\} \in K$ *τέτοια ώστε*

$$f = \sum_n c_n \varphi_n ,$$

με την έννοια

$$\lim_{N \to \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\| = 0 .$$

Σημείωση. (α) Η σύγκλιση της παραπάνω σειράς επηρεάζεται απ' τη «διάταξη» της Φ. Δηλαδή, δεν ισχύει ότι κάθε αναδιάταξη της σειράς συγκλίνει παρά μόνον κάτω υπό επιπλέον συνθήκες πάνω στη Φ. Στην περίπτωση απειροδιάστατων χώρων ακόμη κι η απόλυτη σύγκλιση μιας σειράς συναρτήσεων δε διασφαλίζει το γεγονός ότι κάθε αναδιάταξη της σειράς συγκλίνει.

(β) Ακόμη και αν ο X είναι διαχωρίσιμος μπορεί να μην έχει βάση Schauder. Αν όμως έχει βάση Schauder τότε είναι διαχωρίσιμος.

(γ) Με βάση τα παραπάνω η ακολουθία Φ είναι μια βάση στον X αν είναι γραμμικά ανεξάρτητη και $\overline{span}(\Phi) = X$.

Β.2 Τελεστές και συναρτησιακά

Ορισμός Β.7 *Κάθε απεικόνιση* $T : X \to Y$ *τέτοια ώστε*

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall x, y \in X,\ \forall \lambda, \mu \in K$$

καλείται ***γραμμικός τελεστής****. Γραμμικοί τελεστές της μορφής* $T : X \to K$ *καλούνται* ***γραμμικά συναρτησιακά****.*

Στο εξής για απλότητα μιλάμε για τελεστές (ή συναρτησιακά) και γράφουμε Tx αντί $T(x)$.

Εστω X, Y είναι νορμικοί χώροι με νόρμες $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|_Y$ αντιστοίχως και $T : X \to Y$ είναι τελεστής. Το σύνολο

$$Ker(T) = \{x \in X :\ Tx = 0\}$$

καλείται ***πυρήνας*** του T και είναι υπόχωρος του X. Ο T είναι 1-1 αν και μόνον αν $Ker(T) = \{0\}$. Το σύνολο

$$R(T) = \{y \in Y :\ y = Tx \quad \forall x \in X\}$$

καλείται ***εικόνα*** του T και είναι υπόχωρος του Y. Αν ο T είναι 1-1, τότε ο T είναι ***αντιστρέψιμος*** με την έννοια ότι ορίζεται ο αντίστροφος τελεστής

$$T^{-1} : R(T) \to X :\ \ T^{-1}y = x \Leftrightarrow y = Tx,$$

ο οποίος είναι επίσης γραμμικός.

Ορισμός Β.8 *Ενας τελεστής* $T : X \to Y$ *καλείται φραγμένος αν υπάρχει θετική σταθερά* M *τέτοια ώστε*

$$\|Tx\|_Y \le M \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Πρόταση Β.1

Ο τελεστής $T : X \to Y$ *είναι συνεχής στο* X *αν και μόνον αν είναι φραγμένος στο* X.

Απόδειξη. Αν ο T είναι συνεχής στο X τότε είναι συνεχής και στο στοιχείο $0 \in X$. Αρα υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\|x\|_X \le \delta \Rightarrow \|Tx\|_Y \le 1.$$

Εστω $z = \dfrac{\delta x}{\|x\|_X}$. Τότε $\|z\|_X = \delta$, άρα $\|Tz\|_Y \le 1$. Αλλά $1 \ge \|Tz\|_Y = \dfrac{\delta \|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$, οπότε $\|Tx\|_Y \le \dfrac{1}{\delta}\|x\|_X$, άρα ο T είναι φραγμένος. Αντιστρόφως, έστω ότι ο T είναι φραγμένος και $x \in X$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $y \in X$ με $0 < \|y - x\|_X < \varepsilon$ έχουμε

$$\|Ty - Tx\|_Y = \|T(y - x)\|_Y \le M\|y - x\|_X < M\varepsilon.$$

Αρα ο T είναι συνεχής. ■

Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X,Y)$ το γραμμικό χώρο όλων των **φραγμένων τελεστών** $T : X \to Y$ πάνω απ' το σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ με τις συνήθεις πράξεις. Αν $X = Y$ γράφουμε $\mathcal{B}(X)$ (αντί $\mathcal{B}(X,X)$). Καλούμε ***δυϊκό χώρο*** X^* του X το γραμμικό χώρο όλων των φραγμένων συναρτησιακών $T : X \to K$ πάνω απ' το σώμα K.

Η απεικόνιση

$$\|\cdot\|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}(X,Y) \to [0,+\infty) : \ \|T\|_{\mathcal{B}} = \sup\left\{\|Tx\|_Y : \ \forall x \in X \ \text{με} \ \|x\|_X \le 1\right\}$$

είναι είναι μια νόρμα στο $\mathcal{B}(X,Y)$ που στο εξής καλούμε ***συνήθη νόρμα*** του T και συμβολίζουμε απλά με $\|T\|$.

Αποδεικνύεται ότι αν ο Y είναι χώρος Banach τότε και ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι επίσης χώρος Banach (ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$). Τέλος είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\|Tx\|_Y \le \|T\| \ \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Αν $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ και $T \in \mathcal{B}(Y,Z)$ ορίζεται ο σύνθετος τελεστής $T \circ S : X \to Z$, συμβολικά TS. Επιπλέον $TS \in \mathcal{B}(X,Z)$ και

$$\|TS\| \le \|T\| \ \|S\|.$$

Ο τελεστής $T : X \to Y$ καλείται ***ισομορφισμός*** αν είναι 1-1 και επί του Y. Τότε οι χώροι X, Y καλούνται ισόμορφοι. Ο T καλείται ***ισομετρικός ισομορφισμός*** αν είναι ισομορφισμός και ισομετρία (δηλ. $\|x\|_X = \|Tx\|_Y$). Τότε οι X, Y καλούνται ισομετρικά ισόμορφοι.

Σημειώνουμε ότι αν $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ είναι 1-1 και επί, τότε $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$.

Θεώρημα Β.1

Εστω X είναι νορμικός χώρος και Y είναι χώρος Banach. Αν D είναι πυκνός υπόχωρος του X και ο τελεστής $T_0 : D \to Y$ είναι φραγμένος, τότε:

(α) *υπάρχει* ***<u>μοναδικός</u>*** *φραγμένος τελεστής $T : X \to Y$ που επεκτείνει τον T_0 σ' όλο το X.*

(β) $\|T\| = \|T_0\|$.

Απόδειξη. (α) Εστω $x, x' \in X$. Εφόσον ο D είναι πυκνός στο X, υπάρχουν ακολουθίες $\{x_n\}, \{x'_n\} \in D$ έτσι ώστε $\lim_n x_n = x$ και $\lim_n x'_n = x'$ αντιστοίχως. Λόγω συνεχείας του T_0 οι ακολουθίες $\{T_0 x_n\}$ και $\{T_0 x'_n\}$ είναι Cauchy άρα συγκλίνουν στο Y στα στοιχεία y και y' αντιστοίχως. Εστω

$$T : X \to Y : \ Tx = y = \lim_n T_0 x_n$$

για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \in D$ που συγκλίνει στο $x \in X$. Τότε ο T είναι μοναδική επέκταση του T_0.

(β) Προφανώς $\|T_0\| \le \|T\|$. Εστω $0 < \varepsilon < 1/2$. Τότε υπάρχει $x \in \pi_1(0)$ έτσι ώστε $\|Tx\| \ge (1-\varepsilon)\|T\|$. Εφόσον το D είναι πυκνό υπάρχει σημείο $z \in D$ τέτοιο ώστε $\|z - x\| \le \varepsilon$. Τότε $\|Tx - Tz\| \le \varepsilon \|T\|$, άρα $\|Tz\| \ge (1-2\varepsilon)\|T\|$. Επίσης $\|z\| \le 1 + \varepsilon$, άρα

$$\|T_0\| \geq \frac{\|Tz\|}{\|z\|} \geq \|T\| \frac{1-2\varepsilon}{1+\varepsilon} \to \|T\|, \ \varepsilon \to 0. \qquad \blacksquare$$

B.3 Χώροι Hilbert. Συζυγής τελεστής. Ορθοκανονικές βάσεις.

Μια απεικόνιση $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to K$ καλείται ***εσωτερικό γινόμενο*** αν για κάθε $x, y \in X$ ισχύουν

(i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
(ii) $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle, \ \ \forall a \in K$.
(iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ και $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Τότε ο X καλείται ***χώρος με εσωτερικό γινόμενο***. Για παράδειγμα η απεικόνιση

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : \ \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο χώρο

$$\mathbb{C}^n = \left\{ x = (x_1, ..., x_n)^T : \ x_i \in \mathbb{C} \right\}$$

με στοιχεία διανύσματα στήλες. Ισοδύναμα γράφουμε

$$\langle x, y \rangle = y^* \bullet x,$$

όπου y^* είναι ο συζυγής ανάστροφος του στοιχείου y και η πράξη $\bullet$ δηλώνει γινόμενο πινάκων.

Αν X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot,\cdot \rangle$ τότε για κάθε $x, y \in X$ ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \ \|y\|.$$

Ορισμός B.9 *Ενας χώρος Banach X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot,\cdot \rangle$ και νόρμα $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty) : \ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ καλείται **χώρος Hilbert.***

Στο εξής συμβολίζουμε με H ένα χώρο Hilbert. Δυο στοιχεία

$x, y \in H$ καλούνται ***κάθετα*** αν $\langle x, y \rangle = 0$ και ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Αν $A \subset H$ ορίζουμε

$$A^{\perp} = \{ y \in H : \ \langle x, y \rangle = 0 \ \ \forall x \in A \}$$

να είναι το ***ορθογώνιο συμπλήρωμα*** του A (στον H). Σημειώνουμε ότι ο $A^{\perp}$ είναι **<u>κλειστός</u>** υπόχωρος του H και

$$A \cap A^{\perp} = \{0\} .$$

Προφανώς $H^{\perp} = \{0\}$ και

- αν A είναι πυκνό στο H τότε $A^{\perp} = \{0\}$.

Τέλος:

- Αν $\langle a, x \rangle = \langle a, y \rangle \ \ \forall a \in H \Rightarrow x = y$, διότι $x - y \in H^{\perp} = \{0\}$.

Πρόταση Β.2

Εστω E είναι κλειστός υπόχωρος του H. Τότε

$$H = E \oplus E^{\perp} .$$

Με άλλα λόγια, οι $E, E^{\perp}$ είναι κλειστοί υπόχωροι του H με τομή το μηδενικό στοιχείο του H και κάθε στοιχείο του H αναλύεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα δυο κάθετων μεταξύ τους στοιχείων των υποχώρων $E, E^{\perp}$.

Θεώρημα Β.2 (Riesz)

Για κάθε στοιχείο $\Lambda \in H^*$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $x \in H$ έτσι ώστε $\Lambda(y) = \langle y, x \rangle$.

Ας θυμηθούμε τώρα την ακόλουθη ισότητα από τη γραμμική άλγεβρα:

Αν $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και $A^* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ είναι ο

συζυγής ανάστροφος του A (δηλ. $A^*_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$), τότε αν $x \in \mathbb{C}^m$ και $y \in \mathbb{C}^n$ είναι διανύσματα στήλες έχουμε:

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{C}^n} = y^* \cdot Ax = y^* A \cdot x = \left(A^* y \right)^* \cdot x = \langle x, A^* y \rangle_{\mathbb{C}^m}.$$

Η ισότητα αυτή γενικεύεται και για τελεστές σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert. Πράγματι, έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ όπου H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert με εσωτερικά γινόμενα $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_2}$ αντιστοίχως. Σταθεροποιούμε προς στιγμήν τυχαίο στοιχείο $y \in H_2$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$g_y : H_1 \to \mathbb{C} : \; g_y(x) = \langle Tx, y \rangle_{H_2}.$$

Η g_y είναι γραμμική και φραγμένη άρα ανήκει στο δυϊκό χώρο H_1^*. Από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz (βλ. Θεώρημα Β.1), υπάρχει στοιχείο $z = z_y \in H_1$ τέτοιο ώστε

$$g_y = \langle \cdot, z_y \rangle_{H_1}$$

και ορίζεται ο τελεστής

$$T^* : H_2 \to H_1 : \; T^*(y) = z_y,$$

άρα

$$\boxed{\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*(y) \rangle_{H_1}} \quad \forall x \in H_1, \; y \in H_2.$$

Ο τελεστής T^* είναι μοναδικός διότι αν υπήρχε και άλλος, έστω Λ^*, τότε

$$0 = \langle x, (T^* - \Lambda^*)(y) \rangle_{H_1} \quad \forall x \in H_1 \Rightarrow T^*(y) = \Lambda^*(y).$$

Επιπλέον ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση Β.3

*Εστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ που καλείται **συζυγής** του T έτσι ώστε*

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^* y\rangle_{H_1} \quad \forall x, y \in H$$

και

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{cases} Ker(T^*) = R(T)^{\perp} \\ Ker(T) = R(T^*)^{\perp} \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} Ker(T^*)^{\perp} = \overline{R(T)} \\ Ker(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)} \end{cases}.$$

Σημειωτέον ότι ο πυρήνας $Ker(T)$ είναι κλειστός αν και μόνον αν ο T είναι φραγμένος. Επίσης:

- $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$,
- $(TS)^* = S^* T^*$,
- $(T^*)^* = T$,
- $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$,

υπό την προϋπόθεση ότι οι παραπάνω τελεστές ορίζονται. Εστω $T \in \mathcal{B}(H)$. Ο T καλείται ***ορθοκανονικός*** αν

$$TT^* = T^* T = I ,$$

όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής.

Πρόταση Β.4

Εστω H είναι μιγαδικός χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(β₁) *Ο T είναι ορθοκανονικός.*

(β₂) $R(T) = H$ *και* $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x, y \in H$.

(β₃) $R(T) = H$ *και* $\|Tx\| = \|x\| \ \ \forall x \in H$.

Ορισμός Β.11 *Μια οικογένεια* $\Phi = \{\varphi_b\}_{b\in B} \in H$ *(αριθμήσιμη ή όχι) καλείται* ***ορθογώνια*** *αν* $\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = 0 \ \forall a \neq b$. *Επιπλέον, αν* $\|\varphi_b\| = 1 \ \forall b$ *τότε η* Φ *καλείται* ***ορθοκανονική***.

Κάθε ορθογώνια οικογένεια Φ (με μη μηδενικά στοιχεία) είναι γραμμικά ανεξάρτητη διότι

$$\sum_b c_b \varphi_b = 0 \Rightarrow \sum_b c_b \langle \varphi_b, \varphi_a \rangle = 0 \ \forall a \Rightarrow c_a \langle \varphi_b, \varphi_a \rangle = 0 \ \forall a \Rightarrow c_a = 0 \ \forall a .$$

Ορισμός Β.12 *Μια οικογένεια* $\Phi = \{\phi_b\}_{b\in B} \in H$ *καλείται* ***Bessel*** *αν υπάρχει θετική σταθερά* C *τέτοια ώστε*

$$\sum_b \left| \langle f, \phi_b \rangle \right|^2 \leq C \|f\|^2 \quad \forall f \in H .$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\Phi = \{\varphi_b\}_{b\in B} \in H$ είναι Bessel. Επιπλέον, αν $f \in H$ και

$$\widehat{f_b} : H \to K : \ c_b(f) = \langle f, \varphi_b \rangle ,$$

τότε η ακολουθία $\left\{ \widehat{f_b} \right\}_{b\in B}$ καλείται ***ακολουθία συντελεστών Fourier*** της f και το ανάπτυγμα

$$\sum_b \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

καλείται ***(γενικευμένη) σειρά Fourier*** της $f \in H$.

Θεώρημα Β.3

Εστω X, Y *είναι νορμικοί χώροι, ο* X *είναι χώρος Banach και* $f : X \to Y$ *είναι φραγμένος τελεστής. Αν* f *είναι* ***<u>ισομετρία</u>*** *πάνω σε πυκνό σύνολο* D *του* X *και η εικόνα* $f(D)$ *είναι πυκνή στο* Y*, τότε ο τελεστής* f *επεκτείνεται σε μια ισομετρία σ' όλο* X *η οποία είναι* ***<u>επί</u>*** *του* Y.

Απόδειξη. Εστω $y \in Y$. Εφόσον το $f(D)$ είναι πυκνό στο Y, υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \in D$ έτσι ώστε $\lim_n f(x_n) = y$. Αρα η

ακολουθία $\{f(x_n)\} \in Y$ είναι Cauchy. Εφόσον η f είναι ισομετρία στο D και η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι Cauchy και αφού ο X είναι χλωρος Banach, υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $\lim_n x_n = x$. Τότε λόγω συνεχείας της f έχουμε $\lim_n f(x_n) = f(x) = y$. Αρα η f είναι επί. Η επέκταση σε ισομετρία είναι άμεση συνέπεια της συνέχειας της f και της πυκνότητας των D και $f(D)$. ■

Εστω

$$\ell_2(B) = \left\{ x = \{x_n\} : \sum_{b \in B} |x_b|^2 < \infty \right\}$$

είναι ο χώρος των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών με νόρμα

$$\|x\|_{\ell_2(B)} = \left(\sum_b |x_b|^2 \right)^{1/2}.$$

Παρατήρηση. Σημειώνουμε ότι

$$\sum_b |x_b|^2 = \sup\left\{ \sum_{a \in A} |x_a|^2 : \ \forall A \subset B,\ A \text{ πεπερασμένο} \right\}.$$

Αν $\Phi = \{\varphi_b\}_{b \in B} \in H$ είναι μια ορθοκανονική οικογένεια και

$$T : span(\Phi) \to \ell_2(B) : \ Tf = \{\langle f, \varphi_b \rangle\}_b,$$

τότε ο T είναι ισομετρία, άρα από το θεώρημα Β.3 επεκτείνεται στο $\overline{span(\Phi)}$ σε μια ισομετρία επί του χώρου $\ell_2(B)$. Αρα ισχύει:

Θεώρημα Β.4

Εστω $\Phi = \{\varphi_b\}_{b \in B} \in H$ είναι μια ορθοκανονική οικογένεια. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) *Η $\Phi = \{\varphi_b\}_{b \in B} \in H$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H.*

(β) $\overline{span(\Phi)} = H$.

(γ) $\|f\|^2 = \sum_b |\langle f, \varphi_b \rangle|^2 \quad \forall f \in H$ ***(ταυτότητα Parseval)***.

(δ) $\langle f, g \rangle_H = \sum_b \langle f, \varphi_b \rangle \overline{\langle g, \varphi_b \rangle} \quad \forall f, g \in H$.

Αποδεικνύεται ότι κάθε χώρος Hilbert H έχει ορθοκανονική βάση $\Phi = \{\varphi_b\}_{b\in B}$ (όχι κατ' ανάγκην αριθμήσιμη). Αρα:

- Κάθε χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με το χώρο των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών $\{x_n\}$: $\sum_n |x_n|^2 < \infty$.

Β.4 Μερικά από τα βασικά θεωρήματα συναρτησιακής ανάλυσης. Συζυγής τελεστής σε χώρους Banach.

Θεώρημα Β.5 (Hahn-Banach)

Εστω M είναι υπόχωρος γραμμικού χώρου X και p είναι μια ημινόρμα στο X (δηλαδή ισχύουν όλες οι ιδιότητες της νόρμας εκτός της $p(x)=0 \Leftrightarrow x=0$). Αν $T_0 : M \to K$ είναι συναρτησιακό με

$$|T_0 x| \le p(x) \quad \forall x \in M ,$$

τότε το T_0 επεκτείνεται σ' ένα συναρτησιακό $T : X \to K$ με

$$|Tx| \le p(x) \quad (\forall x \in X).$$

Πόρισμα Β.1

Εστω X είναι νορμικός χώρος και $x_0 \in X$. Υπάρχει συναρτησιακό $\Lambda : X \to K$ έτσι ώστε

$$\Lambda(x_0) = \|x_0\| \text{ και } |\Lambda y| \le \|y\| \quad \forall y \in X .$$

Εστω X είναι χώρος Banach και X^* είναι ο δυϊκός χώρος του X, δηλαδή ο χώρος όλων των φραγμένων συναρτησιακών $\Lambda : X \to K$: $\Lambda = \Lambda x$. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό

$$\Lambda x = \langle x, \Lambda \rangle .$$

Αν $\|\Lambda\|$ είναι η συνήθης νόρμα του Λ, τότε

$$\|x\| = \sup\{|\Lambda x| : \ \forall \Lambda \in X^* \text{ με } \|\Lambda\| \le 1\}.$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει γιατί αφ' ενός $|\Lambda x| \le \|\Lambda\| \|x\|$ και αφ' ετέρου από το Πόρισμα Β.1 για $x \in X$ υπάρχει Λ τέτοιο ώστε

$\Lambda x = \|x\|$. Αρα για κάθε $x \in X$, η απεικόνιση

$$\phi_x : X^* \to K : \ \phi_x(\Lambda) = \langle \cdot, \Lambda_x \rangle$$

είναι φραγμένο συναρτησιακό που ανήκει στο δεύτερο δυϊκό χώρο $\left(X^*\right)^* := X^{**}$ του X με νόρμα ίση με $\|x\|$. Ετσι η απεικόνιση

$$\phi : X \to X^{**} : \ \phi(x) = \langle \cdot, \Lambda_x \rangle$$

είναι ισομετρία.

Εστω $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Για κάθε $\Lambda \in Y^*$ ο σύνθετος τελεστής $\Lambda \circ T$ είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου X^*. Ετσι ορίζεται μια απεικόνιση

$$T^* : Y^* \to X^* : \ T^*(\Lambda) = \Lambda \circ T .$$

Η απεικόνιση T^* καλείται ***συζυγής τελεστής*** του T. Τότε έχουμε

$$\langle Tx, \Lambda \rangle = \Lambda \circ T(x) = T^*(\Lambda x) = \langle x, T^* \Lambda \rangle .$$

Αρα

$$\langle Tx, \Lambda \rangle = \langle x, T^* \Lambda \rangle .$$

Η παραπάνω είναι η γενίκευση της έννοιας του συζυγούς τελεστή σε χώρους Banach. Αποδεικνύεται ότι ο T^* είναι γραμμικός και επιπλέον

$$\|T^*\| = \|T\| .$$

Θεώρημα Β.6 (Αρχή του ομοιόμορφα φραγμένου)

Εστω X είναι χώρος Banach, Y είναι νορμικός χώρος και F είναι μια συλλογή φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$ έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\sup_{T \in F} \|Tx\|_Y < \infty .$$

Τότε

$$\sup_{T \in F} \|T\| < \infty ,$$

όπου $\|T\|$ είναι η συνήθης νόρμα του τελεστή T.

Παράρτημα Γ

Ενότητα Γ.1

Απόδειξη θεωρήματος 1.5 Κεφαλαίου 1.

Εστω f είναι συνεχής και πραγματική συνάρτηση στο $\mathbf{T}$ κανονικοποιημένη (αφαιρώντας μια σταθερά) ώστε $\int_{\mathbf{T}} f(x)dx = 0$. Εστω $u = P_r * f$ αρμονική με $u(0,0) = 0$ και v συζυγής αρμονική της u με $v(0,0) = 0$. Τότε η

$$h = u + iv$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{D}$ με $h(0) = 0$. Για φιξαρισμένο $0 < r < 1$ και για πεπερασμένο $k = 1,2,...$, από το Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss έχουμε:

$$0 = h^{2k}(0) = \int_0^1 h^{2k}\left(re^{it}\right)dt = \int_0^1 \left[u\left(re^{it}\right) + iv\left(re^{it}\right)\right]^{2k} dt$$

$$= \int_0^1 u^{2k}\left(re^{it}\right)dt + i\binom{2k}{1}\int_0^1 u^{2k-1}\left(re^{it}\right)v\left(re^{it}\right)dt + ... + i^{2k}\int_0^1 v^{2k}\left(re^{it}\right)dt .$$

Αναδιατάσσουμε την παραπάνω ισότητα ως εξής:

$$\int_0^1 v^{2k}\left(re^{it}\right)dt \le \binom{2k}{2k-1}\int_0^1 \left|u\left(re^{it}\right)v^{2k-1}\left(re^{it}\right)\right|dt + ... + \int_0^1 u^{2k}\left(re^{it}\right)dt$$

και στον $j-$όρο εφαρμόζουμε την ανισότητα Holder χρησιμοποιώντας τους συζυγείς εκθέτες $2k/j$ και $2k/(2k-j)$. Για απλότητα γράφουμε $S = \left(\int_0^1 u^{2k}\left(re^{it}\right)dt\right)^{1/(2k)}$, $T = \left(\int_0^1 v^{2k}\left(re^{it}\right)dt\right)^{1/(2k)}$. Τότε η παραπάνω γίνεται:

$$T^{2k} \le \binom{2k}{2k-1}ST^{2k-1} + \binom{2k}{2k-2}S^2T^{2k-2} + ... + \binom{2k}{1}S^{2k-1}T + S^{2k} .$$

Εστω $U = S/T$. Τότε:

$$U^{2k} \le \binom{2k}{2k-1} U^{2k-1} + \binom{2k}{2k-2} U^{2k-2} + \ldots + \binom{2k}{1} U + 1$$

ή

$$U \le \binom{2k}{2k-1} + \binom{2k}{2k-2} U^{-1} + \ldots + \binom{2k}{1} U^{-2k+2} + U^{-2k+1}.$$

Αν $U \le 1$ η απόδειξη παραλείπεται (εύκολη). Για $U \ge 1$ έχουμε

$$U \le \binom{2k}{2k-1} + \binom{2k}{2k-2} + \ldots + \binom{2k}{1} + 1 \le 2^{2k}.$$

Αρα $T \le 2^{2k} S$ και για $r \to 1^-$ έχουμε

$$\|Hf\|_{L_{2k}(\mathbf{T})} \le 2^k \|f\|_{L_{2k}(\mathbf{T})}$$

διότι $h = u + iv \to f + i\,Hf$, $r \to 1^-$. Εφόσον το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων είναι πυκνό στον $L_{2k}(\mathbf{T})$, ο H επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σ' ένα φραγμένο τελεστή πάνω στον $L_{2k}(\mathbf{T})$. Εφόσον τώρα ο H είναι φραγμένος στους $L_2(\mathbf{T}), L_4(\mathbf{T}), \ldots$, με εφαρμογή του θεωρήματος Riesz-Thorin θα είναι φραγμένος στον $L_p(\mathbf{T})$ $\forall 2 \le p < \infty$. Τότε λόγω δυϊκότητας είναι φραγμένος και στον $L_p(\mathbf{T})$, $\forall 1 < p < 2$ με την εξής έννοια:

Εστω $f \in L_p(\mathbf{T})$ όπου $1 < p < 2$ και $g \in L_q(\mathbf{T})$ όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Σημειώνουμε ότι $2 < q < \infty$. Τότε

$$\|Hf\|_{L_p} = \sup\left\{ \left| \int_{\mathbf{T}} Hf(x) \cdot g(x)\, dx \right| : \ \|g\|_{L_q} \le 1 \right\}$$

(βλ. Παράρτημα Β). Αλλά:

$$\int_{\mathbf{T}} Hf(x) \cdot g(x)\, dx = \int_{\mathbf{T}} \left[\int_{\mathbf{T}} f(y) \sigma\phi(\pi(x-y)) dy \right] g(x) dx$$

$$= -\int_{\mathbf{T}} \left[\int_{\mathbf{T}} g(x) \sigma\phi(\pi(y-x)) dx \right] f(y) dy$$

$$= -\int_{\mathbf{T}} Hg(y) f(y) dy$$

και

$$\left| \int_{\mathbf{T}} Hg(y) f(y) dy \right| \le \|Hg\|_{L_q} \|f\|_{L_p} \le \|H\|_{L_q \to L_q} \|f\|_{L_p} .$$

Αρα $\|H\|_{L_p \to L_p} \le \|H\|_{L_q \to L_q}$ και το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα. ■

Ενότητα Β

Απόδειξη θεωρήματος Riesz-Thorin (θεώρημα 1.6, Κεφάλαιο 1).

Πριν την απόδειξη του θεωρήματος Riesz-Thorin χρειαζόμαστε δυο λήμματα.

Λήμμα Α

Εστω $1 \le p,q \le \infty$ *είναι συζυγείς εκθέτες. Αν* $g \in L_1(E',\mu)$, $\mu(E') < \infty$ *και αν*

$$\sup_{f \in L_p(E') \text{ απλή και } \|f\|_p \le 1} \left| \int_{E'} fg \, d\mu \right| = M < \infty,$$

τότε $g \in L_q(E')$ *και* $\|g\|_q = M$.

Απόδειξη. (α) $1 \le p < \infty$. Ορίζουμε το συναρτησιακό

$$\Lambda_g(f) = \int_{E'} fg \, d\mu .$$

Τότε η απόδειξη προκύπτει εύκολα από την πρόταση Γ.6 και το θεώρημα Γ.1 του κεφαλαίου 1.

(β) $p = \infty$, $q = 1$. Προφανώς $\|fg\|_{L_\infty} \le \|g\|_{L_\infty}$. Εστω $h = sign(g)$. Τότε η h είναι απλή, $\|h\|_1 = 1$ και $\int_{E'} hg = \|g\|_1 = M$. ■

Λήμμα Β (Τριών γραμμών)

Εστω $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχής και φραγμένη στην κατακόρυφη λωρίδα* $0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$ *και αναλυτική στο εσωτερικό της λωρίδας αυτής. Αν* $|\Phi(z)| \le M_0$ *πάνω στη συνοριακή ευθεία* $\mathrm{Re}(z) = 0$ *και* $|\Phi(z)| \le M_1$ *πάνω στη συνοριακή ευθεία* $\mathrm{Re}(z) = 1$ *αντιστοίχως για κάποιες θετικές σταθερές* M_0, M_1, *τότε*

$$|\Phi(x+iy)| \le M_0^{1-x} M_1^x, \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R} \text{ και } x \in (0,1).$$

Απόδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$ και $\Phi_\varepsilon(z) = \Phi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z} e^{\varepsilon z(z-1)}$. Αν $\mathrm{Re}(z) = 0$

τότε

$$\left|\Phi_\varepsilon(iy)\right| \le \left|M_0^{iy} M_1^{-iy} e^{\varepsilon iy(iy-1)}\right| = \left|e^{iy\log(M_0/M_1)} e^{-\varepsilon y^2} e^{-\varepsilon iy}\right| = e^{-\varepsilon y^2} \le 1.$$

Ομοίως, αν $\mathrm{Re}(z)=1$ έχουμε

$$\left|\Phi_\varepsilon(1+iy)\right| \le \left|M_0^{iy} M_1^{-iy} e^{\varepsilon(1+iy)(1+iy-1)}\right| = \left|e^{iy\log(M_0/M_1)} e^{-\varepsilon y^2} e^{-\varepsilon iy}\right| = e^{-\varepsilon y^2} \le 1.$$

Απ' την άλλη μεριά για κάθε $y \in \mathbb{R},\ x \in (0,1)$ έχουμε

$$\left|\Phi_\varepsilon(x+iy)\right| = \left|\Phi(x+iy) M_0^{x+iy-1} M_1^{-x-iy} e^{\varepsilon(x+iy)(x+iy-1)}\right|$$

$$= \left|\Phi(x+iy) e^{(x+iy-1)\log M_0} e^{-(x+iy)\log M_1} e^{\varepsilon(x^2-x-y^2)} e^{\varepsilon iy(2x-1)}\right|$$

$$= \left|\Phi(x+iy) M_0^{x-1} M_1^{-x} e^{\varepsilon(x^2-x)}\right| e^{-\varepsilon y^2} \le C e^{-\varepsilon y^2},$$

διότι τόσο η Φ όσο και η $e^{\varepsilon(x^2-x)}$ είναι φραγμένες στη λωρίδα $0<\mathrm{Re}(z)<1$ και στο $(0,1)$ αντιστοίχως. Εφόσον $e^{-\varepsilon y^2} \to 0,\ y \to \infty$, έχουμε $\left|\Phi_\varepsilon(z)\right| \to 0,\ |y| \to +\infty$. Αρα μπορούμε να επιλέξουμε αρκούντως μεγάλο $A>0$ έτσι ώστε $\left|\Phi_\varepsilon(z)\right| \le 1$ πάνω στο σύνορο του ορθογωνίου $\{z:\ 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1,\ -A \le \mathrm{Im}(z) \le A\}$. Από την αρχή μεγίστου προκύπτει $\left|\Phi_\varepsilon(z)\right| \le 1$ και στο εσωτερικό του ορθογωνίου. Εφόσον το A είναι αρκούντως μεγάλο, ισχύει $\left|\Phi_\varepsilon(z)\right| \le 1$ σ' όλη τη λωρίδα $0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$. Αφήνοντας $\varepsilon \to 0$, παίρνουμε

$$1 \ge \lim_{\varepsilon\to 0}\left|\Phi_\varepsilon(z)\right| = \left|\Phi(z)\right| M_0^{x-1} M_1^{-x} \Rightarrow \left|\Phi(z)\right| \le M_0^{1-x} M_1^{x}. \qquad \blacksquare$$

Απόδειξη θεωρήματος Riesz-Thorin:

Η απόδειξη χωρίζεται στα ακόλουθα βήματα:

(α) Κατασκευάζουμε συνάρτηση Φ που ικανοποιεί το Λήμμα τριών γραμμών.

(β) Μέσω της Φ και με τη βοήθεια των Λημμάτων Α και Β δείχνουμε ότι ο τελεστής $T: L_p(X,\mu) \to L_q(Y,\nu)$ είναι φραγμένος για κάθε απλή συνάρτηση $\phi \in L_p(X,\mu)$.

(γ) Επεκτείνουμε το αποτέλεσμα σε κάθε στοιχείο $f \in L_p(X,\mu)$ λόγω πυκνότητας.

Εφόσον $T\phi = (T\phi_0)\|\phi\|_p$, όπου $\phi_0 = \phi\|\phi\|_p^{-1}$, αρκεί να δείξουμε ότι η νόρμα $\|T\phi_0\|_q$ είναι φραγμένη για κάθε απλή συνάρτηση $\phi \in L_p$ με $\|\phi\|_p = 1$. Ξεκινούμε με την υπόθεση $p_0 < p_1$.

<u>Βήμα (α)</u>: Εστω

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} |a_k| e^{i\theta_k} \chi_{E_k}$$

είναι απλή συνάρτηση με $\|\phi\|_p = 1$, όπου $\{E_k\}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων ξένων μεταξύ τους ανά δύο με ένωση το X. Ομοίως, έστω

$$\psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{E'_k} = \sum_{k=1}^{m} |b_k| e^{i\theta'_k} \chi_{E'_k}$$

είναι απλή συνάρτηση στον $L_{q'}(Y)$ με $\|\psi\|_{L_{q'}} = 1$, όπου q' είναι ο συζυγής εκθέτης του q. Ορίζουμε δυο μιγαδικές συναρτήσεις α και β ως εξής:

$$\alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{και} \quad \beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}.$$

Αν $t \in (0,1)$ τότε $\alpha(t) = \dfrac{1}{p}$ και $\beta(t) = \dfrac{1}{q}$ (βλέπε εκφώνηση). Φιξάρουμε $t \in (0,1)$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\phi_z = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\alpha(z)/\alpha(t)} e^{i\theta_k} \chi_{E_k}$$

και

$$\psi_z = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} |b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta(t))} e^{i\theta'_k} \chi_{E'_k} & \beta(t) \neq 1 \\ \psi & \beta(t) = 1 \end{cases}.$$

Τέλος, ορίζουμε

$$\Phi(z)=\int_{E'}(T\phi_z)\psi_z\ d\nu\,.$$

Τότε:

$$\Phi(z)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^{\alpha(z)/\alpha(t)}e^{i\theta_k}|b_j|^{(1-\beta(z))/(1-\beta(t))}e^{i\theta'_j}\int_{E'}\left(T\chi_{E_k}\right)\chi_{E'_j}, & \beta(t)\neq 1\\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^{\alpha(z)/\alpha(t)}|b_j|e^{i(\theta_k+\theta'_j)}\int_{E'}\left(T\chi_{E_k}\right)\chi_{E'_j} & \beta(t)=1\end{cases}$$

Η Φ είναι ολόμορφη και φραγμένη στη λωρίδα $0\le Re(z)\le 1$. Θα δείξουμε ότι $|\Phi(z)|\le M_0$ για $\mathrm{Re}(z)=0$ και $|\Phi(z)|\le M_1$ για $Re(z)=1$ και για κάποιες θετικές σταθερές M_0,M_1. Πράγματι, για $x\in E_j$ έχουμε

$$|\phi_{iy}(x)|=\left||a_j|^{\alpha(z)/\alpha(t)}e^{i\theta_j}\chi_{E_j}\right|=|a_j|^{\alpha(z)/\alpha(t)}=\left|e^{p_0^{-1}p\log|a_j|}e^{iyp\left(p_1^{-1}-p_0^{-1}\right)\log|a_j|}\right|$$

$$=\left|e^{p_0^{-1}p\log|a_j|}\right|=|a_j|^{p/p_0}=|\phi(x)|^{p/p_0}\,.$$

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε $|\psi_{iy}(x)|=|\psi(x)|^{\left(1-q_0^{-1}\right)/\left(1-q^{-1}\right)}=|\psi(x)|^{q'/q'_0}$, όπου q_0,q'_0 είναι οι συζυγείς εκθέτες των q,q_0. Τότε

$$|\Phi(iy)|\le\|T\phi_{iy}\|_{q_0}\|\psi_{iy}\|_{q'_0}\le M_0\|\phi_{iy}\|_{p_0}\|\psi_{iy}\|_{q'_0}=M_0\|\phi\|_p^{p/p_0}\|\psi\|_{q'}^{q'/q_0}=M_0\,.$$

Με την ίδια λογική προκύπτει ότι $|\phi_{1+iy}|=|\phi|^{p/p_1}$, $|\psi_{1+iy}|=|\psi|^{q'/q'_1}$ και

$$|\Phi(1+iy)|\le\|T\phi_{1+iy}\|_{q_1}\|\psi_{1+iy}\|_{q'_1}\le M_1\|\phi_{1+iy}\|_{p_1}\|\psi_{1+iy}\|_{q'_1}=M_1\|\phi\|_p^{p/p_1}\|\psi\|_{q'}^{q'/q_1}=M_1\,.$$

Αρα η Φ ικανοποιεί το Λήμμα τριών γραμμών και έτσι

$$|\Phi(t+iy)|=\left|\int_{E'}(T\phi_z)\psi_z\right|\le M_0^{1-t}M_1^t,\ \ t\in(0,1)\,.$$

(β) Εφόσον η ψ_z είναι τυχαία απλή συνάρτηση στον $L_{q'}$, από το Λήμμα Α προκύπτει άμεσα ότι $T\phi_z\in L_q$ και

$$\|T\phi\|_q\le M_0^{1-t}M_1^t,\ \ t\in(0,1),\ \phi \text{ απλή με } \|\phi\|_p=1\,.$$

(γ) Για να επεκτείνουμε την παραπάνω σ' όλο τον L_p, απλά θυμόμαστε ότι ο χώρος των απλών συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L_{q'}$. Ετσι αν $f \in L_p$ και $g = Tf$ τότε $Tf = \lim_n T\phi_n$, όπου $\{\phi_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων με $f_n \to f$ ως προς τη νόρμα. Από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\|Tf\|_q \le \lim_n \|T\phi_n\|_q \le M_0^{1-t} M_1^t \lim_n \|\phi_n\|_p \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p .$$

Αν $p_0 = p = p_1$, τότε από την Πρόταση Γ.5 και για $q_0 < q < q_1$ έχουμε

$$\|Tf\|_q \le \|Tf\|_{q_0}^{1-t} \|Tf\|_{q_1}^t \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p . \qquad \blacksquare$$