Νικόλαος Δ. Ατρέας

Στοιχεία Γραμμικής Αλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας

Α.Π.Θ.

Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής σχολής

Θεσσαλονίκη 2013

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Πίνακες. σελ. 4

1.1. Γενικά.
1.2. Είδη πινάκων. Τετραγωνικοί πίνακες.
1.3. Είδη τετραγωνικών πινάκων.
1.4. Πράξεις με πίνακες.
1.5. Ιδιότητες των πράξεων πινάκων.
1.6. Άλλες χρήσιμες ιδιότητες.
Ασκήσεις.

Κεφάλαιο 2: Γραμμικά συστήματα. σελ. 25

2.1. Αναγωγή πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Απαλοιφή Gauss. Τάξη πίνακα.
2.2. Επίλυση γραμμικών συστημάτων με επαυξημένο πίνακα.
Ασκήσεις.

Κεφάλαιο 3: Ορίζουσες. σελ. 45

3.1. Ορισμοί.
3.2. Ιδιότητες οριζουσών.
3.3. Εφαρμογές οριζουσών.
Ασκήσεις.

Κεφάλαιο 4: Ευκλείδιοι χώροι. σελ. 64

4.1 Ορισμοί.
4.2. Πράξεις με διανύσματα.
4.3. Διάνυσμα θέσης. Καρτεσιανό σύστημα αξόνων.
4.4. Οι χώροι $\mathbb{R}^n$. Γραμμική ανεξαρτησία/εξάρτηση διανυσμάτων. Βάση.
4.5. Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.
4.6. Εξωτερικό και μικτό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.
Ασκήσεις.

Κεφάλαιο 5: Εξισώσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο. σελ. 82

5.1. Εξισώσεις ευθείας στο $\mathbb{R}^3$.

5.1.1. Διανυσματική εξίσωση ευθείας που διέρχεται από σημείο Α και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{b}$. Παραμετρικές και συμμετρικές εξισώσεις ευθείας.
5.1.2. Εξισώσεις ευθείας που διέρχεται από δυο σημεία.
5.1.3. Σχετικές θέσεις δυο ευθειών στο χώρο.
5.2. Εξισώσεις επιπέδου στο χώρο $\mathbb{R}^3$.
5.2.1. Ορισμός. Αναλυτική εξίσωση επιπέδου.
5.2.2. Εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από σημείο και είναι παράλληλο σε δυο μη συγγραμικά διανύσματα.
5.2.3. Εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία.
5.2.4. Απόσταση σημείου από επίπεδο.
Ασκήσεις.

Κεφάλαιο 6: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα τετραγωνικών πινάκων. σελ. 97

6.1 Ορισμοί.
6.2. Διαγωνοποίηση πίνακα.
6.3. Ιδιότητες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.
Ασκήσεις.

Κεφάλαιο 7: Δευτεροβάθμιες καμπύλες στο επίπεδο και δευτεροβάθμιες επιφάνειες. σελ. 108

7.1. Δευτεροβάθμιες καμπύλες στο επίπεδο.
7.2. Δευτεροβάθμιες επιφάνειες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πίνακες

1.1 Γενικά

Εστω $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ είναι το σώμα* των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών αντιστοίχως. Στο εξής όταν γράφουμε F θα εννοούμε είτε το $\mathbb{R}$ είτε το $\mathbb{C}$.

Ορισμός 1.1 *Εστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $n, m \in \mathbb{N}$. Κάθε ορθογώνια διάταξη $m \cdot n$ αριθμών $A_{ij} \in F$ της μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix},$$

καλείται πίνακας $A = \left(A_{ij}\right)$ διάστασης $m \times n$ (ή $m \times n$ πίνακας A) με στοιχεία (ή συντελεστές) A_{ij}. Αν $F = \mathbb{R}$ τότε ο A καλείται ***πραγματικός πίνακας*** *ενώ αν $F = \mathbb{C}$ τότε ο A καλείται* ***μιγαδικός πίνακας****. Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το F συμβολίζεται με $M_{m \times n}\left(F\right)$.*

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι κάθε γραμμή και στήλη ενός πίνακα A ορίζει μονοσήμαντα τη θέση κάθε στοιχείου A_{ij} μέσω των δεικτών i και j. Ο πρώτος δείκτης (δηλ. ο δείκτης i) δηλώνει πάντα ότι το στοιχείο A_{ij} είναι τοποθετημένο στην $i-$γραμμή του πίνακα A, ενώ ο δεύτερος δείκτης (δηλ. ο δείκτης j) δηλώνει πάντα ότι το στοιχείο A_{ij} είναι τοποθετημένο στη $j-$στήλη του πίνακα A. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τον 2×3 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

* Με τον όρο **σώμα** εννοούμε ότι το $\mathbb{R}$ (ή το $\mathbb{C}$) είναι εφοδιασμένα με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/σμού πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών.

τότε $A_{23} = -\sqrt{2},\ A_{21} = -2,\ A_{12} = 1$ κλπ. Από τα παραπάνω εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

είναι $1 \times 4,\ 2 \times 1$ και 2×2 πίνακες αντιστοίχως (ή ισοδύναμα είναι πίνακες διάστασης $1 \times 4,\ 2 \times 1$ και 2×2 αντιστοίχως) με στοιχεία από το $\mathbb{C}$ όσον αφορά τον *A* και από το $\mathbb{R}$ όσον αφορά τους πίνακες *B* και *C*.

Ορισμός 1.2 *Εστω πίνακας* $A \in M_{m \times n}(F)$: $A = (A_{ij})$. *Τα στοιχεία*

$$A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{kk},$$

όπου $k = \min\{m, n\}$ *καλούνται στοιχεία της* ***κυρίας διαγωνίου*** *του πίνακα A.*

Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 10 \end{pmatrix},$$

τότε το $A_{11} = 2$ είναι το μόνο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του *A*, ενώ τα στοιχεία $B_{11} = -2,\ B_{22} = 10$ είναι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του *B*.

Ορισμός 1.3 (Ισότητα πινάκων) *Εστω* $A, B \in M_{m \times n}(F)$: $A = (A_{ij}),\ B = (B_{ij})$. *Θα λέμε ότι οι πίνακες* A *και* B *είναι* ***ίσοι*** *και θα γράφουμε* $A = B$ *αν και μόνον αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, δηλαδή* $A_{ij} = B_{ij}$ *για κάθε* $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

Σημείωση: Συνήθως συμβολίζουμε έναν πίνακα με κεφαλαία γράμματα της αγγλικής αλφαβήτου. Δηλαδή *A,B,C,* κλπ. Ισοδύναμοι συμβολισμοί στη βιβλιογραφία είναι οι ακόλουθοι:
$A = (A_{ij})$ ή $A = (A_{i,j})$ ή $A = (a_{ij})$ ή $A = (a_{i,j})$ ή $A = [A_{ij}]$ ή $A = [A_{i,j}]$ ή $A = [a_{ij}]$ ή $A = [a_{i,j}]$.

1.2 Είδη πινάκων. Τετραγωνικοί πίνακες.

Ενας πίνακας διάστασης $1\times n$ με στοιχεία από το F καλείται και ως ***πίνακας γραμμή*** ενώ ένας πίνακας διάστασης $m\times 1$ καλείται και ως ***πίνακας στήλη***. Σημειώνουμε ότι ένας πίνακας γραμμή (ή στήλη) μπορεί να θεωρηθεί και ως ένα διάνυσμα με τις καρτεσιανές συντεταγμένες του να δίνονται από τα στοιχεία του πίνακα.

Εστω $A\in M_{m\times n}(F)$: $A=\left(A_{ij}\right)$.

Αν $A_{ij}=0$ για κάθε $i=1,...,m$ και $j=1,...,n$ τότε ο A καλείται ***μηδενικός*** πίνακας, συμβολικά $\mathbf{0}_{m\times n}$.

Καλούμε ***ανάστροφο*** του A, έναν νέο $n\times m$ πίνακα, συμβολικά A^T, με στοιχεία

$$\left(A^T\right)_{ij}=A_{ji},\quad i=1,...,n,\ j=1,...,m.$$

Για παράδειγμα αν $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, τότε $A^T=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.

Δηλαδή οι γραμμές του πίνακα A είναι στήλες του αναστρόφου πίνακα A^T (και οι στήλες του A είναι γραμμές του A^T).

Καλούμε ***συζυγή*** του A, έναν νέο $m\times n$ πίνακα, συμβολικά $\overline{A}$, με στοιχεία

$$\left(\overline{A}\right)_{ij}=\overline{A_{ij}},\ i=1,...,m,\ j=1,...,n.$$

Για παράδειγμα αν $A=\begin{pmatrix}-3i & 1 & 1+i\end{pmatrix}$, τότε $\overline{A}=\begin{pmatrix}3i & 1 & 1-i\end{pmatrix}$.
Καλούμε ***συζυγή ανάστροφο*** του A έναν έναν νέο $n\times m$ πίνακα, συμβολικά A^*, με στοιχεία

$$\left(A^*\right)_{ij}=\overline{A_{ji}},\ i=1,...,n,\ j=1,...,m.$$

1.3. Τετραγωνικοί πίνακες.

Ορισμός 1.4 *Ενας πίνακας A που έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών καλείται* ***τετραγωνικός πίνακας****. Δηλαδή ένας $m \times n$ πίνακας A είναι τεραγωνικός αν $m = n$. Στην περίπτωση αυτή αντί να γράφουμε $A \in M_{n\times n}(F)$ θα γράφουμε απλά $A \in M_n(F)$.*

Εστω $A \in M_n(F)$: $A = (A_{ij})$. Τότε:

- ο A καλείται ***συμμετρικός*** αν $A_{ij} = A_{ji}$ $\forall i, j = 1,...,n$. Με άλλα λόγια ο A είναι συμμετρικός αν ταυτίζεται με τον ανάστροφό του A^T, δηλαδή $A = A^T$.

- ο A καλείται ***αντισυμμετρικός*** αν $A_{ij} = -A_{ji}$ $\forall i, j = 1,...,n$. Με άλλα λόγια ο A είναι αντισυμμετρικός αν ταυτίζεται με τον αντίθετο του αναστρόφου του, δηλαδή $A = -A^T$.

- ο A καλείται ***Ερμητιανός*** αν $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ $\forall i, j = 1,...,n$. Με άλλα λόγια ο A είναι Ερμητιανός αν ταυτίζεται με τον συζυγή ανάστροφό του A^*, δηλαδή $A = A^*$.

- ο A καλείται ***Αντιερμητιανός*** αν $A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$ $\forall i, j = 1,...,n$. Με άλλα λόγια ο A είναι Αντιερμητιανός αν ταυτίζεται με τον αντίθετο του συζυγή αναστρόφου του, δηλαδή $A = -A^*$.

- ο A καλείται ***διαγώνιος*** αν $A_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$. Για παράδειγμα οι 3×3 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  είναι διαγώνιοι. Στην ειδική περίπτωση όπου $A_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$ και $A_{ii} = 1$, $i = 1,...,n$, τότε ο A καλείται ***μοναδιαίος πίνακας*** και συμβολίζεται ως I_n. Για παράδειγμα οι πίνακες

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι μοναδιαίοι.

- ο A εκαλείται ***άνω τριγωνικός*** αν $A_{ij} = 0 \ \ \forall i > j$. Ομοίως θα λέμε ότι ο A είναι ***κάτω τριγωνικός*** αν ισχύει $A_{ij} = 0 \ \ \forall i < j$. Για παράδειγμα ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι άνω τριγωνικός ενώ ο 3×3 πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι κάτω τριγωνικός.

1.4 Πράξεις με πίνακες.

Ορισμός 1.5 (Αθροισμα πινάκων) *Εστω* $A, B \in M_{m\times n}(F)$: $A=(A_{ij})$, $B=(B_{ij})$ *είναι δύο* $m\times n$ *πίνακες. Καλούμε άθροισμα των πινάκων* A *και* B *έναν νέο* $m\times n$ *πίνακα* $A+B$ *με στοιχεία*

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij},\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

Για παράδειγμα αν $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} -8 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, τότε

$$A+B=\begin{pmatrix} 2-8 & 1+5 & 0+3 \\ -4+2 & 3+0 & -1+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 1.6 (Γινόμενο αριθμού επί πίνακα) *Εστω* $k\in F$ *και* $A=(A_{ij})$ *είναι ένας* $m\times n$ *πίνακας. Καλούμε γινόμενο του αριθμού* k *με τον πίνακα* A *έναν νέο* $m\times n$ *πίνακα* kA *με στοιχεία*

$$(kA)_{ij} = ka_{ij},\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

Για παράδειγμα αν $k=-2$ και $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, τότε

$$-2A=(-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 2 \\ (-2)\cdot(-3) & (-2)\cdot(-2) \\ (-2)\cdot 2 & (-2)\cdot(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 1.7 (Γινόμενο πινάκων) *Εστω* $A=(A_{ij})$ *είναι ένας* $m\times n$ *πίνακας και* $B=(B_{js})$ *είναι ένας* $n\times k$ *πίνακας. Καλούμε γινόμενο των πινάκων* A *και* B *έναν νέο* $m\times k$ *πίνακα* $A\cdot B$ *με στοιχεία*

$$\left(A\cdot B\right)_{is}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{js},\quad i=1,\ldots,m,\ s=1,\ldots,k.$$

Για παράδειγμα αν $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}a & c & e\\ b & d & f\end{pmatrix}$, τότε

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & c & e\\ b & d & f\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot a+2\cdot b & 1\cdot c+2\cdot d & 1\cdot e+2\cdot f\\ (-3)\cdot a+(-2)\cdot b & (-3)\cdot c+(-2)\cdot d & (-3)\cdot e+(-2)\cdot f\\ 2\cdot a+(-4)\cdot b & 2\cdot c+(-4)\cdot d & 2\cdot e+(-4)\cdot f\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+2b & c+2d & e+2f\\ -3a-2b & -3c-2d & -3e-2f\\ 2a-4b & 2c-4d & 2e-4f\end{pmatrix}.$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι το γινόμενο $A\cdot B$ δύο πινάκων A και B ορίζεται μόνον όταν

Αριθμός στηλών του πίνακα A = ***αριθμό γραμμών του πίνακα*** B.

Τότε για να υπολογίσουμε το στοιχείο της i-γραμμής και s-στήλης του πίνακα $A\cdot B$ εργαζόμαστε ως εξής:

πολλαπλασιάζουμε το 1^{ο} στοιχείο της i-γραμμής του πίνακα A με το 1^{ο} στοιχείο της s-στήλης του πίνακα B, στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το 2^{ο} στοιχείο της i-γραμμής του πίνακα A με το 2^{ο} στοιχείο της s-στήλης του πίνακα B κλπ και στο τέλος αθροίζουμε όλα τα γινόμενα που έχουν προκύψει.

<u>Σημείωση</u>: Η αφαίρεση δύο $m\times n$ πινάκων A και B ορίζεται ως άθροισμα του A με τον ***αντίθετο πίνακα*** του B ο οποίος είναι ο πίνακας $(-1)B=-B$. Δηλαδή

$$A - B = A + (-B).$$

<u>Προσοχή</u>: Δεν ορίζεται διαίρεση πινάκων.

Μπορούμε να ορίσουμε δυνάμεις ενός πίνακα A υπό την προϋπόθεση ότι ο A είναι τετραγωνικός πίνακας. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Ορισμός 1.8 (Δύναμη τετραγωνικού πίνακα) *Εστω A είναι ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας και $k \in \mathbb{N}$. Τότε ορίζουμε την k-δύναμη του A να είναι ο $n \times n$ πίνακας*

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-\phi o \rho \grave{\varepsilon} \varsigma}.$$

Ορισμός 1.9 (Αντίστροφος τετραγωνικού πίνακα) *Εστω A είναι ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας. Τότε ο A καλείται* ***αντιστρέψιμος*** *αν υπάρχει $n \times n$ πίνακας B τέτοιος ώστε*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

όπου ο I_n είναι ο μοναδιαίος πίνακας (βλέπε σελ. 4). Σ' αυτή την περίπτωση ο πίνακας B καλείται ***αντίστροφος*** *του πίνακα A και γράφουμε $B = A^{-1}$. Αρα*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n. \tag{1}$$

Παρατηρήσεις: (α) Ο μοναδιαίος πίνακας I_n παίζει τον ρόλο της μονάδας στο χώρο των τετραγωνικών πινάκων. Δηλαδή η γνωστή ιδιότητα «το γινόμενο οποιουδήποτε αριθμού x με το 1 αφήνει τον αριθμό x αναλλοίωτο» μεταφράζεται στους πίνακες ως εξής: «Το γινόμενο οποιουδήποτε $m \times n$ πίνακα A με το μοναδιαίο πίνακα I_n αφήνει τον πίνακα A αναλλοίωτο».

(β) Με την ίδια λογική, όπως ο αντίστροφος ενός μη μηδενικού αριθμού x είναι ο $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ (διότι $x \cdot x^{-1} = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$) έτσι και ο αντίστροφος A^{-1} **τετραγωνικού** πίνακα A (αν υπάρχει) ικανοποιεί την (1).

(γ) Ο αντίστροφος τετραγωνικού πίνακα A (όταν υπάρχει) είναι μοναδικός.

(δ) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας τότε μπορούμε να ορίσουμε δυνάμεις του A με εκθέτη αρνητικό ακέραιο ως εξής:

$$A^{-k} = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{k-\phi o \rho \grave{\varepsilon} \varsigma}.$$

(ε) Εστω A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε ο A καλείται ***ορθομοναδιαίος*** (ή ***ορθοκανονικός***) αν ισχύει

$$A^{-1} = A^{T}.$$

1.5 Ιδιότητες των πράξεων πινάκων.

Εστω $A, B, C \in M_{m\times n}(F)$, $\mathbf{0}$ είναι ο μηδενικός πίνακας διάστασης $m \times n$ και $k, \lambda \in F$. Τότε για την πρόσθεση πινάκων ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική),
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (προσεταιριστική),
- υπάρχει μοναδικός πίνακας (ο μηδενικός) έτσι ώστε

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A,$$

- για κάθε πίνακα A υπάρχει μοναδικός πίνακας (ο αντίθετος του A) έτσι ώστε

$$A + (-A) = -A + A = \mathbf{0}.$$

Οσον αφορά το γινόμενο αριθμού επί πίνακα έχουμε:

- $k(A + B) = kA + kB,$
- $(k + \lambda)A = kA + \lambda A,$
- $(k\lambda)A = k(\lambda A) = \lambda(kA).$

Τέλος για το γινόμενο πινάκων έχουμε (υπό την προϋπόθεση ότι οι ακόλουθες πράξεις με πίνακες είναι καλά ορισμένες):

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ (προσεταιριστική).}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ (επιμεριστική).}$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \text{ (επιμεριστική).}$$

$$k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB).$$

Εστω τώρα $A \in M_n(F)$, I_n είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης $n \times n$ και $\mathbf{0}$ είναι ο μηδενικός πίνακας διάστασης $n \times n$. Τότε ισχύει:

- $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ και $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$.

- $A^k \cdot A^\lambda = A^{k+\lambda}$, $\left(A^n\right)^k = A^{nk}$, $(\mu A)^k = \mu^k A^k$, $k, \lambda \in \mathbb{N}$.

<u>Προσοχή</u>: (α) Εν γένει ***<u>ΔΕΝ</u>*** ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για το γινόμενο πινάκων. Δηλαδή γενικά ισχύει $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Κατά συνέπεια εν γένει ***<u>ΔΕΝ</u>*** ισχύει και η ιδιότητα $(A \cdot B)^k = A^k \cdot B^k$ όπου A, B τετραγωνικοί πίνακες και $k \in \mathbb{N}$.

Πίνακες που ικανοποιούν την ιδιότητα $A \cdot B = B \cdot A$ καλούνται ***αντιμεταθετικοί*** πίνακες.

(β) Αν $A \cdot B = \mathbf{0}$ ***<u>ΔΕΝ</u>*** ισχύει πάντα $A = \mathbf{0}$ ή $B = \mathbf{0}$. Κατά συνέπεια ***<u>ΔΕΝ</u>*** ισχύει πάντα $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$. Αν όμως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε ισχύει $A \cdot B = \mathbf{0} \Rightarrow B = \mathbf{0}$. Γενικά στην απαλοιφή πινάκων πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί.

1.6 Άλλες χρήσιμες ιδιότητες.

- $\left(A^T\right)^T = A$. Ομοίως $\left(A^*\right)^* = A$.

- $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$. Ομοίως $\left(A+B\right)^* = A^* + B^*$.

- $\left(A\cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T$. Ομοίως $\left(A\cdot B\right)^* = B^* \cdot A^*$.

- Αν A, B είναι τετραγωνικοί αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε:

$$\left(A\cdot B\right)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες και αποδεικνύονται εύκολα με χρήση των ορισμών.

- Αν A, B είναι τετραγωνικοί και αντιμεταθετικοί πίνακες (δηλ. $A\cdot B = B\cdot A$) και $k \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει το δυωνυμικό ανάπτυγμα

$$\left(A+B\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}.$$

Λυμένες Ασκήσεις

1. Εστω $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 0 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 9 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A+B,\ 2A-3B^T,\ A\cdot B,\ C^T+2A\cdot B,\ B\cdot A,\ 3C+\left(A\cdot B\right)^T.$$

Λύση: Η παράσταση $A+B$ δεν έχει νόημα **διότι η πρόσθεση πινάκων ορίζεται υπό την προϋπόθεση ότι οι πίνακες A και B έχουν τις ίδιες διαστάσεις**. Εφόσον ο A είναι πίνακας 2×3 και ο B είναι πίνακας 3×2 το άθροισμα $A+B$ δεν ορίζεται.

- Η παράσταση $2A-3B^T$ ορίζεται διότι ο A είναι πίνακας 2×3 και ο B^T (ο ανάστροφος του B) είναι επίσης πίνακας 2×3 (αφού ο B είναι πίνακας 3×2). Εχουμε λοιπόν

$$2A-3B^T=2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -4 & 16 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & -21 & +12 \\ -15 & 0 & -27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-3 & 6-21 & 0+12 \\ -4-15 & 16+0 & -2-27 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -15 & 12 \\ -19 & 16 & -29 \end{pmatrix}.$$

- Η παράσταση $A\cdot B$ ορίζεται διότι ο A είναι πίνακας 2×3 και ο B είναι πίνακας 3×2, **δηλαδή το πλήθος των στηλών του A ισούται με το πλήθος των γραμμών του B**. Εχουμε λοιπόν

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 0 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 7+0\cdot(-4) & 2\cdot 5+3\cdot 0+0\cdot 9 \\ -2\cdot 1+8\cdot 7+(-1)\cdot(-4) & -2\cdot 5+8\cdot 0+(-1)\cdot 9 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2+21+0 & 10+0+0 \\ -2+56+4 & -10+0-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 10 \\ 58 & -19 \end{pmatrix}.$$

- Η παράσταση $C^T+2A\cdot B$ δεν έχει νόημα διότι η πρόσθεση πινάκων ορίζεται υπό την προϋπόθεση ότι όλοι οι προσθετέοι έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Παρατηρούμε ότι ο C^T είναι πίνακας 3×3 (αφού ο C είναι πίνακας 3×3) ενώ όπως είδαμε παραπάνω το γινόμενο $A\cdot B$ είναι πίνακας 2×2, άρα και ο $2A\cdot B$ είναι επίσης πίνακας 2×2. Επομένως το άθροισμα $C^T+2A\cdot B$ δεν ορίζεται.

- Η παράσταση $B\cdot A$ ορίζεται διότι ο B είναι πίνακας 3×2 ενώ ο A είναι πίνακας 2×3, δηλαδή το πλήθος των στηλών του B ισούται με το πλήθος των γραμμών του A. Εχουμε λοιπόν

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 0 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+5\cdot(-2) & 1\cdot 3+5\cdot 8 & 1\cdot 0+5\cdot(-1) \\ 7\cdot 2+0\cdot(-2) & 7\cdot 3+0\cdot 8 & 7\cdot 0+0\cdot(-1) \\ (-4)\cdot 2+9\cdot(-2) & (-4)\cdot 3+9\cdot 8 & (-4)\cdot 0+9\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2-10 & 3+40 & 0-5 \\ 14+0 & 21+0 & 0-0 \\ -8-18 & -12+72 & -0-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 43 & -5 \\ 14 & 21 & 0 \\ -26 & 60 & -9 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι $A\cdot B\neq B\cdot A$.

- Η παράσταση $3C+(A\cdot B)^T$ δεν έχει νόημα διότι η πρόσθεση πινάκων ορίζεται υπό την προϋπόθεση ότι όλοι οι προσθετέοι έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Παρατηρούμε ότι ο C είναι πίνακας 3×3 (άρα και ο

$3C$ είναι επίσης πίνακας 3×3) ενώ όπως είδαμε παραπάνω το γινόμενο $A\cdot B$ είναι πίνακας 2×2, άρα και ο $\left(A\cdot B\right)^T$ είναι επίσης πίνακας 2×2. Επομένως το άθροισμα $3C+\left(A\cdot B\right)^T$ δεν ορίζεται. □

2. Να βρεθούν όλοι οι πίνακες $X=\left(X_{ij}\right)$ με στοιχεία $X_{ij}\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $A\cdot X=X\cdot A$, όπου $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

Λύση: Είναι εύκολο να δούμε ότι για να ορίζονται τα γινόμενα $A\cdot X, X\cdot A$ θα πρέπει ο $X=\left(X_{ij}\right)$ να είναι πίνακας 2×2. Τότε έχουμε:

$$A\cdot X=X\cdot A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}X_{11}-X_{21} & X_{12}-X_{22}\\ 2X_{11}+4X_{21} & 2X_{12}+4X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{11}+2X_{12} & -X_{11}+4X_{12}\\ X_{21}+2X_{22} & -X_{21}+4X_{22}\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}X_{11}-X_{21}=X_{11}+2X_{12}\\ X_{12}-X_{22}=-X_{11}+4X_{12}\\ 2X_{11}+4X_{21}=X_{21}+2X_{22}\\ 2X_{12}+4X_{22}=-X_{21}+4X_{22}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-X_{21}=2X_{12}\\ X_{11}-X_{22}=3X_{12}\\ 2X_{11}+3X_{21}=2X_{22}\\ 2X_{12}=-X_{21}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-X_{21}=2X_{12}\\ X_{11}-X_{22}=3X_{12}\\ 2X_{11}+3\cdot\left(-2X_{12}\right)=2X_{22}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-X_{21}=2X_{12}\\ X_{11}-X_{22}=3X_{12}\\ X_{11}-3X_{12}=X_{22}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-X_{21}=2X_{12}\\ X_{11}-X_{22}=3X_{12}\end{cases}$$

Εστω $X_{12}=a$ και $X_{11}=b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Τότε $X_{21}=-2a$ και $X_{22}=b-3a$. Συνεπώς:

$$X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & a\\ -2a & b-3a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}.$$ □

3. Εστω A είναι τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ τέτοιος ώστε

$$A^3 - 3 \cdot A^2 + 3 \cdot A - 2 \cdot I_n = \mathbf{0}.$$

Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του. Επίσης δείξτε ότι ο $A - k \cdot I_n$, $k \in \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $k \neq 2$.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τετραγωνικός πίνακας B τέτοιος ώστε $A \cdot B = I$. Από τη σχέση $A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_n = \mathbf{0}$ έχουμε:

$$A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(A^3 - 3A^2 + 3A\right) = I_n$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \left(\frac{A^2 - 3A + 3I_n}{2}\right) = I_n.$$

Αρα ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = \dfrac{A^2 - 3A + 3I_n}{2}$.

Εστω τώρα $C = A - k \cdot I_n$. Τότε $A = C + k \cdot I_n$ και αντικαθιστώντας στην $A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_n = \mathbf{0}$ παίρνουμε:

$$\left(C + k \cdot I_n\right)^3 - 3\left(C + k \cdot I_n\right)^2 + 3\left(C + k \cdot I_n\right) - 2I_n = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(C^3 + 3k^2C + 3kC^2 + k^3I_n\right) - 3\left(C^2 + 2kC + k^2I_n\right) + 3\left(C + kI_n\right) - 2I_n = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow C^3 + 3\left(k-1\right)C^2 + \left(3k^2 - 6k + 3\right)C = -\left(k^3 - 3k^2 + 3k - 2\right)I_n. \qquad (2)$$

Επειδή $k^3 - 3k^2 + 3k - 2 = \left(k-2\right)\left(k^2 - k + 1\right)$ έχουμε

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 2 = \left(k-2\right)\left(k^2 - k + 1\right) \neq 0 \text{ για κάθε } k \neq 2.$$

Τότε για κάθε $k \neq 2$ η (2) γράφεται ως

$$C\cdot\left(C^2+3(k-1)C+\left(3k^2-6k+3\right)I_n\right)=-\left(k^3-3k^2+3k-2\right)I_n$$

και διαιρώντας και τα δύο μέλη με το μη μηδενικό αριθμό $-\left(k^3-3k^2+3k-2\right)$ προκύπτει το ζητούμενο. □

4. Αν $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ υπολογίστε τον πίνακα A^n.

Λύση: Εχουμε: $A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$

$$A^3=A^2\cdot A=-I_2\cdot A=-A,$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=\left(-I_2\right)\cdot\left(-I_2\right)=I_2.$$

Αρα:

$$A^n=\begin{cases} I_2, & n=4k\\ A, & n=4k+1\\ -I_2, & n=4k+2\\ -A, & n=4k+3\end{cases},\quad k\in\mathbb{N}.$$ □

5. Αν A,B είναι τετραγωνικοί $m\times m$ πίνακες και αν $A\cdot B-B\cdot A=I_m$ δείξτε ότι

$$A^{n+1}\cdot B-B\cdot A^{n+1}=(n+1)A^n,\ n=0,1,....$$

Λύση: Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο επαγωγής. Για *n=0* έχουμε:

$A\cdot B-B\cdot A=A^0=I_m$ που ισχύει λόγω υπόθεσης.

Εστω ότι η πρόταση ισχύει για $n=k$, $A^{k+1}\cdot B-B\cdot A^{k+1}=(k+1)A^k$.

Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n=k+1$. Πολ/ζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας $A^{k+1}\cdot B-B\cdot A^{k+1}=(k+1)A^k$ με A και έχουμε

$$A^{k+1}\cdot B - B\cdot A^{k+1} = (k+1)A^k \Rightarrow A\cdot\left(A^{k+1}\cdot B - B\cdot A^{k+1}\right) = (k+1)A^{k+1}$$

$$\Rightarrow A^{k+2}B - A\left(BA^{k+1}\right) = (k+1)A^{k+1} \Rightarrow A^{k+2}B - \left(AB\right)A^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$$

$$\Rightarrow A^{k+2}B - \left(BA + I_m\right)A^{k+1} = (k+1)A^{k+1} \text{ (λόγω της } AB - BA = I_m\text{)}$$

$$\Rightarrow A^{k+2}B - BA^{k+2} - I_m A^{k+1} = (k+1)A^{k+1} \Rightarrow A^{k+2}B - BA^{k+2} = (k+2)A^{k+1}$$

Αρα η πρόταση ισχύει για $n = k+1$ και συνεπώς ισχύει για κάθε n. □

6. Εστω A, B, Γ είναι τετραγωνικοί $m\times m$ πίνακες. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $A = B + \Gamma$ δείξτε ότι $BA^{-1}\Gamma = \Gamma A^{-1}B$.

Λύση: Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1}. Τότε:

$$BA^{-1}\Gamma = \left(A-\Gamma\right)A^{-1}\left(A-B\right) = \left(I_m - \Gamma A^{-1}\right)\left(A-B\right)$$

$$= A - B - \Gamma + \Gamma A^{-1}B = \mathbf{0} + \Gamma A^{-1}B = \Gamma A^{-1}B. \qquad \square$$

7. Αν A είναι πραγματικός συμμετρικός $n\times n$ πίνακας και B είναι $n\times m$ πίνακας δείξτε ότι ο πίνακας $B^T AB$ είναι συμμετρικός.

Λύση: $\left(B^T AB\right)^T = B^T A^T \left(B^T\right)^T = B^T A^T B = B^T AB$. □

Αλυτες ασκήσεις

1.1. Εστω $A=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 0\end{bmatrix}$. Υπολογίστε τις παραστάσεις $A+B^T$, $2C-3\left(AB\right)^2$, $BA+I_1$, $\left(A^T+B\right)\left(A+B^*\right)$.

Απάντ. $\begin{pmatrix}3\\1-i\end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix}-8+6i & 8+12i\\-12+3i & 3+6i\end{bmatrix}$, $3-i$, 11.

1.2. Αν $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ υπολογίστε τον πίνακα A^n. **Απάντ.** $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$

1.3. Υπολογίστε όλους τους πραγματικούς 2×2 πίνακες A που ικανοποιούν την εξίσωση $A^2=\mathbf{0}$.

Απάντ. $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\x & 0\end{pmatrix}$ ή $A=\begin{pmatrix}0 & x\\0 & 0\end{pmatrix}$ ή $A=\begin{pmatrix}x & y\\-x^2/y & -x\end{pmatrix}$.

1.4. Αν A είναι τετραγωνικός πίνακας έτσι ώστε $A^2=4A-3I$ δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του. Στη συνέχεια δείξτε ότι $A^n=\dfrac{3^n-1}{2}A+\dfrac{3-3^n}{2}I$, $n\in\mathbb{N}$.

Απάντ. $A^{-1}=\dfrac{4I-A}{3}$.

1.5. Εστω $A,B\in M_n\left(F\right)$ είναι αντιστρέψιμοι και υπάρχει ο $\left(A+B\right)^{-1}$. Υπολογίστε τον $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}$. **Απάντ.** $B\cdot\left(A+B\right)^{-1}\cdot A$

1.6. Δείξτε ότι το γινόμενο άνω (κάτω) τριγωνικών πινάκων είναι άνω (κάτω) τριγωνικός πίνακας.

1.7. Υπολογίστε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & x \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & y \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & z \end{pmatrix}$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαίος. **Απάντ.** $x=1/\sqrt{3},\ y=-\sqrt{2}/\sqrt{3},\ z=0$.

1.8. Εστω $A,B\in M_n(F)$. Δείξτε ότι:

- Ο πίνακας AA^T είναι συμμετρικός.
- Αν A,B είναι αντισυμμετρικοί τότε ο πίνακας $A\cdot B-B\cdot A$ είναι επίσης αντισυμμετρικός.
- Αν A,B είναι συμμετρικοί, τότε το γινόμενο $A\cdot B$ είναι συμμετρικός πίνακας αν και μόνον αν $A\cdot B=B\cdot A$.

1.9. Εστω $A\in M_n(F)$ τέτοιος ώστε $A^k=\mathbf{0}$. Δείξτε ότι ο πίνακας $I+A$ είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

Απάντ. $A^{-1}=A^{k-1}-A^{k-2}+\ldots+(-1)^k I_n$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα

$$x^k+1=(x+1)\left(x^{k-1}-x^{k-2}+\ldots+(-1)^k\right).$$

1.10. Αν A,B είναι τετραγωνικοί πίνακες δείξτε ότι

(α) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)\Leftrightarrow A\cdot B=B\cdot A$,

(β) $(A+B)^2=A^2+2A\cdot B+B^2\Leftrightarrow A\cdot B=B\cdot A$.

1.11. Να δείξετε ότι ο $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο πίνακα.

1.12. Υπολογίστε τον αντίστροφο του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Απάντ. $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/8 & 3/4 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$.

1.13. Δείξτε την προσεταιριστική ιδιότητα $\left(A\cdot B\right)\cdot C = A\cdot\left(B\cdot C\right)$.

1.14. Αν A,B είναι τετραγωνικοί πίνακες δείξτε ότι

$$\textbf{(α)}\ \left(A^{-1}\right)^{-1}=A,\ \textbf{(β)}\ \left(A\cdot B\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

1.15. Αν A,B είναι τετραγωνικοί πίνακες έτσι ώστε $A\cdot B = B\cdot A$ δείξτε ότι

$$\textbf{(α)}\ A^{-1}\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1},\ \textbf{(β)}\ B\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot B,\ \textbf{(γ)}\ A\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot A.$$

1.16. Αν A είναι τετραγωνικός πίνακας έτσι ώστε $A^2=A$ δείξτε ότι $A^k=A,\ k\in\mathbb{N}$.

1.17. Αν A,B είναι τετραγωνικοί πίνακες δείξτε ότι

$$\textbf{(α)}\ \left(A+B\right)^T=A^T+B^T,\ \textbf{(β)}\ \left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T,$$

$$\textbf{(γ)}\ \left(A+B\right)^*=A^*+B^*,\ \textbf{(δ)}\ \left(A\cdot B\right)^*=B^*\cdot A^*.$$

1.18. Αν A είναι συμμετρικός πίνακας δείξτε ότι ο $A+A^T$ είναι συμμετρικός ενώ ο $A-A^T$ είναι αντισυμμετρικός. Στη συνέχεια δείξτε ότι ο A μπορεί πάντα να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

1.19. Δείξτε ότι $A^2=I_n \Leftrightarrow \left(I_n-A\right)\cdot\left(I_n+A\right)=\mathbf{0}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γραμμικά Συστήματα

Στο Κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss που χρησιμοποιείται ευρύτατα για την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

2.1. Αναγωγή πίνακα σε κλιμακωτό. Απαλοιφή Gauss. Τάξη πίνακα.

Εστω $A = \left(A_{ij}\right)$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία $A_{ij} \in F$. Στο εξής θα συμβολίζουμε με

$$A_i = \left\{A_{ij} : j = 1,...,n\right\}$$

την i-γραμμή του πίνακα A.

Κάθε μία από τις ακόλουθες διαδικασίες καλείται ***στοιχειώδης πράξη στις γραμμές του πίνακα*** A:

- Αντιμετάθεση της γραμμής A_i με τη γραμμή A_j, συμβολικά $A_i \leftrightarrow A_j$.

- Αντικατάσταση της γραμμής A_i με τη γραμμή kA_i, $k \in F$, $k \neq 0$, συμβολικά $A_i \to kA_i$.

- Αντικατάσταση της γραμμής A_i με τη γραμμή $A_i + kA_j$ για κάποιο $k \in F$, συμβολικά $A_i \to A_i + kA_j$.

Ορισμός 2.1 *Ένας πίνακας $A \in M_{m\times n}(F)$ με στοιχεία από το σώμα F ($F = \mathbb{R}$ ή $F = \mathbb{C}$) καλείται* ***κλιμακωτός κατά γραμμές*** *αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

- *Σε κάθε γραμμή το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο εξ αριστερών είναι το 1. Το στοιχείο αυτό καλείται* ***καθοδηγητική μονάδα****.*

- *Το πρώτο 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή βρίσκεται πάντα εκ δεξιών του πρώτου 1 της προηγούμενης γραμμής.*

- *Ολες οι μηδενικές γραμμές (αν υπάρχουν) βρίσκονται κάτω από όλες τις μη μηδενικές γραμμές.*

Ορισμός 2.2 *Θα λέμε ότι ένας κλιμακωτός πίνακας είναι σε* ***ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών*** *αν το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.*

Για παράδειγμα οι πίνακες

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&3&0&1\\0&0&1&0&9\\0&0&0&1&9\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

είναι κλιμακωτοί κατά γραμμές και επιπρόσθετα ο A είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Περιγράφουμε τώρα τον αλγόριθμο του Gauss που μετατρέπει έναν $m\times n$ πίνακα A σε <u>κλιμακωτή μορφή γραμμών</u>.

- **Βήμα 1:**

(a) Επιλέγουμε την πρώτη μη μηδενική στήλη του A, έστω στη θέση j_0. Από τα μη μηδενικά στοιχεία της στήλης j_0 επιλέγουμε αυτό που βρίσκεται στη μικρότερη γραμμή, έστω A_{i_0,j_0}. Τότε αντιμεταθέτουμε την 1^{η} γραμμή με την i_0-γραμμή: $A_1 \leftrightarrow A_{i_0}$.

(b) Αντικαθιστούμε την 1^{η} γραμμή που προέκυψε μετά το (a) με τη γραμμή $A_{11}^{-1}\cdot A_1$. Δηλαδή: $A_1 \to A_{11}^{-1}\cdot A_1$.

(c) Αντικαθιστούμε όλες τις υπόλοιπες γραμμές $A_i,\ i=2,...,m$ του πίνακα A με τις γραμμές $A_i \to A_i - A_{i1}\cdot A_1$. Μετά το πέρας του βήματος 3 έχουμε καταλήξει σ' έναν $n\times n$ πίνακα $A^{(1)}$ του οποίου η 1^{η} στήλη είναι η $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{1\times m}$.

- **Βήμα 2:** Εστω $\widetilde{A_1}$ είναι ο $(m-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει με διαγραφή της $1^{\eta\varsigma}$ γραμμής και της 1^{η} στήλης του

πίνακα $A^{(1)}$ που προέκυψε στο βήμα 1. Επαναλαμβάνουμε τα (a)-(c) του βήματας 1 για τον πίνακα $\widetilde{A_1}$ ώστε να προκύψει πίνακας $A^{(2)}$ του οποίου η 1η στήλη να είναι η $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{1\times(m-1)}$. Τότε η 2η στήλη του αρχικού πίνακα μετασχηματίσθηκε στη στήλη $\begin{pmatrix} A_{12}^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}$.

- **Βήμα 3:** Εστω $\tilde{A}_2$ να είναι ο $(m-2)\times(n-2)$ πίνακας που προκύπτει με διαγραφή της 1ης γραμμής και της 1η στήλης του πίνακα $A^{(2)}$. επαναλαμβάνουμε τα (a)-(c) και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Ορισμός 2.3 *Εστω $A \in M_{m\times n}(F)$. Καλούμε* ***τάξη*** *ή* ***βαθμό*** *του πίνακα A, συμβολικά $rank(A)$ το πλήθος όλων των καθοδηγητικών μονάδων στην κλιμακωτή μορφή γραμμών του A.*

<u>Παρατηρήσεις:</u> (α) Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει άμεσα ότι η τάξη ενός $m\times n$ πίνακα A ικανοποιεί τη σχέση

$$rank(A) \le \min\{m,n\}.$$

(β) Η τάξη πίνακα A είναι φυσικός αριθμός καλά ορισμένος. Πράγματι αποδεικνύεται ότι αν $A \in M_{m\times n}(F)$ και $B,C \in M_{m\times n}(F)$ είναι δύο πίνακες σε κλιμακωτή μορφή γραμμών οι οποίοι προκύπτουν από τον A με χρήση διαφορετικών στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, τότε το πλήθος όλων των καθοδηγητικών μονάδων στην κλιμακωτή μορφή του A ***<u>είναι το ίδιο</u>*** είτε η κλιμακωτή μορφή του A ταυτίζεται με τον πίνακα B είτε με τον πίνακα C.

Θεώρημα 2.1 *Εστω A είναι ένας τετραγωνικός $n\times n$ πίνακας. Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ισχύει $rank(A)=n$.*

2.2. Επίλυση γραμμικών συστημάτων με επαυξημένο πίνακα.

Ορισμός 2.4 (γραμμικά συστήματα) *Καλούμε γραμμικό σύστημα* m *εξισώσεων με* n *αγνώστους κάθε σύστημα της μορφής*

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = B_1 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \ldots + A_{mn}x_n = B_m \end{cases}, \; A_{ij} \in \mathbb{R},\; B_i \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Το παραπάνω σύστημα (1) μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή πινάκων ως

$$A \cdot X = B,$$

όπου ο $m \times n$ *πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

καλείται ***πίνακας των συντελεστών*** *των αγνώστων* $x_1, \ldots, x_n$, *ο πίνακας*

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

καλείται ***πίνακας στήλη των σταθερών όρων****, ενώ ο πίνακας*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

καλείται ***πίνακας στήλη*** *των αγνώστων. Ο* $m \times (n+1)$ *πίνακας*

$$[A, B] = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} & | & B_1 \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} & | & B_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} & | & B_m \end{pmatrix}$$

καλείται ***επαυξημένος (ή επεκτεταμένος) πίνακας*** *του συστήματος. Αν ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους έχει τουλάχιστον μία λύση τότε λέμε ότι το σύστημα είναι* ***συμβιβαστό*** *ενώ αν δεν έχει καμία λύση τότε λέμε ότι είναι* ***ασυμβίβαστο*** *(ή* ***αδύνατο****). Αν ένα συμβιβαστό σύστημα έχει άπειρες λύσεις τότε καλείται* ***αόριστο****. Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία όλοι οι σταθεροί όροι του γραμμικού συστήματος εξισώσεων (1) είναι ίσοι με το μηδέν, δηλαδή $B_1 = \ldots = B_m = 0$ τότε λέμε ότι το γραμμικό σύστημα είναι* ***ομογενές****.*

Θεώρημα 2.2 *Εστω $A \cdot X = B$ είναι ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους όπως παραπάνω. Αν $[A,B]$ είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος και αν $[A',B']$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $[A,B]$ μετά από οποιονδήποτε στοιχειώδη μετασχηματισμό* ***<u>γραμμών</u>****, τότε το σύστημα $A' \cdot X = B'$ έχει το* ***ίδιο σύνολο λύσεων*** *με το αρχικό σύστημα $A \cdot X = B$.*

<u>Σημείωση:</u> Το Θεώρημα 2.2 είναι πολύ σημαντικό διότι μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο απαλοιφής του Gauss στον επαυξημένο πίνακα $[A,B]$ ώστε να μετασχηματισθεί σ' έναν πίνακα $[A',B']$ σε κλιμακωτή μορφή <u>γραμμών</u> χωρίς να επηρεασθούν οι λύσεις του αρχικού συστήματος. Αν κατά την πορεία μετασχηματισμού του πίνακα $[A,B]$ βρούμε μία γραμμή της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & | & c \end{pmatrix}$$

για κάποιο $c \neq 0$, τότε το σύστημα μας είναι **αδύνατο**. Αυτό συμβαίνει διότι μέσω των στοιχειωδών μετασχηματισμών που κάναμε κάποια από τις m εξισώσεις του αρχικού συστήματος πήρε τη μορφή

$$0 = c \quad (c \neq 0)$$

η οποία είναι αδύνατη άρα και το σύστημά μας είναι αδύνατο. Αν κατά την πορεία μετασχηματισμού του πίνακα $[A,B]$ βρούμε μία γραμμή της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

τότε μέσω των στοιχειωδών μετασχηματισμών που κάναμε κάποια από τις m εξισώσεις του αρχικού συστήματος πήρε τη μορφή

$$0 = 0,$$

η οποία ισχύει πάντα. Αρα κάποια εξίσωση «περισσεύει». Για το σύνολο λύσεων ενός γραμμικού συστήματος ισχύουν τα ακόλουθα:

Θεώρημα 2.3 *Έστω ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους της μορφής* $A \cdot X = B$. *Τότε:*

- *Αν* $rank([A,B]) \neq rank(A)$ *τότε το σύστημα είναι αδύνατο.*
- *Αν* $rank([A,B]) = rank(A)$ *τότε το σύστημα έχει λύσεις. Επιπλέον:*
  - *το σύστημα έχει μοναδική λύση αν* $rank([A,B]) = rank(A) = n$.
  - *το σύστημα έχει άπειρες λύσεις αν* $rank([A,B]) = rank(A) < n$.

Ειδικά αν το σύστημα είναι ομογενές, δηλαδή $A \cdot X = \mathbf{O}$, τότε προφανώς $rank([A,B]) = rank(A)$, άρα έχει πάντοτε λύσεις. Αυτό είναι και διαισθητικά αληθές αφού μια προφανής λύση ενός ομογενούς συστήματος είναι η μηδενική. Ετσι το παραπάνω Θεώρημα γίνεται:

Θεώρημα 2.4 *Ένα* ***ομογενές*** *γραμμικό σύστημα m εξισώσεων και n αγνώστων της μορφής* $A \cdot X = \mathbf{O}$ *έχει πάντοτε μία λύση (τη μηδενική).*

- *Αν* $rank(A) = n$ *τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (τη μηδενική).*
- *Αν* $rank(A) < n$ *τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.*

Σημείωση: Συνέπεια του Θεωρήματος 2.4 και του γεγονότος $rank(A) = \min\{m,n\}$ είναι ότι αν $m < n$, δηλαδή αν ο αριθμός εξισώσεων είναι μικρότερος του αριθμού των αγνώστων τότε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $A \cdot X = \mathbf{O}$ έχει πάντα άπειρες λύσεις.

Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν όλες οι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Λύση: Το σύστημα γράφεται υπό μορφή πινάκων ως

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Θα εργασθούμε με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss για τον επαυξημένο πίνακα

$$[A \mid B] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Εχουμε:

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{A_3 \to A_3 - 2A_1}{\overset{A_2 \to A_2 - A_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_2 \to A_2/2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{A_3 \to -6A_2 + A_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Αρα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 - x_4/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4 \cdot x_4/2 - 3x_4 \\ x_3 = x_4/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4/2 \end{cases}.$$

Θέτουμε $x_2 = c,\ x_4 = d,\quad c,d \in \mathbb{R}$. Τότε το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι:

$$\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) = \left(-2c-d,c,d/2,d\right) = \left(-2c,c,0,0\right) + \left(-d,0,d/2,d\right)$$

$$= c\left(-2,1,0,0\right) + d\left(-1,0,1/2,1\right),\ \ c,d \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

2. Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = a \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό.

Λύση: Από το Θεώρημα 2.3 για να είναι το σύστημα συμβιβαστό πρέπει και αρκεί $rank\left(\left[A,B\right]\right) = rank\left(A\right)$. Εχουμε λοιπόν:

$$\left[A,B\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ -3 & 1 & 1 & | & a \\ 4 & 1 & -2 & | & a \end{pmatrix} \underset{\substack{A_3 \to A_3 + 3A_1 \\ A_4 \to A_4 - 4A_1}}{\overset{A_2 \to A_2 - A_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -2 & -2 & | & -3 \\ 0 & 4 & 4 & | & 9+a \\ 0 & -3 & -6 & | & -12+a \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_2 \to -A_2/2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 4 & 4 & | & 9+a \\ 0 & -3 & -6 & | & -12+a \end{pmatrix} \underset{A_4 \to A_4 + 3A_2}{\overset{A_3 \to A_3 - 4A_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3+a \\ 0 & 0 & -3 & | & -15/2+a \end{pmatrix}. \quad (2)$$

$$\overset{A_3 \leftrightarrow A_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & -3 & | & -15/2+a \\ 0 & 0 & 0 & | & 3+a \end{pmatrix} \overset{A_3 \to -A_3/3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5/2-a/3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3+a \end{pmatrix}$$

Αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να έχει το σύστημα λύση είναι

$$rank\left(\left[A,B\right]\right)=rank\left(A\right)\Leftrightarrow 3+a=0\Leftrightarrow a=-3\,.$$

3. Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=a \\ 3x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$.

Λύση: Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gauss:

$$\left[A,B\right]=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -1 & | & a \\ 3 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}\underset{A_3\to A_3-3A_1}{\overset{A_2\to A_2-2A_1}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 5 & 1 & | & -2+a \\ 0 & 5 & 5 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_2\to A_2/5}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & | & (a-2)/5 \\ 0 & 5 & 5 & | & -3 \end{pmatrix}\overset{A_3\to A_3-5A_2}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & | & (a-2)/5 \\ 0 & 0 & 4 & | & -(a+1) \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_3\to A_3/4}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & | & (a-2)/5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -(a+1)/4 \end{pmatrix}.$$

Αρα έχουμε μοναδική λύση που προκύπτει άμεσα από τον τελευταία πίνακα ως εξής:

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=1 \\ x_2+x_3/5=(a-2)/5 \\ x_3=-(a+1)/4 \end{cases}\Rightarrow\ldots\Rightarrow\begin{cases} x_1=(5a+1)/20 \\ x_2=(5a-7)/20 \\ x_3=-(1+a)/4 \end{cases}.$$

4. Να εξεταστεί για ποιες τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=1 \\ -2x_1-x_2+x_3=b \\ x_1-x_2+2x_3=a \end{cases}$$

έχει **(a)** μοναδική λύση, **(b)** άπειρες λύσεις, **(c)** καμιά λύση.

Λύση: Εχουμε:

$$[A,B]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ -2 & -1 & 1 & | & b \\ 1 & -1 & 2 & | & a \end{pmatrix} \underset{A_3\to A_3-A_1}{\overset{A_2\to A_2+2A_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 1 & 2a+1 & | & b+2 \\ 0 & -2 & -a+2 & | & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_3\to A_3+2A_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 1 & 2a+1 & | & b+2 \\ 0 & 0 & 3a+4 & | & a+2b+3 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

<u>1η περίπτωση</u>: Εστω $3a+4\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -4/3$. Τότε

$$[A,B] \overset{A_3\to A_3/(3a+4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 1 & 2a+1 & | & b+2 \\ 0 & 0 & 1 & | & (a+2b+3)/(3a+4) \end{pmatrix}$$

οπότε παίρνουμε με προς τα πίσω αντικατάσταση

$$\begin{cases} x_1=(a^2-ab-2b+a-1)/(3a+4) \\ x_2=(-2a^2-ab+2b-a+5)/(3a+4) \\ x_3=(a+2b+3)/(3a+4) \end{cases}.$$

Αρα για κάθε $a\neq -4/3$ και για κάθε $b\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει την ανωτέρω μοναδική λύση.

<u>2η περίπτωση</u>: Εστω $3a+4=0 \Leftrightarrow a=-4/3$. Τότε η (3) γίνεται

$$[A,B]\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4/3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 & | & b+2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b+5/3 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

- Εστω $5/3+2b\neq 0 \Leftrightarrow b\neq -5/6$. Τότε το σύστημα είναι αδύνατο διότι ο επαυξημένος πίνακας έχει γραμμή της μορφής $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & | & c \end{pmatrix}$ για κάποιο $c\neq 0$.

- Εστω $5/3+2b=0 \Leftrightarrow b=-5/6$. Τότε το σύστημα (4) γίνεται:

$$[A,B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4/3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 & | & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Αρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις διότι

$$rank\left(\left[A,B\right]\right) = rank\left(A\right) = 2 < n = 3.$$

Τελικά:

$$\begin{cases} a \neq -4/3,\ b \in \mathbb{R} & \text{μοναδική λύση} \\ a = -4/3,\ b \neq -5/6, & \text{αδύνατη} \\ a = -4/3,\ b = -5/6 & \text{άπειρες λύσεις} \end{cases}.$$ □

5. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση: Θεωρούμε τον πίνακα

$$\left[A, I_3\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Gauss ώστε να μετασχηματίσουμε τον πίνακα $\left[A, I_3\right]$ στη μορφή $\left[I_3, B\right]$. Τότε $B = A^{-1}$. Εχουμε:

$$\left[A, I_3\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{A_2 \leftrightarrow A_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_1 \leftrightarrow A_1/2}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{A_3 \to A_3 + 3A_1}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & | & 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{A_3 \to A_3 - 5A_2/2}{\overset{A_1 \to A_1 - A_2/2}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/2 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19/2 & | & -5/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \overset{A_3 \leftrightarrow 2A_3/19}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/2 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5/19 & 3/19 & 2/19 \end{pmatrix}$$

$$\underset{A_2 \to A_2 + 2A_3}{\overset{A_1 \to A_1 - 5A_3/2}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3/19 & 2/19 & -5/19 \\ 0 & 1 & 0 & | & 9/19 & 6/19 & 4/19 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5/19 & 3/19 & 2/19 \end{pmatrix}.$$

Τελικά:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/19 & 2/19 & -5/19 \\ 9/19 & 6/19 & 4/19 \\ -5/19 & 3/19 & 2/19 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 9 & 6 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

6. Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \end{cases}.$$

Λύση: Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & | & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \underset{A_3 \to A_3 - 5A_1}{\overset{A_2 \to A_2 - 2A_1}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & | & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & | & -15 \end{pmatrix}.$$

$$\overset{A_3 \to A_3 - 2A_2}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix}.$$ Αρα το σύστημα είναι αδύνατο. $\square$

7. Εστω $a,b,c,\lambda \in \mathbb{R}$. Να επιλυθεί ως προς *x,y,z* το σύστημα

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=\lambda \\ a^2x+b^2y+c^2z=\lambda^2 \end{cases}.$$

Λύση: Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$[A,B]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ a & b & c & | & \lambda \\ a^2 & b^2 & c^2 & | & \lambda^2 \end{pmatrix} \underset{A_3\to A_3-a^2A_1}{\overset{A_2\to A_2-aA_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & b-a & c-a & | & \lambda-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & | & \lambda^2-a^2 \end{pmatrix}.$$

<u>Περίπτωση Α</u>: Εστω $b-a\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{b\neq a}$. Τότε από την παραπάνω έχουμε

$$[A,B] \overset{A_2\to A_2/(b-a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & (c-a)/(b-a) & | & (\lambda-a)/(b-a) \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & | & \lambda^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_3\to A_3+(a^2-b^2)A_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & (c-a)/(b-a) & | & (\lambda-a)/(b-a) \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & | & (\lambda-a)(\lambda-b) \end{pmatrix}.$$

<u>Υποπερίπτωση Α$_1$</u>: Εστω $(c-a)(c-b)\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{c\neq a}$ και $\boxed{c\neq b}$. Τότε από την παραπάνω έχουμε

$$[A,B] \overset{A_3\leftrightarrow A_3/((c-a)(c-b))}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & (c-a)/(b-a) & | & (\lambda-a)/(b-a) \\ 0 & 0 & 1 & | & (\lambda-a)(\lambda-b)/((c-a)(c-b)) \end{pmatrix}$$

Τότε προκύπτει με προς τα πίσω αντικατάσταση μοναδική λύση η

$$\begin{cases} x = \dfrac{(\lambda - b)(\lambda - c)}{(b-a)/(c-a)} \\ y = \dfrac{(\lambda - a)(c - \lambda)}{(b-a)/(c-b)} \\ z = \dfrac{(\lambda - a)(\lambda - b)}{(c-a)(c-b)} \end{cases}.$$

<u>Υποπερίπτωση Α$_2$</u>: Εστω $(c-a)(c-b)=0 \Leftrightarrow \boxed{c=a}$ ή $\boxed{c=b}$. Τότε

$$[A,B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & (c-a)/(b-a) & | & (\lambda-a)/(b-a) \\ 0 & 0 & 0 & | & (\lambda-a)(\lambda-b) \end{pmatrix},$$

οπότε αν $(\lambda-a)(\lambda-b) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq a$ και $\lambda \neq b$, το σύστημα είναι αδύνατο ενώ αν $\lambda = a$ ή $\lambda = b$ τότε το σύστημα είναι αόριστο. Ειδικότερα:

- αν $c=a$ και $\lambda = a$, τότε έχουμε:

$$[A,B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

συνεπώς

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-z \\ y=0 \end{cases},$$

άρα $(x,y,z) = (1-z,\ 0,\ z) = (1,0,0) + z(-1,0,1),\ z \in \mathbb{R}$.

- αν $c=a$ και $\lambda = b$, τότε έχουμε:

$$[A,B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & (\lambda-a)/(b-a) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

συνεπώς:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y=\dfrac{\lambda-a}{b-a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{\lambda-a}{b-a}-z \\ y=\dfrac{\lambda-a}{b-a} \end{cases},$$

άρα:

$$(x,y,z)=\left(1-\frac{\lambda-a}{b-a}-z,\ \frac{\lambda-a}{b-a},\ z\right)=\left(1-\frac{\lambda-a}{b-a},\frac{\lambda-a}{b-a},0\right)+z(-1,0,1),\ z\in\mathbb{R}$$

.

- αν $c=b$ και $\lambda=a$ τότε έχουμε:

$$[A,B]\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & (c-a)/(b-a) & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

συνεπώς:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+\dfrac{c-a}{b-a}z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{c-b}{b-a}z \\ y=-\dfrac{c-a}{b-a}z \end{cases}$$

άρα:

$$(x,y,z)=\left(1-\frac{c-b}{b-a}z,-\frac{c-a}{b-a}z,\ z\right)=(1,0,0)+z\left(-\frac{c-b}{b-a},-\frac{c-a}{b-a},1\right),\ z\in\mathbb{R}$$

- αν $c=b$ και $\lambda=b$ τότε έχουμε:

$$[A,B]\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & (c-a)/(b-a) & | & (\lambda-a)/(b-a) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

συνεπώς:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+\dfrac{c-a}{b-a}z=\dfrac{\lambda-a}{b-a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{\lambda-a}{b-a}+\dfrac{c-a}{b-a}z-z \\ y=\dfrac{\lambda-a}{b-a}-\dfrac{c-a}{b-a}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b-\lambda}{b-a}+\dfrac{c-b}{b-a}z \\ y=\dfrac{\lambda-a}{b-a}-\dfrac{c-a}{b-a}z \end{cases},$$

άρα:

$$(x,y,z)=\left(\frac{b-\lambda}{b-a}+\frac{c-b}{b-a}z,\frac{\lambda-a}{b-a}-\frac{c-a}{b-a}z,\ z\right)$$

$$=\left(\frac{b-\lambda}{b-a},\frac{\lambda-a}{b-a},0\right)+z\left(\frac{c-b}{b-a},-\frac{c-a}{b-a},1\right),\ z\in\mathbb{R}.$$

<u>Περίπτωση Β</u>: Εστω $b-a=0\Leftrightarrow\boxed{b=a}$. Τότε:

$$[A,B]\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & c-a & | & \lambda-a\\ 0 & 0 & c^2-a^2 & | & \lambda^2-a^2\end{pmatrix}.$$

<u>Υποπερίπτωση Β$_1$</u>: Εστω $c-a\neq 0\Leftrightarrow c\neq a$. Τότε:

$$[A,B]\overset{A_2\leftrightarrow A_2/(c-a)}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & (\lambda-a)/(c-a)\\ 0 & 0 & c^2-a^2 & | & \lambda^2-a^2\end{pmatrix}$$

$$\overset{A_3\to A_3+(a^2-c^2)A_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & (\lambda-a)/(c-a)\\ 0 & 0 & 0 & | & (\lambda-a)(\lambda-c)\end{pmatrix},$$

οπότε αν $(\lambda-a)(\lambda-c)\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq a$ και $\lambda\neq c$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ αν $\lambda=a$ ή $\lambda=c$ τότε το σύστημα είναι αόριστο. Ειδικότερα:

- αν $\lambda=a$ τότε:

$$[A,B]\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix},$$

συνεπώς:

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-y\\ z=0\end{cases},$$

άρα:

$$(x,y,z)=(1-y,y,0)=(1,0,0)+y(-1,1,0),\ y\in\mathbb{R}.$$

- αν $\lambda = c$ τότε:

$$[A,B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & (\lambda - a)/(c-a) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

συνεπώς:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = \dfrac{\lambda - a}{c - a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + \dfrac{c-\lambda}{c-a} \\ z = \dfrac{\lambda - a}{c-a} \end{cases},$$

άρα:

$$(x,y,z) = \left(-y + \frac{c-\lambda}{c-a}, y, \frac{\lambda - a}{c-a}\right) = \left(\frac{c-\lambda}{c-a}, 0, \frac{\lambda-a}{c-a}\right) + y(-1,1,0),\ y \in \mathbb{R}.$$

<u>Υποπερίπτωση Β$_2$</u>: Εστω $c - a = 0 \Leftrightarrow c = a$. Τότε:

$$[A,B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \lambda - a \\ 0 & 0 & 0 & | & \lambda^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

οπότε αν $(\lambda - a) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a$ τότε το σύστημα είναι αόριστο με λύση

$$(x,y,z) = (-y-z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1),$$

ενώ αν $\lambda \neq a$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο. □

Αλυτες Ασκήσεις.

2.1. Να επιλυθούν με τη μέθοδο Gauss τα γραμμικά συστήματα:

$$(A)\ \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}, \qquad (B)\ \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases},$$

$$(C)\ \begin{cases} -6x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \qquad (D)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + 4x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases}.$$

Απάντ.

- Αόριστο.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,0,0,1) + x_2(0,1,1,0) + x_3(2,0,1,0),\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

- Μοναδική λύση $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$.

- Απειρες λύσεις

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (38/9, -3/5, -1/6, 0) + x_4(-22/9, 29/9, -1/3, 1),\ x_4 \in \mathbb{R}$$

- Απειρες λύσεις

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-8, -6, -1, 0, 0) + x_4(-27, 18, -4, 0, 0) + x_5(-28, 19, -5, 0, 0)$$

2.2. Να διερευνηθεί το σύστημα $\begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$ για όλες τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ και να υπολογισθούν οι λύσεις αυτού (όταν υπάρχουν).

Απάντ. Για $a \in \mathbb{R} - \{-2,1\}$ μοναδική λύση. Για $a = -2$ αδύνατο και για $a = 1$ αόριστο.

2.3. Για ποιες τιμές των $a,b \in \mathbb{R}$ το σύστημα $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + bx_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

είναι αδύνατο; **Απάντ.** Για $a = 1,\ b \in \mathbb{R}$ ή για $a \neq 1$ και $5a - 3b + 1 \neq 0$.

2.4. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Απάντ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/16 & -9/16 & 7/16 & -1/16 \\ -5/8 & 1/24 & 3/8 & 1/24 \\ 1/2 & 1/6 & -1/2 & 1/6 \\ 1/4 & -1/12 & 1/4 & -1/12 \end{pmatrix}$.

2.5. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος; **Απάντ.** $a \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ορίζουσες

Στο Κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε αποκλειστικά με τετραγωνικούς πίνακες.

3.1. Ορισμοί.

Ορισμός 3.1 *Εστω A είναι ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας. Στο εξής θα συμβολίζουμε με M_{ij} έναν $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i γραμμή και j στήλη του. Κάθε τέτοιος πίνακας καλείται* ***ελάσσων*** *πίνακας του πίνακα A.*

Ορισμός 3.2 *Εστω $A=\left(A_{ij}\right)$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας και M_{ij} είναι ένας ελάσσων πίνακας του A όπως παραπάνω, με $i, j = 1,...,n$. Καλούμε* ***ορίζουσα*** *του πίνακα A, συμβολικά $Det(A)$ (ή $D(A)$ ή $|A|$) ή*

$$Det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

τον αριθμό

$$Det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_0+j}a_{i_0,j}Det\left(M_{i_0,j}\right)$$

$$=(-1)^{i_0+1}a_{i_0,1}Det\left(M_{i_0,1}\right)+(-1)^{i_0+2}a_{i_0,2}Det\left(M_{i_0,2}\right)+...+(-1)^{i_0+n}a_{i_0,n}Det\left(M_{i_0,n}\right)$$

όπου ο δείκτης i_0 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των τιμών $1,...,n$. Τότε λέμε ότι υπολογίζουμε το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την i_0 γραμμή του πίνακα A. Ισοδύναμα καλούμε ***ορίζουσα*** *$Det(A)$ του πίνακα A τον αριθμό*

$$Det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}a_{i,j_0}Det\left(M_{i,j_0}\right)$$

$$=(-1)^{j_0+1}a_{1,j_0}Det\left(M_{1,j_0}\right)+(-1)^{j_0+2}a_{2,j_0}Det\left(M_{2,j_0}\right)+...+(-1)^{j_0+n}a_{n,j_0}Det\left(M_{n,j_0}\right)$$

όπου ο δείκτης j_0 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των τιμών $1,...,n$. Τότε λέμε ότι υπολογίζουμε το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την j_0 στήλη του πίνακα A.

Παρατηρήσεις: **(α)** Η ορίζουσα 1×1 πίνακα $A=\left(A_{11}\right)$ ορίζεται ως

$$Det\left(A\right)=A_{11}.$$

(β) Η ορίζουσα 2×2 πίνακα $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ είναι ο αριθμός

$$Det\left(A\right)=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}.$$

(γ) Η τιμή $Det\left(A\right)$ δεν εξαρτάται από την τιμή του δείκτη i_0 (ή από την τιμή του δείκτη j_0) που επιλέγουμε για να την υπολογίσουμε. Η επιλογή του δείκτη i_0 ή j_0 βασίζεται συνήθως (χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο) στο πλήθος των μηδενικών στοιχείων που περιέχει η εκάστοτε γραμμή ή στήλη. Συνήθως επιλέγουμε ως τιμή για το δείκτη i_0 (ή j_0) εκείνη τη γραμμή (ή στήλη) του πίνακα A που περιέχει τα περισσότερα μηδενικά. Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Το πρώτο πράγμα που κάνουμε είναι να επιλέξουμε μία γραμμή ή στήλη ώστε να εφαρμόσουμε κάποια από τις δύο ισοδύναμες ισότητες του ορισμού 3.2. Είναι εύκολο να δούμε ότι η δεύτερη στήλη του A περιέχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες στήλες και γραμμές του A. Θα υπολογίσουμε λοιπόν την ορίζουσα του πίνακα A κατά τη 2η στήλη εφαρμόζοντας τη δεύτερη ισότητα του ορισμού 2 για $j_0=2$. Εχουμε λοιπόν:

$$Det\left(A\right)=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+j_0}a_{i,j_0}Det\left(M_{i,j_0}\right)$$

$$=(-1)^{2+1}a_{12}Det\left(M_{12}\right)+(-1)^{2+2}a_{22}Det\left(M_{22}\right)+(-1)^{2+3}a_{32}Det\left(M_{32}\right)$$

$$= -(-2)\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix} = -(-2)\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$= -(-2)\cdot\left(3\cdot(-2) - 1\cdot 2\right) = 2(-6-2) = -16.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν επιλέξουμε $j_0 = 1$ ή $j_0 = 3$. Επίσης στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν επιλέξουμε $i_0 = 1$ ή $i_0 = 2$ ή $i_0 = 3$ και εργασθούμε με την 1η σχέση του ορισμού 2.

(δ) Ειδικά για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός 3×3 πίνακα A μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον λεγόμενο κανόνα Sarrus:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} \overset{+}{A_{11}} & \overset{+}{A_{12}} & \overset{+}{A_{13}} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \underset{-}{A_{31}} & \underset{-}{A_{32}} & \underset{-}{A_{33}} \end{vmatrix} \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{23} \end{matrix}$$

$$= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{23} - A_{31}A_{22}A_{13} - A_{32}A_{23}A_{11} - A_{33}A_{21}A_{12}.$$

3.2 Ιδιότητες οριζουσών.

Εστω A, B είναι $n\times n$ πίνακες.

1. Αν ο A έχει μια μηδενική γραμμή (ή στήλη) τότε $Det(A) = 0$.

2. Αν ο A έχει δύο ανάλογες γραμμές (ή στήλες) τότε $Det(A) = 0$.

3. Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A με αντιμετάθεση δύο οποιονδήποτε γραμμών (ή στηλών) του A τότε

$$Det(B) = -\,Det(A).$$

3. Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A πολλαπλασιάζοντας μια γραμμή (ή μια στήλη) του A με πραγματικό αριθμό k, τότε

$$Det(B) = k\ Det(A).$$

Αμεση συνέπεια αυτού είναι η $Det(kA) = k^n Det(A)$.

5. Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας μια γραμμή Γ_i (ή μια στήλη Σ_j) του A με τη γραμμή $\Gamma_i + k\Gamma_{i_0}$ (ή με τη στήλη $\Sigma_j + \lambda\Sigma_{j_0}$), τότε

$$Det(B) = Det(A).$$

6. $$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i1}+B_{i1} & \cdots & A_{in}+B_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{i1} & \cdots & B_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ανάλογη ιδιότητα ισχύει και για τις στήλες του πίνακα.

<u>Προσοχή:</u> Γενικά $Det(A \pm B) \neq Det(A) \pm Det(B)$.

7. $Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(B)$.

8. Αν ο A είναι άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας τότε η ορίζουσα του A ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

9. Η ορίζουσα ορθοκανονικού πίνακα ισούται με ± 1.

10. Αν A^T είναι ο ανάστροφος πίνακας του A τότε

$$Det(A^T) = Det(A).$$

11. $Det(\overline{A}) = \overline{Det(A)}$.

12. $Det(A^*) = \overline{Det(A)}$.

Επειδή ο απευθείας υπολογισμός της ορίζουσας είναι αρκετά πολύπλοκος (ειδικά για πίνακες μεγάλων διαστάσεων) οι παραπάνω ιδιότητες μας επιτρέπουν να εξάγουμε γρήγορα την τιμή μιας ορίζουσας για κάποιες μορφές πινάκων. Για παράδειγμα παρατηρούμε ότι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ -a & -b & -c \end{vmatrix}$$

ισούται με μηδέν διότι η $1^{η}$ και η $3^{η}$ γραμμή είναι ανάλογες. Επίσης

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = x \cdot a \cdot c,$$

διότι η παραπάνω είναι ορίζουσα ενός κάτω τριγωνικού πίνακα.

3.3. Εφαρμογές ορίζουσας.

Θεώρημα 3.1 *Έστω A είναι ένας $n \times n$ πίνακας και M_{ij} είναι οι ελάσσονες πίνακες αυτού όπως στον ορισμό 1. Τότε*

$$A \text{ αντιστρέψιμος} \Leftrightarrow Det(A) \neq 0$$

και ο A^{-1} υπολογίζεται από την ισότητα

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} adj(A),$$

όπου $adj(A)$ είναι ο ***προσαρτημένος πίνακας*** *του A που ορίζεται ως*

$$adj(A) = \left((-1)^{i+j} Det(M_{ji})\right), \ (i, j = 1, \ldots, n)$$

Μια άλλη εφαρμογή των οριζουσών εμφανίζεται στην επίλυση γραμμικών συστημάτων n εξισώσεων με n αγνώστους.

Θεώρημα 3.2 (***Κανόνας Cramer***) *Εστω*

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = B_1 \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n = B_n \end{cases},$$

είναι ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους. Όπως είπαμε στο Κεφ. 2 το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $AX = B$, όπου A είναι ο $n \times n$ πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, X είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων και B είναι ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων. Εστω $D_i(A)$ $i = 1, \ldots, n$ είναι οι ορίζουσες που προκύπτουν από τον πίνακα των συντελεστών A αν αντικαταστήσουμε την i στήλη αυτού με τη στήλη των σταθερών όρων. Τότε:

- *Το σύστημα έχει* ***μοναδική λύση*** *αν και μόνον αν*

$$Det(A) \neq 0.$$

Στην περίπτωση αυτή η μοναδική λύση δίνεται από τις ισότητες

$$x_1 = \frac{D_1(A)}{Det(A)}, \ldots, x_i = \frac{D_2(A)}{Det(A)}, \ldots, x_n = \frac{D_n(A)}{Det(A)}.$$

- *Το σύστημα είναι* ***αδύνατο*** *αν και μόνον αν*

$$Det(A) = 0$$

και υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης $i_0 = 1, \ldots, n$ *τέτοιος ώστε* $D_i(A) \neq 0$.

- *Το σύστημα είναι* ***αόριστο*** *αν και μόνον αν*

$$Det(A) = D_1(A) = \ldots = D_n(A) = 0.$$

Αμεση συνέπεια είναι το ακόλουθο Θεώρημα για $n \times n$ ομογενή συστήματα:

Θεώρημα 3.3 *Εστω*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = 0 \end{cases},$$

είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα n *εξισώσεων με* n *αγνώστους.*

- *Το σύστημα έχει* ***μοναδική λύση*** *(τη μηδενική) αν και μόνον αν*

$$Det(A) \neq 0.$$

- *Το σύστημα είναι* ***αόριστο*** *αν και μόνον αν* $Det(A) = 0$.

Λυμένες ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις κάτωθι ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 2-i & 1 \\ 4 & 3+i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Λύση: (α) Εχουμε:

$$\begin{vmatrix} 2-i & 1 \\ 4 & 3+i \end{vmatrix} = (2-i)(3+i) - 4\cdot 1 = 3-i\,.$$

(β) Αναπτύσσουμε την ορίζουσα κατά την 1^{η} γραμμή και έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-2+1) - 4\cdot(3-2) = -1-4 = -5\,.$$

(γ) Αναπτύσσουμε την ορίζουσα κατά την 2^{η} στήλη (επειδή έχουμε πολλά μηδενικά) και έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+0\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Αλλά:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot 0 + 2\cdot(8+2) + 1\cdot(8+2) = 30.$$

Επίσης:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot 0 + 1\cdot(8+2) + 0\cdot(8+2) = 10.$$

Τελικά:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot 30 + 4\cdot 10 = 10. \qquad \square$$

2. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}.$$

Λύση: Προφανώς μπορούμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς μια γραμμή ή στήλη σύμφωνα με τον ορισμό (με κόστος πολλές πράξεις). Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών οι οποίοι αφήνουν αναλλοίωτη την ορίζουσα (βλέπε ιδιότητα 5) έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} \underset{A_4 \to A_4 - A_3}{\overset{A_2 \to A_2 - A_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 18 & 19 & 20 & 21 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = B.$$

Τότε:

$$Det(A) = Det(B) = 0$$

διότι πίνακας με δύο ίσες γραμμές έχει ορίζουσα ίση με μηδέν (βλέπε ιδιότητα 2). □

3. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Λύση: Λόγω της ιδιότητας 5 αν αντικαταστήσουμε την 3η γραμμή του πίνακα A με την γραμμή $A_3 - A_4$ τότε η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται. Δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 1 = -2,$$

διότι ο πίνακας που προκύπτει είναι κάτω τριγωνικός, άρα ισχύει η ιδιότητα 8. □

4. (α) Αν $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & z \\ -1 & w & 3 \end{vmatrix} = 3$, να υπολογισθεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 2x & 2y \\ 6 & 0 & 6z \\ -3 & 3w & 9 \end{vmatrix}$.

(β) Να υπολογισθεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} a & x & a+x \\ b & y & b+y \\ c & z & c+z \end{vmatrix}$.

Λύση: (α) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 4 έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2x & 2y \\ 6 & 0 & 6z \\ -3 & 3w & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 6 & 0 & 6z \\ -3 & 3w & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & z \\ -3 & 3w & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 12\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & z \\ -1 & w & 3 \end{vmatrix} = -36\cdot 3 = -108.$$

(β) Χρησιμοποιώντας πρώτα την ιδιότητα 6 και στη συνέχεια την ιδιότητα 2 παίρνουμε:

$$\begin{vmatrix} a & x & a+x \\ b & y & b+y \\ c & z & c+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & x \\ b & y & y \\ c & z & z \end{vmatrix} = 0+0=0. \qquad \square$$

5. Έστω ο $n\times n$ πίνακας $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι $Det(A_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Λύση: Προσθέτουμε στα στοιχεία της πρώτης στήλης τα στοιχεία των υπολοίπων στηλών και βγάζοντας κοινό παράγοντα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Αντικαθιστούμε τη 2^{η} γραμμή από τη γραμμή $\Gamma_2 - \Gamma_1$, την 3^{η} γραμμή από τη γραμμή $\Gamma_3 - \Gamma_1$, κλπ. Λόγω της ιδιότητας 5 η ορίζουσα δε μεταβάλλεται, συνεπώς:

$$(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι άνω τριγωνικός οπότε από την ιδιότητα 8 παίρνουμε:

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}. \qquad \square$$

6. Υπολογίστε την ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ & & & \dots & & \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \dots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση: Θα φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή. Αντικαθιστούμε την πρώτη στήλη Σ_1 με τη στήλη $\Sigma_1 - \Sigma_2$, τη δεύτερη στήλη Σ_2 με τη στήλη $\Sigma_2 - \Sigma_3$, κλπ και την προτελευταία στήλη Σ_{n-1} με τη στήλη $\Sigma_{n-1} - \Sigma_n$, οπότε έχουμε

$$Det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Αντικαθιστούμε τώρα τη δεύτερη γραμμή Γ_2 με τη γραμμή $\Gamma_1+\Gamma_2$, την τρίτη γραμμή Γ_3 με τη γραμμή $\Gamma_1+\Gamma_3$, κλπ και την τελευταία γραμμή Γ_n με τη γραμμή $\Gamma_1+\Gamma_n$, οπότε έχουμε

$$Det(A)=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 2n-3 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & 2n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix}=(-1)(-2)^{n-2}(n-1),$$

διότι ο τελευταίος πίνακας είναι άνω τριγωνικός, άρα η ορίζουσά του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του. □

7. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Λύση: Ηδη γνωρίζουμε έναν τρόπο υπολογισμού του αντιστρόφου πίνακα με χρήση του αλγορίθμου Gauss. Στην άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.1. Κατ' αρχήν υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A και παίρνουμε:

$$Det(A)=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1-5-6=-12.$$

Τότε $A^{-1}=\dfrac{1}{Det(A)}adj(A)$, όπου $adj(A)$ είναι ο προσαρτημένος 3×3 πίνακας με στοιχεία $\left(adj(A)\right)_{ij}=(-1)^{i+j}Det(M_{ji})$, όπου M_{ji} είναι οι ελάσσονες πίνακες του A όπως ορίσθηκαν στην αρχή του Κεφαλαίου. Αρα:

$$adj(A)=\begin{pmatrix} |M_{11}| & -|M_{21}| & |M_{31}| \\ -|M_{12}| & |M_{22}| & -|M_{32}| \\ |M_{13}| & -|M_{23}| & |M_{33}| \end{pmatrix}.$$

Αλλά:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3.$$

Ομοίως:

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \text{ και}$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Τελικά: $A^{-1} = \dfrac{1}{-12}\begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$ □

8. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι $Det(A_1) = 2, Det(A_2) = 3, Det(A_3) = 4$. Εστω

$$Det(A_n) = n + 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο επαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι

$$Det(A_{n+1}) = n + 2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή βρίσκουμε εύκολα ότι

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(n+1) - D_n = 2n + 2 - (n+1) = n+1$$

Αρα η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n. □

9. Έστω A είναι ένας $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^T = -A$.

(α) Να δειχθεί ότι αν ο n είναι περιττός τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β) Να δειχθεί ότι ο προσαρτημένος πίνακας ικανοποιεί τη σχέση

$$Det(adjA) = \left(Det(A)\right)^{n-1}.$$

Λύση: (α) Είναι γνωστό ότι $Det\left(A^T\right) = Det(A)$, άρα συνδυάζοντας με την υπόθεση $A^T = -A$ έχουμε

$$Det(A) = Det\left(A^T\right) = Det(-A) = (-1)^n Det(A) = -Det(A).$$

Άρα $Det(A) = 0$ και συνεπώς ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β) Εστω $Det(A) \neq 0$. Τότε από την ισότητα

$$A \cdot \frac{1}{Det(A)}(adjA) = I_n$$

έχουμε:

$$Det\left(A \cdot \frac{1}{Det(A)}(adjA)\right) = Det(I_n) \Rightarrow Det(A)\,Det\left(\frac{1}{Det(A)}(adjA)\right) = 1$$

$$\Rightarrow Det(A)\frac{1}{\left(Det(A)\right)^n} Det\left((adjA)\right) = 1 \Rightarrow Det\left((adjA)\right) = \left(Det(A)\right)^{n-1}.$$

Έστω τώρα $Det(A)=0$. Αν $A=\mathbf{0}$ τότε προφανώς ισχύει η παραπάνω. Αν $A\neq\mathbf{0}$ τότε θα ίσχυε $A\cdot(adjA)=\mathbf{0}$. Αν ο πίνακας $adjA$ ήταν αντιστρέψιμος θα είχαμε $A=\mathbf{0}$, άτοπο. Άρα ο πίνακας $adjA$ δεν είναι αντιστρέψιμος, συνεπώς $Det(adjA)=0$ οπότε πάλι ισχύει η ισότητα

$$Det\big((adjA)\big)=\big(Det(A)\big)^{n-1}. \qquad \square$$

10. Να επιλυθεί με τη μέθοδο Cramer το σύστημα

$$\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ -x+y+z=1 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}.$$

Λύση: Εχουμε:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=3+8-2=9.$$

Αρα το σύστημα έχει μοναδική λύση. Επειδή

$$D_x=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=6+6-8=4,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1+8-10=-3,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=8-0-8=0,$$

έχουμε:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{4}{9},\ y=\frac{D_y}{D}=-\frac{1}{3},\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{0}{9}=0. \qquad \square$$

Αλυτες ασκήσεις

3.1 Με χρήση ορίζουσας μελετήστε την αντιστρεψιμότητα των κάτωθι πινάκων:

$$A=\begin{pmatrix} 2+i & 3-3i \\ 4i & 2+i \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Απάντ. Και οι τρεις είναι αντιστρέψιμοι διότι $Det(A)=-9-8i$, $Det(B)=25/2$, $Det(C)=-350$.

3.2. Με χρήση ιδιοτήτων υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{pmatrix}.$$

Απάντ. $Det(B)=xyz$.

3.3 Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -a & 2b & -c & a+d \\ x & -y & z & -x-w \\ x-a+4 & -y+2b+12 & z-c-4 & -x-w+a+d+8 \end{vmatrix}=0.$$

3.4. Δείξτε ότι $Det(A_n)=1+x^2+x^4+...+x^{2n}$, όπου

$$A_n=\begin{pmatrix} x^2+1 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & x^2+1 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & x^2+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & x^2+1 \end{pmatrix}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το νόμο επαγωγής.

3.5. Μ ε χρήση ιδιοτήτων υπολογίστε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x+y & x & x & \cdots & x \\ x & x+y & x & \ddots & \vdots \\ x & x & x+y & \ddots & x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x & x+y \end{vmatrix}.$$

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε την πρώτη στήλη από το άθροισμα των υπολοίπων, βγάλτε κοινό παράγοντα από την πρώτη στήλη και μετατρέψτε τον πίνακα πίνακα σε τριγωνικό.

Απάντ. $1+a+b+c+d$, $(nx+y)y^{n-1}$.

3.6. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ b & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε τις τιμές των παραμέτρων $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε ο A να είναι αντιστρέψιμος και με χρήση του προσαρτημένου πίνακα υπολογίστε τον αντίστροφο πίνακα (για τις τιμές των a,b που βρήκατε. **Απάντ.** Πρέπει $1+2b-4a\neq 0$. Τότε

$$A^{-1}=\frac{1}{1-4a+2b}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2b-1 & b-a & -2a+1 \\ -2 & b-2a & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7. Επιλύστε με τη μέθοδο Cramer το σύστημα

$$\begin{cases} x-y-2z+w=0 \\ x-3z-2w=-1 \\ 2x+y+4z+6w=2 \\ y-6z+2w=-3 \end{cases}.$$

Απάντ. $x=\frac{13}{40}$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{17}{40}$, $w=\frac{1}{40}$.

3.8. Διερευνήστε με τη μέθοδο Cramer σύστημα

$$\begin{cases} x+\lambda y+z=3 \\ 2x-y+3z=\lambda, \ \lambda\in\mathbb{R}. \\ 3y-\lambda z=1 \end{cases}$$

Απάντ. Εχει μοναδική λύση $\forall\lambda\neq 1,-3/2$ αλλιώς είναι αδύνατο.

3.9. Χαρακτηρίστε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος:

- Αν A είναι $n\times n$ πίνακας, τότε $Det(5A)=5Det(A)$.
- Αν A είναι $n\times n$ πίνακας με $Det(A)=2$, τότε $Det(A^n)=2^n$.
- Αν για τον $n\times n$ πίνακα A ισχύει $(A+I)^k=0, \quad k\in N^*$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.
- Αν $A^3=\mathbf{0}$, τότε $Det(A)=0$.
- Αν A είναι $n\times n$ πίνακας, τότε $Det(A^T A)\geq 0$.

Απάντ. Λ, Σ, Σ, Λ, Σ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ευκλείδιοι χώροι

4.1 Ορισμοί.

Καλούμε ***διάνυσμα*** $\overrightarrow{AB}$ ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με ***αρχή*** το σημείο A και ***πέρας*** το σημείο B. Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καθορίζεται πλήρως από τη διεύθυνση, τη φορά και το μέτρο του ως εξής:

- ***Διεύθυνση*** ή ***φορέας*** του $\overrightarrow{AB}$ είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το ευθύγραμμο τμήμα AB.

- ***Φορά*** του $\overrightarrow{AB}$ είναι ο προσανατολισμός του.

- ***Μέτρο*** ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ (συμβολικά $\left|\overrightarrow{AB}\right|$) είναι το μήκος του αντίστοιχου ευθύγραμμου τμήματος AB.

Η διεύθυνση και η φορά καλείται ***κατεύθυνση*** του $\overrightarrow{AB}$. Ένα διάνυσμα μέτρου 1 καλείται ***μοναδιαίο*** διάνυσμα. ***Μηδενικό*** διάνυσμα (συμβολικά $\vec{\boldsymbol{0}}$) είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν.

Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ καλούνται ***ίσα***, συμβολικά $\vec{a} = \vec{b}$ όταν βρίσκονται πάνω στον ίδιο ή σε παράλληλους φορείς, έχουν την ίδια φορά και έχουν ίσα μέτρα.

Δύο διανύσματα καλούνται ***αντίθετα*** όταν βρίσκονται πάνω στον ίδιο ή σε παράλληλους φορείς, έχουν αντίθετη φορά και έχουν ίσα μέτρα. Αν $\vec{a}$ είναι ένα διάνυσμα, τότε το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{a}$ συμβολίζεται με $-\vec{a}$.

Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ καλούνται ***παράλληλα*** ή ***συγγραμικά*** (συμβολικά $\vec{a} \,//\, \vec{b}$) όταν βρίσκονται πάνω στον ίδιο ή σε παράλληλους φορείς. Καλούνται ***ομόρροπα*** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση ενώ καλούνται ***αντίρροπα*** όταν έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.

Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ καλούμε την ***<u>κυρτή</u>*** γωνία τους. Δηλαδή $0 \le \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \le 180^0$.

4.2 Πράξεις με διανύσματα.

Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ είναι δύο διανύσματα. Αν $\vec{b_1} = \vec{b}$ είναι τέτοιο ώστε το πέρας του $\vec{a}$ να είναι αρχή του $\vec{b_1}$ και αν $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b_1} = \overrightarrow{B\Gamma}$ τότε ορίζουμε ως ***άθροισμα*** $\vec{a} + \vec{b}$ να είναι το διάνυσμα

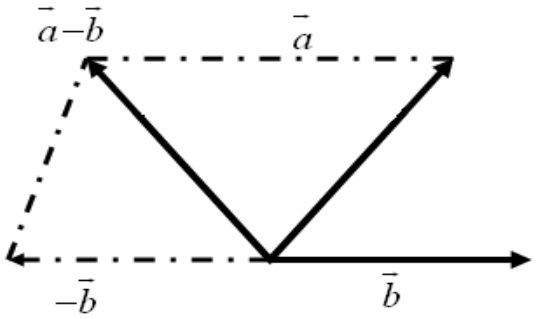
$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{A\Gamma} .$$

Ισοδύναμα αν $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ είναι δύο διανύσματα με κοινή αρχή O ορίζουμε ως ***άθροισμα*** $\vec{a} + \vec{b}$ να είναι το διάνυσμα:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{O\Gamma} ,$$

όπου $\overrightarrow{O\Gamma}$ είναι το διάνυσμα της διαγωνίου $O\Gamma$ του παραλληλογράμμου $OAB\Gamma$ με πλευρές τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Η ***αφαίρεση*** $\vec{a} - \vec{b}$ δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{a}$ με το αντίθετο διάνυσμα $\vec{b}$. Δηλαδή $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.



Σχήμα 1: Το διάνυσμα $\vec{a} - \vec{b}$

Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα.

Ορίζουμε ως γινόμενο πραγματικού αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}^*$ με διάνυσμα $\vec{a}$ να είναι ένα νέο διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$ τέτοιο ώστε:

(α) $$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{cases} \text{ομόρροπο του } \vec{a}, & \text{όταν } \lambda > 0 \\ \text{αντίρροπο του } \vec{a}, & \text{όταν } \lambda < 0 \end{cases}$$

(β) $$\left|\lambda \cdot \vec{a}\right| = |\lambda| \left|\vec{a}\right| .$$

4.3 Διάνυσμα θέσης-Καρτεσιανό σύστημα αξόνων.

Ορισμός 4.1 *Έστω Ο είναι ένα σταθερό σημείο και Μ είναι ένα τυχαίο σημείο, τότε το διάνυσμα* $\overrightarrow{OM}$ *καλείται* ***διάνυσμα θέσης*** *του σημείου Μ ή* ***διανυσματική ακτίνα*** *του σημείου Μ.*

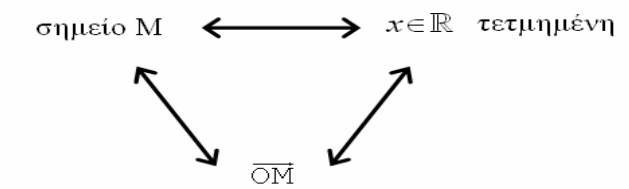
Ορισμός 4.2 *Έστω ευθεία* $x'x$ *. Εκλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο Ο ως αρχή και ένα σημείο Ι ώστε το διάνυσμα* $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ *να είναι* ***μοναδιαίο****. Τότε η ευθεία* $x'x$ *καλείται* ***άξονας****.*

Με αυτό τον τρόπο υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της ευθείας $x'x$ και του συνόλου των πραγματικών αριθμών ως εξής:

Αν M είναι ένα τυχαίο σημείο του άξονα $x'x$, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$ και το x είναι μοναδικό διότι αν υπήρχε $x' \neq x$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = x' \cdot \vec{i}$ θα έπρεπε να ισχύει:

$$(x - x')\vec{i} = \vec{O} \Leftrightarrow x = x'.$$

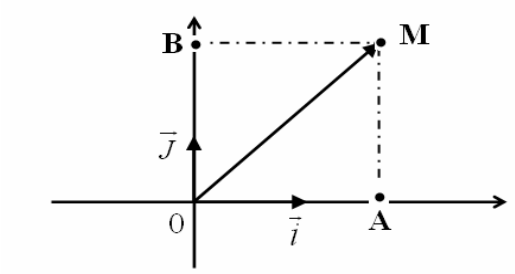
Τελικά έχουμε:



και γράφουμε M ή $M(x)$ έχοντας στο μυαλό μας ότι το σημείο M έχει διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OM}$ και τετμημένη x.

Ορισμός 4.3 *Στο επίπεδο θεωρούμε 2* ***κάθετους άξονες*** *με κοινή μονάδα μέτρησης που τέμνονται σε σημείο Ο το οποίο θεωρούμε ως κοινή αρχή τους. Ένα τέτοιο σύστημα καλείται* ***καρτεσιανό σύστημα αξόνων****.*

Έστω $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων όπως φαίνονται στο κάτωθι σχήμα:



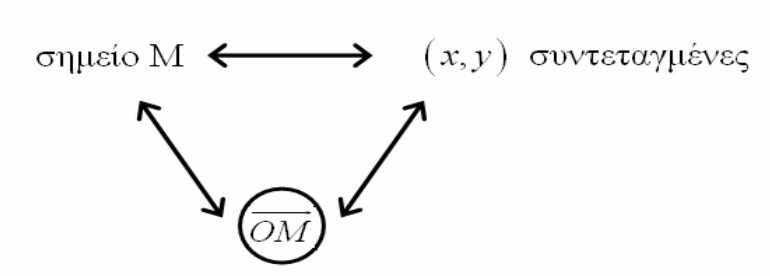
Αν M είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου, τότε $\exists\, x\,,\, y \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}\ ,$$

και σε κάθε σημείο M αντιστοιχεί ένα ***μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος αριθμών*** (x, y), διότι αν υπήρχε και άλλο ζεύγος (x', y') τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}$ θα έπρεπε να ισχύει

$$(x' - x) \cdot \vec{i} = (y - y') \cdot \vec{j}\ ,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι η παραπάνω ισότητα υπονοεί ότι τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι παράλληλα, το οποίο δεν είναι αληθές. Εχουμε λοιπόν μία 1-1 αντιστοιχία:



Στο εξής θα γράφουμε $M = \overrightarrow{OM} = (x\,,\, y)$ και θα εννοούμε ότι:

- στο σημείο M αντιστοιχεί ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος αριθμών $(x\,,\, y)$ το οποίο καλούμε καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου M,

- στο σημείο M αντιστοιχεί ένα μοναδικό διάνυσμα, το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OM}$.

4.4. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$. Γραμμική ανεξαρτησία/εξάρτηση διανυσμάτων. Βάση.

Ορισμός 4.4 *Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^2$ το σύνολο όλων των* ***διατεταγμένων ζευγών*** (x, y): $x, y \in \mathbb{R}$. *Δηλαδή*

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται και για n > 2:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots . n\}.$$

Εστω $n \geq 2$ και το σύνολο $\mathbb{R}^n$ όπως ορίσθηκε παραπάνω. Εφοδιάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}^n$ με τις ακόλουθες πράξεις:

- ***Πρόσθεση:*** Έστω $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε το άθροισμα αυτών ως εξής:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

Προφανώς ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&A + B = B + A \\
&(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma) \\
&A + O = A,\ O = (0, 0, \ldots, 0) \\
&\exists \text{ μοναδικό σημείο } B \in \mathbb{R}^n : A + B = O
\end{aligned}$$

Η πράξη της πρόσθεσης αντιστοιχεί γεωμετρικά στη συνήθη πρόσθεση των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ όπως την περιγράψαμε παραπάνω.

- ***Γινόμενο πραγματικού $\lambda \in \mathbb{R}$ με στοιχείο*** $A = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda \cdot a_1, \ldots, \lambda \cdot a_n).$$

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A) \\
&(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \\
&\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B \\
&\mathbf{1} \cdot A = A, \ \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)
\end{aligned}
.
$$

Η παραπάνω πράξη αντιστοιχεί γεωμετρικά στο γινόνενο αριθμού με διάνυσμα $\lambda \cdot \overrightarrow{OA}$ όπως την περιγράψαμε παραπάνω.

Ορισμός 4.5 *Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις καλείται* ***διανυσματικός χώρος*** *και τα στοιχεία του καλούνται* ***διανύσματα****.*

Αν $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, τότε:

$$
\begin{aligned}
A &= (a_1, a_2 \ldots, a_n) = (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, a_n) \\
&= a_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_n \cdot (0, \ldots, 0, 1) \\
&= a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \ldots + a_n \cdot \overrightarrow{e_n},
\end{aligned}
$$

όπου $\overrightarrow{e_i} = \left(0, \ldots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i-\text{θέση}}}{1} \ 0, \ldots, 0 \right)$. Στο εξής λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}$ είναι μια ***βάση*** του χώρου $\mathbb{R}^n$ το οποίο σημαίνει ότι :

- ***(a)*** τα διανύσματα $\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}$ είναι ***γραμμικώς ανεξάρτητα***, δηλαδή ικανοποιείται η σχέση:

$$
\boxed{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{e_n} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0}
$$

και

- ***(b)*** τα διανύσματα $\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}$ ***παράγουν*** το χώρο $\mathbb{R}^n$, δηλαδή κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ γράφεται ***κατά μοναδικό τρόπο*** ως ***γραμμικός συνδυασμός*** των στοιχείων του συνόλου $E = \left\{ \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n} \right\}$ μέσω της σχέσης

$$\overrightarrow{OA} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \ldots + a_n \cdot \overrightarrow{e_n} ,$$

όπου οι αριθμοί $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ είναι οι ***συντ/νες*** του σημείου A ως προς τη ***βάση*** E.

Παρατηρήσεις: (α) Εστω $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ είναι $k-$το πλήθος διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$. Τότε

- Κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_k \cdot \overrightarrow{a_k}, \ \lambda_i \in \mathbb{R}$$

  καλείται ***γραμμικός συνδυασμός*** των διανυσμάτων $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$.

- Τα $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ καλούνται ***γραμμικώς ανεξάρτητα*** αν ισχύει

$$\boxed{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \ldots + \lambda_k \cdot \overrightarrow{a_k} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0},$$

  αλλιώς τα $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ καλούνται ***γραμμικώς εξαρτημένα*** (δηλαδή κάποιο απ' αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων).

- Αν $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τότε αποδεικνύεται ότι τα $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν ισχύει

$$k = n .$$

  Δηλαδή μόνον <u>n-το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου</u> $\mathbb{R}^n$ <u>αποτελούν μία βάση του χώρου</u> $\mathbb{R}^n$. Σημειώνουμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ μπορεί να έχει άπειρες βάσεις.

- Αν $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ είναι $k-$το πλήθος διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε

$$k > n ,$$

  τότε αποδεικνύεται ότι τα $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ είναι πάντα **γραμμικώς εξαρτημένα**.

Ειδικότερα ***όσον αφορά το χώρο*** $\mathbb{R}^2$ **:**

Οποιαδήποτε ***δύο διανύσματα του*** $\mathbb{R}^2$ ***είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνον αν είναι μη παράλληλα***. Επιπρόσθετα δύο γραμμικώς ανεξάρτητα του $\mathbb{R}^2$ αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^2$.

Οποιαδήποτε ***δύο διανύσματα του*** $\mathbb{R}^2$ ***είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνον αν είναι παράλληλα***. Αν $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ και $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$ είναι δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, τότε

$$\overrightarrow{OA} \,//\, \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Αρα τα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνον αν

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Σ' αυτή την περίπτωση κάθε άλλο διάνυσμα $\overrightarrow{OX}$ του $\mathbb{R}^2$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως

$$\overrightarrow{OX} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$$

όπου το διατεταγμένο ζεύγος (x, y) αποτελεί τις συντ/νες του σημείου X ως προς τη βάση $\left\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right\}$ του $\mathbb{R}^2$.

Οποιαδήποτε τρία και πλέον διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ είναι ***πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα***.

- ***όσον αφορά το χώρο*** $\mathbb{R}^3$ ***:***

Οποιαδήποτε ***δύο διανύσματα του*** $\mathbb{R}^3$ ***είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους αν και μόνον αν είναι μη παράλληλα, δεν αποτελούν όμως μία βάση του*** $\mathbb{R}^3$. Αν $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$ είναι δύο διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^3$, τότε

$\overrightarrow{OA} \,//\, \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\boldsymbol{O}}$ (βλέπε εξωτ. γινόμενο παρακάτω).

Κατ' επέκταση τα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνον αν

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \neq \vec{\boldsymbol{O}} \ .$$

Οποιαδήποτε ***τρία διανύσματα του*** $\mathbb{R}^3$ ***είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους αν και μόνον αν είναι μη συνεπίπεδα και τότε αποτελούν μία βάση του*** $\mathbb{R}^3$. Αν $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{O\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, τότε τα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνον αν

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \, .$$

Σ' αυτή την περίπτωση κάθε άλλο διάνυσμα $\overrightarrow{OX}$ του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να αναλυθεί κατά μοναδικό τρόπο ως

$$\overrightarrow{OX} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{O\Gamma}$$

όπου το διατεταγμένο ζεύγος (x, y, z) αποτελεί τις συντ/νες του σημείου X ως προς τη βάση $\left\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}\right\}$ του $\mathbb{R}^3$.

Οποιαδήποτε τέσσερα και πλέον διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι ***πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα***.

4.5 Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Ορισμός 4.6 *Έστω* $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *είναι δύο διανύσματα του* $\mathbb{R}^n$. *Καλούμε εσωτερικό των διανυσμάτων* $\vec{a}$ *και* $\vec{b}$ *να είναι ο αριθμός*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n .$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$
$$\lambda \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \left(\lambda \cdot \vec{b}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{b}$$
$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 .$$

Εφόσον $\vec{a}^{\,2} \geq 0$, υπάρχει η ποσότητα

$$\sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} ,$$

οπότε μπορούμε δίνουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός 4.7 *Αν* $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *τότε ο μη αρνητικός αριθμός:*

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

καλείται ***μέτρο*** *(ή* ***νόρμα****) του διανύσματος* $\vec{a}$.

Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{a}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\left|\vec{a}\right| \geq 0 ,$$
$$\left|\lambda \cdot \vec{a}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right| ,$$
$$\left| \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right| \right| \leq \left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| .$$

Με τη βοήθεια του μέτρου μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων *A* και *B* ως εξής:

Ορισμός 4.8 *Έστω* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *είναι δύο οποιαδήποτε σημεία του χώρου* $\mathbb{R}^n$ *με αντίστοιχα διανύσματα θέσης* $\overrightarrow{OA}$ *και* $\overrightarrow{OB}$ *, τότε ο μη αρνητικός αριθμός:*

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$$

καλείται απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β και ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} &d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B \\ &d(A,B) = d(B,A) \\ &d(A,B) \le d(A,\Gamma) + d(B,\Gamma) \end{aligned} \quad .$$

Ορισμός 4.9 *Ο διανυσματικός χώρος* $\mathbb{R}^n$ *εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο καλείται* ***ευκλείδειος χώρος****.*

Θεώρημα 4.1 *Ισχύει* $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \sigma\upsilon\nu\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$.

Παρατηρήσεις: 1. $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}}$.

2. $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \vec{b}}$.

3. Μια βάση $\{\vec{a_1},\ldots,\vec{a_n}\}$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ καλείται ορθοκανονική αν τα στοιχεία της ικανοποιούν τις σχέσεις $|\vec{a_i}| = 1\ \forall i$ και $\vec{a_i} \perp \vec{a_j}\ \forall i \ne j$. Η βάση $\{\vec{e_1},\ldots,\vec{e_n}\}$ με στοιχεία $\vec{e_i} = (0,\ldots 0, \underset{i-\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta}{1}, 0,\ldots,0)$ καλείται ***συνήθης βάση του*** $\mathbb{R}^n$.

4.6 Εξωτερικό και μικτό γινόμενο διανυσμάτων.

Ορισμός 4.10 *Έστω* $\left\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\}$ *είναι η συνήθης κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$. *Εάν* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *είναι δύο διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$, *ορίζουμε ως εξωτερικό γινόμενο αυτών το διάνυσμα :*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

όπου η ορίζουσα αν και δεν έχει τη γνωστή έννοια αφού η πρώτη γραμμή είναι διανύσματα και όχι αριθμοί, εν τούτοις χρησιμοποιείται ως ένας καλός μνημονικός κανόνας με τη σύμβαση η ορίζουσα να αναπτύσσεται πάντα ως προς την πρώτη γραμμή. Ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \\
&\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \times \vec{b} \\
&\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\
&\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{a} \\
&\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \\
&\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2
\end{aligned}$$

Θεώρημα 4.2

- *Δύο διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$ *είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνον αν* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

- *Έστω* $\vec{a}, \vec{b}$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$. *Τότε το* ***εξωτερικό γινόμενο*** $\vec{a} \times \vec{b}$ ***είναι διάνυσμα <u>κάθετο</u> στο επίπεδο που ορίζουν τα*** $\vec{a}$ ***και*** $\vec{b}$ *με κατεύθυνση τέτοια ώστε το σύνολο* $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right\}$ *να αποτελεί μια δεξιόστροφη*[*] *βάση του* $\mathbb{R}^3$.

---

[*] *δηλαδή αν η δεξιά παλάμη δείχνει στην κατεύθυνση του* $\vec{a}$ *και στραφεί προς την κατεύθυνση του* $\vec{b}$ κατά τη γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$, *τότε ο αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση του* $\vec{a} \times \vec{b}$.

- $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \eta\mu\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$.

- *Ο θετικός αριθμός* $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ *ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα* $\vec{a}$ *και* $\vec{b}$.

Ορισμός 4.11 *Μικτό γινόμενο μιας διατεταγμένης τριάδας διανυσμάτων* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *καλείται ο αριθμός*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Θεώρημα 4.3

Εστω $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. *Τότε:*

- *Το μικτό γινόμενο είναι αναλλοίωτο ως προς την κυκλική μετάθεση των* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *δηλαδή* $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right]$. *Ισοδύναμα*

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

- *Το μικτό γινόμενο είναι αναλλοίωτο ως προς την εναλλαγή εσωτερικού και εξωτερικού γινόμενου, δηλαδή:*

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

- *Τα* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνον αν* $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$. *Κατά συνέπεια τα* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *αποτελούν βάση του* $\mathbb{R}^3$ *αν και μόνον αν* $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \neq 0$.

- *Εάν* $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] > 0$ *τότε το σύνολο* $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ *αποτελεί δεξιόστροφη βάση του* $\mathbb{R}^3$ *διαφορετικά αποτελεί αριστερόστροφη βάση.*

- *Ο θετικός αριθμός* $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$ *ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα διανύσματα* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Λυμένες ασκήσεις

4.1 Ποια από τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλα;

(α) $P=(1,-1), Q=(4,3),\ A=(-1,5),\ B=(7,1)$
(β) $P=(1,4), Q=(-3,5),\ A=(5,7),\ B=(9,1)$

- Υπάρχουν ίσα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB}$;
- Υπάρχουν κάθετα διανύσματα της παραπάνω μορφής;

Λύση: (α) $\overrightarrow{PQ}=(3,4), \overrightarrow{AB}=(8,-4)$. Ισχύει $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{AB}$ αν και μόνον αν η ορίζουσα των συν/νων τους $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}$ ισούται με μηδέν. Εφόσον $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -12-32=-44 \neq 0$, τα $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB}$ είναι μη παράλληλα.

- $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{AB}$ διότι οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους δεν είναι ίσες.

- $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$. Εφόσον

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3\cdot 8 + 4\cdot(-4) = 24-16 = 8 \neq 0$$

τα $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB}$ δεν είναι κάθετα. Ομοια εργαζόμαστε και για την περίπτωση (β). □

2. Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου με κορυφές

$$\mathrm{A} = (2,-1,1),\ \mathrm{B} = (1,-3,-5),\ \Gamma = (3,-4,-4).$$

Λύση: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1-2, -3-(-1), -5-1) = (-1,-2,-6)$.

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (3-2, -4-(-1), -4-1) = (1,-3,-5),$$

άρα:

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|} = \frac{-1\cdot 1 - 2\cdot(-3) - 6\cdot(-5)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-3)^2+(-5)^2}}$$

$$=\frac{-1+6+30}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{35}}=\frac{35}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{35}}=\sqrt{\frac{35}{41}}\,.$$

Όμοια υπολογίζονται και οι υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου. □

3. Έστω $\vec{a}\,,\vec{b}\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\cdot\left|\vec{a}\right|^2+2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\,.$$

Λύση: (α) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

$$=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\,.$$

(β) Εργαζόμαστε όπως στην (α) και αποδεικνύουμε ότι:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Τελικά: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\cdot\left|\vec{a}\right|^2+2\cdot\left|\vec{b}\right|^2$. □

4. Δείξτε ότι $\left|\vec{a}+c\cdot\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}\right|\quad\forall\,c\in\mathbb{R}$ αν και μόνον αν $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Λύση: Αρχικά υποθέτουμε ότι $\vec{a}\perp\vec{b}$. Τότε:

$$\left|\vec{a}+c\cdot\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+c^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2+2\cdot c\cdot\overset{0}{\cancel{\vec{a}\cdot\vec{b}}}=\left|\vec{a}\right|^2+c^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\geq\left|\vec{a}\right|^2,$$

άρα: $\left|\vec{a}+c\cdot\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}\right|$. Αντιστρόφως έστω ότι $\left|\vec{a}+c\cdot\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}\right|\ \forall c\in\mathbb{R}$ και έστω ότι $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$. Τότε:

$$\left|\vec{a}+c\cdot\vec{b}\right|^2\geq\left|\vec{a}\right|^2\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|^2+c^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2+2c\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\geq\left|\vec{a}\right|^2\Leftrightarrow c^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2+2c\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0\,.$$

Θέλουμε η τελευταία ανισότητα της παραπάνω σχέσης να ισχύει $\forall c \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε όμως ότι ισχύει πάντοτε $\forall c \geq 0$, ενώ για $c < 0$ ισχύει μόνον όταν

$$c \leq -\frac{2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο διότι υποθέσαμε εξ αρχής ότι η ανισοισότητα $\left|\vec{a} + c \cdot \vec{b}\right| \geq \left|\vec{a}\right|$ ισχύει $\forall c \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ και εργασθούμε ακριβώς με την ίδια λογική πάλι καταλήγουμε σε άτοπο. Αναγκαστικά λοιπόν ισχύει:

$$\left|\vec{a} + c \cdot \vec{b}\right| \geq \left|\vec{a}\right| \quad \forall\, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \qquad \square$$

5. Αν $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ δείξτε ότι ότι και τα $\vec{u} + 2\vec{v} + 4\vec{w}, 2\vec{v} + 5\vec{u} + \vec{w}, 3\vec{u} + \vec{w}$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα διαύσματα.

Λύση: Έστω $k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$k \cdot \left(\vec{u} + 2\vec{v} + 4\vec{w}\right) + \lambda \cdot \left(2\vec{v} + 5\vec{u} + \vec{w}\right) + \mu \cdot \left(3\vec{u} + \vec{w}\right) = \vec{\mathbf{0}}.$$

Τότε

$$\left(k + 5\lambda + 3\mu\right) \cdot \vec{u} + \left(2k + 2\lambda\right) \cdot \vec{v} + \left(4k + \lambda + \mu\right) \cdot \vec{w} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Επειδή τα u, v, w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εξ ορισμού το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} k + 5\lambda + 3\mu = 0 \\ 2k + 2\lambda = 0 \\ 4k + \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

πρέπει να έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Το σύστημα αυτό είναι ομογενές 3×3 σύστημα. Επειδή η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων ικανοποιεί την

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -26 \neq 0$$

συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική $k = \lambda = \mu = 0$. Άρα τα $\vec{u} + 2\vec{v} + 4\vec{w}, 2\vec{v} + 5\vec{u} + \vec{w}, 3\vec{u} + \vec{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. $\square$

Αλυτες ασκήσεις

4.1. Δίνεται $P=(1,-1), Q=(4,3),\ A=(-1,5),\ B=(7,1)$. Είναι τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{AB}$ **(i)** παράλληλα, **(ii)** ίσα, **(iii)** κάθετα μεταξύ τους; **(iv)** Αποτελούν τα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{AB}$ βάση του επιπέδου; **(v)** Αν ναι υπολογίστε τις συντεταγμένες του σημείου *A=(1,1)* ως προς τη βάση αυτή.

Απάντ. (i) Οχι **(ii)** Οχι, **(iii)** Οχι, **(iv)** Ναι, *k=3/11*, *λ=1/44*

4.2 Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{a}=(1,1,3)$ και $\vec{b}=(2,1,0)$ δεν είναι συγγραμικά. Βρείτε διάνυσμα $\vec{c}$ ώστε το σύνολο $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ να είναι βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$. Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των $\vec{a},\vec{b}$.

Απάντ. $\vec{c}=(-3,6,-1)$, $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{3}{\sqrt{55}}$

4.3. Αν $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ είναι η κανονική βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{a}=3\vec{e_1}-2\vec{e_2}-\vec{e_3}$, $\vec{b}=\vec{e_1}-3\vec{e_2}$ και $\vec{c}=\vec{e_1}+\vec{e_2}-2\vec{e_3}$ σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. Στη συνέχεια υπολογίστε το εμβαδόν του με χρήση εξωτερικού γινομένου. **Απάντ.** E=$\sqrt{84}/2$

4.4. Αν $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ είναι η κανονική βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$ να βρεθεί διάνυσμα κάθετο στα $\vec{a}=2\vec{e_1}+\vec{e_2}-3\vec{e_3}$, $\vec{b}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}+\vec{e_3}$ μέτρου 5.

Απάντ. $\pm\dfrac{5}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

4.5. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνον αν τα $\vec{a},\vec{b}$ έχουν το ίδιο μέτρο.

4.6. Δείξτε ότι οι διαγώνιοι τετραγώνου τέμνονται κάθετα.

4.7. Εστω $\vec{a}=(-1,2)$. Βρείτε $\vec{b}=(x,y)$ ώστε $\vec{b}\perp\vec{a}$ και $|\vec{b}|=\sqrt{5}$.

Απάντ. $\vec{b}=\pm(2,1)$

4.8. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{a}=(2,-6,-3), \vec{b}=(4,3,-1)$.

Απάντ. $\vec{c}=(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7})$ ή $\vec{c}=(-\frac{3}{7},\frac{2}{7},-\frac{6}{7})$

4.9. Δείξτε ότι $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0}$.

4.10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(1,1,3),\vec{b}=(2,1,0),\vec{c}=(0,1,2)$. Δείξτε ότι τα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ δεν είναι συνεπίπεδα. Ποιος ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$; **Απάντ.** *V= 4*

4.11. Δίνεται τραπέζιο ΟΑΒΓ ($O\to A\to B\to\Gamma$) ώστε $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{b}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{a}/2$. Εάν M είναι το σημείο τομής των διαγωνίων, να δειχθεί ότι $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}\right)$.

4.12. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνον αν $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$ αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$.

4.16. Εξετάστε αν τα στοιχεία $(1,2,1,0),(1,2,-1,0),(0,0,2,0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^4$. **Απάντ.** Είναι γραμμικά εξαρτημένα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εξισώσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο

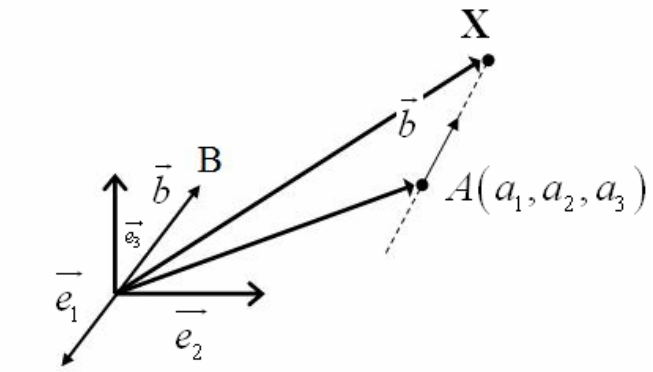
5.1. Εξισώσεις ευθείας στο χώρο $\mathbb{R}^3$:

Για να έχουμε εποπτική παράσταση θα εργασθούμε στο χώρο $\mathbb{R}^3$ αλλά τα αποτελέσματα γενικεύονται και στο χώρο $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

5.1.1 Διανυσματική εξίσωση ευθείας που διέρχεται από σημείο A και είναι παράλληλη προς διάνυσμα $\vec{b}$. Παραμετρικές και συμμετρικές εξισώσεις ευθείας.

Έστω $A = (a_1, a_2, a_3)$ είναι δοθέν σημείο του $\mathbb{R}^3$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου B. Τότε καλούμε ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{b}$ να είναι το σύνολο των σημείων $X = (x_1, x_2, x_3)$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$$



Εφόσον τα διανύσματα $\overrightarrow{AX}$ και $\vec{b}$ είναι συγγραμικά παίρνουμε τη ***διανυσματική εξίσωση ευθείας***

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{b}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Από τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας προκύπτουν άμεσα οι ***παραμετρικές εξισώσεις ευθείας***

$$(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3) + t \cdot (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + t \cdot b_1 \\ x_2 = a_2 + t \cdot b_2, \ t \in \mathbb{R} \\ x_3 = a_3 + t \cdot b_3 \end{cases}.$$

Εάν $b_i \neq 0 \ \forall i$, τότε απαλείφοντας το t σε κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε ***τις συμμετρικές εξισώσεις ευθείας***:

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3}.$$

5.1.2 Ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία $A = (a_1, a_2, a_3)$ και $B = (b_1, b_2, b_3)$.

Στην περίπτωση αυτή η ευθεία διέρχεται από σημείο $A = (a_1, a_2, a_3)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. Συνεπώς η διανυσματική εξίσωση ευθείας είναι

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{O\mathrm{A}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}B}, \ t \in \mathbb{R},$$

ενώ οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας είναι:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + t \cdot (b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + t \cdot (b_2 - a_2), \ t \in \mathbb{R} \\ x_3 = a_3 + t \cdot (b_3 - a_3) \end{cases}.$$

Ορισμός 5.1 *Γωνία φ μεταξύ δυο ευθειών (ε_1) και (ε_2) καλούμε τη μικρότερη γωνία μεταξύ δύο οποιονδήποτε διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ των (ε_1) και (ε_2) αντιστοίχως. Η γωνία φ υπολογίζεται από τη σχέση:*

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}.$$

Προφανώς ισχύει $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

5.1.3 Σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

Θεωρούμε δύο ευθείες με διανυσματικές εξισώσεις:

$$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{a} \\ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \vec{b} \end{array} \right. , t \in \mathbb{R},$$

οι οποίες διέρχονται από σημεία A και B αντιστοίχως και είναι παράλληλες σε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ αντιστοίχως. Οι ευθείες αυτές μπορεί να είναι:

- *ασύμβατες* (δηλαδή μη συνεπίπεδες) ή
- *συνεπίπεδες*. Στην περίπτωση αυτή οι ευθείες είτε τέμνονται σε σημείο, είτε είναι παράλληλες, είτε συμπίπτουν.

Ειδικότερα:

- οι ευθείες είναι ασύμβατες αν και μόνον αν $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{b}\right] \neq 0$ (μικτό γινόμενο).
- οι ευθείες είναι συνεπίπεδες αν και μόνον αν $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{b}\right] = 0$. Τότε:
    - εάν $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$ τότε οι ευθείες τέμνονται σε σημείο, ενώ
    - αν $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{\boldsymbol{0}}$ τότε οι ευθείες είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.

Αναφέρουμε ότι η απόσταση d μεταξύ δύο ασυμβάτων ευθειών είναι

$$d = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{b}\right] \right|}{\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|}.$$

5.2. Εξισώσεις επιπέδου στο χώρο.

5.2.1 Ορισμός. Αναλυτική εξίσωση επιπέδου.

Έστω $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και $\overrightarrow{ON} = (A, B, C)$ είναι το διάνυσμα θέσης σημείου N. Καλούμε επίπεδο που διέρχεται από το P_0 και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$ να είναι το σύνολο των σημείων $X = (x, y, z)$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{ON} = 0.$$

Η παραπάνω καλείται ***διανυσματική εξίσωση επιπέδου*** και μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}\right) \cdot \overrightarrow{ON} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)\Gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + \Gamma z = \underbrace{Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0}_{-D}$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + \Gamma z + D = 0. \quad (\textbf{\textit{αναλυτική εξίσωση επιπέδου}})$$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$ καλείται ***κανονικό διάνυσμα*** του επιπέδου.

5.2.2 Εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλο προς δυο μη συγγραμικά διανύσματα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Εφόσον τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη συγγραμικά είναι γνωστό ότι το εξωτερικό τους γινόμενο $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι διάνυσμα κάθετο στα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση με $\overrightarrow{ON} = \vec{a} \times \vec{b}$. Αρα η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου είναι η

$$\overrightarrow{P_0X} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0,$$

και από τον τύπο του μικτού γινομένου προκύπτει η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

5.2.3 Εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ ***και*** $\Gamma = (c_1, c_2, c_3)$.

Εστω *M=(x,y,z)* είναι σημείο του επιπέδου. Τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι μη συγγραμικά οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση και η εξίσωση του επιπέδου δίνεται από τη σχέση

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ενας άλλος τύπος που δίνει την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ορισμός 5.2 *Γωνία φ μεταξύ δυο επιπέδων E_1 και E_2 καλούμε τη μικρότερη γωνία μεταξύ των αντιστοίχων κανονικών διανυσμάτων τους* $\overrightarrow{ON_1}$ *και* $\overrightarrow{ON_2}$ *. Η γωνία φ υπολογίζεται από τη σχέση:*

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{ON_1} \cdot \overrightarrow{ON_2}\right|}{\left|\overrightarrow{ON_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{ON_2}\right|}.$$

Προφανώς $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

5.2.4 Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων.

Εστω δύο επίπεδα E_1 και E_2 με εξισώσεις $\begin{vmatrix} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \end{vmatrix}$. Τότε

- $E_1 // E_2$ αν και μόνον αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$.
- E_1, E_2 συμπίπτουν αν και μόνον αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$.
- Τα E_1 και E_2 τέμνονται κατά μήκος ευθείας αν και μόνον αν $\overrightarrow{ON_1} \times \overrightarrow{ON_2} \neq \vec{\boldsymbol{O}}$, όπου $\overrightarrow{ON_1}, \overrightarrow{ON_2}$ είναι τα κανονικά διανύσματα των E_1 και E_2 αντιστοίχως.

5.3 Απόσταση σημείου από επίπεδο.

Εστω επίπεδο E με εξίσωση $A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$ και $\overrightarrow{ON} = (A, B, \Gamma)$ το κανονικό διάνυσμα αυτού. Θεωρούμε σημείο $M=(x_0,y_0,z_0)$ εκτός του επιπέδου E και έστω $M_0=(x',y',z')$ είναι η προβολή του M πάνω στο E. Ορίζουμε $d = \left|\overrightarrow{M_0M}\right|$ να είναι η απόσταση του σημείου M από το επίπεδο E. Τότε

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M}\right| = |t| \cdot \overrightarrow{ON} = |t| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}\,.$$

Επίσης:

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \overrightarrow{ON} \Rightarrow (x_0 - x', y_0 - y', z_0 - z') = t(A, B, \Gamma)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x' = x_0 - tA \\ y' = y_0 - tB \\ z' = z_0 - t\Gamma \end{array} \right. . \qquad (A)$$

Εφόσον το σημείο $M_0=(x',y',z')$ είναι η προβολή του M πάνω στο E, το M_0 είναι σημείο του επιπέδου E, άρα οι συντ/νες του ικανοποιούν την εξίσωση του επιπέδου E. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις *(A)* στην εξίσωση του επιπέδου και μετά από στοιχειώδεις πράξεις βρίσκουμε

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}.$$

Αρα:

$$d = |t| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2} \Rightarrow d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}.$$

Λυμένες Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A = (1,1,-1), B(-2,1,3)$.

Λύση: Προφανώς $\overrightarrow{AB} = (-3,0,4)$, οπότε η διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι η $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$. Απ' αυτήν εύκολα προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας. Πράγματι

$$(x,y,z) = (1,1,-1) + t \cdot (-3,0,4) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 - 3 \cdot t \\ y = 1 \\ z = -1 + 4 \cdot t \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R} . \qquad \square$$

2. Υπολογίστε την εξίσωση ευθείας στον $\mathbb{R}^2$ που διέρχεται από σημείο $P = (-5,3)$ και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = (1,-1)$.

Λύση: Εστω $\vec{a} = (a_1, a_2)$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα. Τότε:

$$\vec{a} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \Leftrightarrow a_1 - a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 .$$

Επιλέγουμε (αυθαίρετα) $a_1 = a_2 = 1$ οπότε η διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(1,1)$ είναι

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t \cdot (1,1) \Leftrightarrow (x,y) = (-5,3) + t \cdot (1,1)$$

απ' όπου προκύπτουν εύκολα οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας:

$$\left| \begin{array}{l} x = -5 + t \\ y = 3 + t \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R} .$$

Με απαλοιφή του t παίρνουμε $y = x + 8$. $\square$

3. Υπολογίστε την εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από σημείο $P = (4,2,-1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{ON} = (1,-1,3)$.

Λύση: $\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{ON}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}\right)\cdot\overrightarrow{ON}=0$

$$\Rightarrow(x-4)\cdot 1+(y-2)\cdot(-1)+(z+1)\cdot 3=0$$

$$\Leftrightarrow\ x-4-y+2+3z+3=0\Leftrightarrow\ x-y+3z=-1\,.\ \square$$

4. Υπολογίστε την εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(2,1,1),(3,-1,1),(4,1,-1)$.

Λύση: Από τη θεωρία η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\ x+y+z=-7\,.\qquad\square$$

5. Υπολογίστε ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία που ορίζεται ως τομή των επιπέδων:

$$\begin{matrix}2x-y+z=1\\ 3x+y+z=2\end{matrix}.$$

Λύση: Έστω $x=c$, τότε $\begin{cases}-y+z=1-2c\\ y+z=2-3c\end{cases}$, άρα $2z=3-5c\Rightarrow z=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}c$,

συνεπώς:

$$y=z-1+2c=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}c+2c-1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c.$$

Τελικά η λύση του συστήματος είναι η ευθεία με διανυσματική εξίσωση:

$$(x,y,z)=\left(c,\frac{1-c}{2},\frac{3-5c}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)+c\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$$

άρα το διάνυσμα $\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$ είναι παράλληλο στην ευθεία που ορίζεται ως τομή των δύο επιπέδων. $\square$

6. Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των επίπεδων $x+y+z=1$,

$x - y - z = 5$.

Λύση: Η γωνία μεταξύ δύο επιπέδων ορίζεται ως η μικρότερη γωνία μεταξύ των κανονικών διανυσμάτων τους $\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}$. Προφανώς $\overrightarrow{N_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{N_2} = (1,-1,-1)$, άρα:

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\left|\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \vartheta = \tau o \xi \sigma \upsilon \nu \left(\frac{1}{3}\right). \quad \square$$

7. Έστω $P = (1,3,5)$ και $A = (-2,1,1)$. Υπολογίστε την τομή της ευθείας από το P στην κατεύθυνση του A και του επιπέδου $2x + 3y - z = 1$.

Λύση: Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας είναι:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση του επιπέδου και τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας, άρα:

$$2(1 - 2t) + 3(3 + t) - (5 + t) = 1 \Rightarrow t = 5/2 \ ,$$

συνεπώς οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι:

$$\left(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\right) = \left(1 - 2t_0, 3 + t_0, 5 + t_0\right) = \left(-4, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

8. Υπολογίστε την εξίσωση του επιπέδου:

(α) που διέρχεται από το σημείο $\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ και είναι κάθετο στην ευθεία (ε) : $\{x = \pi + 2t, y = 2\pi + 5t, z = 9t\}$.

(β) που περιέχει τις παράλληλες ευθείες με εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-5}{4} \\ \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z}{4} \end{cases}.$$

Λύση: (α) Από τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας βρίσκουμε εύκολα ότι το διάνυσμα $\vec{a} = (2,5,9)$ είναι παράλληλο στην ευθεία, οπότε το κανονικό διάνυσμα του επιπέδου είναι το διάνυσμα $\vec{a}$ και επομένως η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$(x-2)\cdot 2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)\cdot 5 + \left(z - \frac{1}{3}\right)\cdot 9 = 0 \Rightarrow 2x + 5y + 9z = \frac{19}{2}.$$

(β) Ενα σημείο της $1^{\eta\varsigma}$ ευθείας είναι το $P_1 = (1,-1,5)$. Υπολογίζουμε δύο σημεία της $2^{\eta\varsigma}$ ευθείας π.χ. τα $P_2 = (-3,4,0)$ και $P_3(6,10,12)$. Το κανονικό διάνυσμα του επιπέδου είναι το

$$\vec{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -4 & 5 & -5 \\ 5 & 11 & 7 \end{vmatrix} = (35+55)\vec{e_1} - (-28+25)\vec{e_2} + (-44-25)\vec{e_3}$$

$$= 90\vec{e_1} + 3\vec{e_2} - 69\vec{e_3} = (90,3,-69),$$

οπότε η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$90\cdot(x-1) + 3\cdot(y+1) - 69\cdot(z-5) = 0. \qquad \square$$

9. Είναι τα $(1,4,2), (4,-3,-5), (-5,-10,-8)$ σημεία της ίδιας ευθείας;

Λύση: Μελετούμε το μικτό γινόμενο των αντιστοίχων διανυσμάτων θέσης των παραπάνω σημείων:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & -5 \\ -5 & -10 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -10 & -8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$=(24-50)-4\cdot(32-25)+2\cdot(-40-15)\neq 0,$$

άρα τα σημεία είναι μη συνευθειακά αφού τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης αυτών αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$. □

10. Δείξτε ότι η ευθεία $\left\{\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{12},\ z=5\right\}$ είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $P_0=(5,7,9)$ και $P_1=(4,11,9)$.

Λύση: Από τη θεωρία είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το διάνυσμα $\vec{a}=(-3,12,0)$ είναι παράλληλο προς την 1η ευθεία, ενώ το διάνυσμα $\overrightarrow{P_0P_1}=(4,11,9)-(5,7,9)=(-1,4,0)$ είναι παράλληλο προς τη 2η ευθεία. Επειδή:

$$\vec{a}\times\overrightarrow{P_0P_1}=\vec{\boldsymbol{O}}$$

οι δύο ευθείες είναι παράλληλες. □

11. Υπολογίστε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $P_0=(3,-1,2)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξισώσεις $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+3}{2}=z$.

Λύση: Από τη θεωρία ένα διάνυσμα παράλληλο στη 2η ευθεία είναι το $(4,2,1)$, οπότε η διανυσματική εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι η:

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP_0}+t(4,2,1),\quad t\in\mathbb{R}$$

και οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{cases} x_1=3+4t \\ x_2=-1+2t,\quad t\in\mathbb{R}. \\ x_3=2+t \end{cases}$$ □

12. Δείξτε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(1,7,5)$ και $(3,2,-1)$ είναι παράλληλη με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(-2,8,17)$ και $(2,-2,5)$.

Λύση: Υπολογίζουμε δύο διανύσματα παράλληλα προς τις αντίστοιχες ευθείες:

$$\vec{a} = (3,2,-1) - (1,7,5) = (2,-5,-6)$$
$$\vec{b} = (2,-2,5) - (-2,8,17) = (4,-10,-12)$$

Για να είναι οι δύο ευθείες παράλληλες, αρκεί $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{\boldsymbol{0}}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -5 & -6 \\ 4 & -10 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -10 & -12 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} \vec{e_3} = \vec{\boldsymbol{0}}. \qquad \square$$

Αλυτες ασκήσεις

5.1. Υπολογίστε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A = (2, 0, -3), B(2, -5, 9)$.

Απάντ. $\{x = 2, y = -5t, z = -3 + 12t,\ t \in \mathbb{R}\}$

5.2. Υπολογίστε την εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από σημείο $P = (0, 1, -3)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{N} = (2, 1, -4)$.

Απάντ. $2x + y - 4z = 13$

5.3. Υπολογίστε την εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(2, 1, 1), (3, -1, 1), (4, 1, -1)$. **Απάντ.** $x + y + 2z = 7$

5.4. Υπολογίστε διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία που ορίζεται ως τομή των επιπέδων $\begin{cases} -x+3y-z=1 \\ 2x+y-3z=4 \end{cases}$. **Απάντ.** $\left(1, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right)$

5.5. Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των επίπεδων $-2x + 3y + z = 0$ και $x - 3y = 2$. **Απάντ.** $συνθ = -\frac{11}{\sqrt{140}}$

5.6. Έστω $P = (0, 1, -1)$ και $A = (2, 0, -3)$. Υπολογίστε την τομή της ευθείας από το P στην κατεύθυνση του A και του επιπέδου $-2x + y - 3z = 4$. **Απάντ.** $\Gamma = (0, 1, -1)$

5.7. Υπολογίστε την εξίσωση του επιπέδου:

(α) που διέρχεται από το σημείο $(-2, 2, 3)$ και είναι κάθετο στην ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις $x = 1 - 3t,\ y = 2 + 3t,\ z = 5t$.

(β) που περιέχει τις παράλληλες ευθείες με εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+2}{3} \\ \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+1}{6} \end{cases}.$$

Απάντ. (α) $3x - 3y - 5z = -27$ **(β)** $2x + y - 2z = 4$

5.8. Είναι τα $(-1,0,-2),(2,3,-1),(0,-4,-2)$ σημεία της ίδιας ευθείας; **Απάντ.** Όχι

5.9. Έστω διάνυσμα $\vec{L}=(2,1,0)$ και σημείο $P_1=(3,4,9)$ που δεν ανήκει στον φορέα του $\vec{L}$. Υπολογίστε την απόσταση d μεταξύ του σημείου P_1 και του φορέα του διανύσματος $\vec{L}$. **Απάντ.** $\sqrt{86}$

5.10. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ του σημείου $P=(1,1,2)$ και του επιπέδου με εξίσωση $3x+y-5z=2$. **Απάντ.** $\frac{8}{\sqrt{35}}$

5.11. Υπολογίστε την εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία *P_1=(1,2,3)* και *P_2=(2,3,1)* και είναι κάθετο στο επίπεδο $4x-y+2z-7=0$. **Απάντ.** $5y+z=13$.

5.12. Υπολογίστε τις οι συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας που περνά από το σημείο *P=(1,1,1)* και είναι κάθετη στην ευθεία

Απάντ. $\{3x-5y+2=0,\ 2x+3z+1=0\}$.

5.13. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x-1=\frac{y+1}{2}=z$ και το επίπεδο Π: $3x+y-5z+1=0$. Δείξτε ότι η ευθεία είναι παράλληλη προς το επίπεδο και στη συνέχεια υπολογίστε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ευθεία *(ε)* και είναι κάθετο στο επίπεδο Π.

Απάντ. $11x-8y+5z=19$.

5.14. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου *P=(1,2,3)* από την ευθεία που ορίζεται ως η τομή των επιπέδων $2x+y+z+5=0,\ x-y+z+3=0$.

Απάντ. $d=\frac{\sqrt{171}}{7}$

5.15. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z-6}{7} \text{ και } \varepsilon_2:\ x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{3}.$$

Δείξτε ότι είναι ασύμβατες και να υπολογίσετε τη μεταξύ τους απόσταση.

Απάντ. $d=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

5.16. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x+1=y-1=z$ και $\varepsilon_2 : x\text{-}1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$.
Προσδιορίστε πραγματικό αριθμό λ ώστε οι ευθείες να είναι ασύμβατες.
Απάντ. $\lambda \neq \dfrac{5}{4}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα τετραγωνικού πίνακα

6.1. Ορισμοί.

Ορισμός 6.1 *Έστω A είναι ένας n×n πίνακας,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *και* $\vec{u} = (u_1, ..., u_n)$ *είναι ένα* ***μη μηδενικό*** *διάνυσμα-στήλη του* $\mathbb{R}^n$ *(ή του* $\mathbb{C}^n$*). Ο αριθμός λ καλείται ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα u όταν τα λ και* $\vec{u}$ *ικανοποιούν την ισότητα*

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Ορισμός 6.2 *Έστω A είναι ένας n×n πίνακας. Καλούμε* ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** *του πίνακα A την ορίζουσα*

$$p(\lambda) = Det\left(A - \lambda \cdot \boldsymbol{I}_{n\times n}\right) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Θεώρημα 6.1 *Κάθε n×n πίνακας A έχει n το πλήθος ιδιοτιμές οι οποίες αποτελούν ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A. Δηλαδή οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της αλγεβρικής εξίσωσης*

$$Det\left(A - \lambda \boldsymbol{I}_{n\times n}\right) = 0$$

που καλείται και ως ***χαρακτηριστική εξίσωση*** *του A.*

Απόδ. Από τον ορισμό $A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ προκύπτει άμεσα ότι

$$\left(\mathrm{A} - \lambda I_{n\times n}\right) \cdot \vec{u} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ομογενές και έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής αν και μόνον αν η ορίζουσα $Det\left(A - \lambda \cdot \boldsymbol{I}_{n\times n}\right) = 0$. Προφανώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = Det\left(A - \lambda \cdot \boldsymbol{I}_{n\times n}\right)$ είναι πολυώνυμο *n* βαθμού το οποίο ως γνωστόν έχει ακριβώς *n* το πλήθος ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$. □

6.2. Διαγωνοποίηση πίνακα.

***Θεώρημα 6.2* (διαγωνοποίηση πίνακα)** *Εάν* $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα-γραμμές ενός* $n\times n$ *πίνακα* A *με αντίστοιχες ιδιοτιμές* $\lambda_1,...,\lambda_n$ *τότε ισχύει*

$$A = U \cdot D \cdot U^{-1},$$

όπου ο U *είναι ένας* $n\times n$ *πίνακας που σχηματίζεται τοποθετώντας τις συντ/νες των διανυσμάτων* $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ *ως στήλες του πίνακα* U *και* D *είναι ένας διαγώνιος πίνακας πίνακας του οποίου τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι οι ιδιοτιμές* $\lambda_1,...\lambda_n$ *του πίνακα* U.

Παρατήρηση: Ενας $n\times n$ πίνακας A μπορεί να μην είναι διαγωνοποιήσιμος. Σημειώνουμε ότι σε κάθε ιδιοτιμή λ_i πολλαπλότητας k_i (***αλγεβρική πολλαπλότητα*** ιδιοτιμής) αντιστοιχούν μ_i γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα (***γεωμετρική πολλαπλότητα*** ιδιοτιμής), όπου $\mu_i \le k_i$.

- Αν $\mu_i = k_i$ για κάθε ιδιοτιμή τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.
- Αν $\mu_{i_0} < k_{i_0}$ για κάποια ιδιοτιμή λ_{i_0} τότε ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Με άλλα λόγια ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν η αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα όλων των ιδιοτιμών του ταυτίζονται.

***Θεώρημα 6.3* (Caley-Hamilton)** *Κάθε* $n\times n$ *πίνακας* A *αποτελεί ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του.*

Θεώρημα 6.4 *Εστω* $\lambda_1,...,\lambda_n$ *είναι οι ιδιοτιμές ενός* $n\times n$ *πραγματικού πίνακα* A *με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα* $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$. *Αν οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο, δηλαδή εάν* $\lambda_i \ne \lambda_j \ \forall i \ne j$ *τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα* $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Θεώρημα 6.5 *Εστω ότι* A *είναι ένας* ***ερμητιανός*** $n\times n$ *πίνακας. Τότε:*

(α) *ο πίνακας* A *έχει μόνον πραγματικές ιδιοτιμές* $\lambda_1,...,\lambda_n$.

(β) *υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύνολο* $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ *ιδιοδιανυσμάτων του A. Κατ' επέκταση υπάρχει ορθοκανονικός πίνακας U που σχηματίζεται από τα ιδιοδιανύσματα στήλες του A τέτοιος ώστε*

$$A = U \cdot D \cdot U^{*}.$$

Θεώρημα 6.6 *Εστω* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ *είναι ένας* $n \times n$ *πίνακας και έστω* $\lambda_1,...,\lambda_n$ *είναι οι ιδιοτιμές του. Τότε η ορίζουσα του A ισούται με*

$$Det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

και το ***ίχνος*** *του A, συμβολικά* $trace(A)$ *ισούται με*

$$trace(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n.$$

6.3 Ιδιότητες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

- Ενας $n \times n$ πίνακας A και ο ανάστροφός του A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (όχι όμως και τα ίδια ιδιοδιανύσματα).

- Οι ιδιοτιμές τριγωνικού πίνακα είναι ίσες με τα διαγώνια στοιχεία του.

- Ενας $n \times n$ πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή ίση με μηδέν.

- Αν λ είναι μία ιδιοτιμή $n \times n$ πίνακα A τότε η $k \cdot \lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $k \cdot A$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε η λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του πίνακα A^{-1}. Επίσης η λ^k είναι ιδιοτιμή του A^k.

Λυμένες ασκήσεις

1. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι το

$$Det\left(A-\lambda\cdot I_2\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda=5\ \dot{\eta}\ \lambda=-1.$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι 5 και -1. Αν *(x,y)* είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=5$ τότε έχουμε

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}4x=2y\\ 4x=2y\end{vmatrix}\Leftrightarrow y=2x.$$

Αρα οι λύσεις του συστήματος είναι $(x,y)=(x,2x)=x(1,2),\ x\in\mathbb{R}$ και το διάνυσμα $(1,2)$ είναι μια βάση του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων.

Ομοίως για την ιδιοτιμή $\lambda=-1$ έχουμε

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}y=-x\\ y=-x\end{vmatrix}\Leftrightarrow y=-x.$$

Αρα οι λύσεις του συστήματος είναι $(x,y)=(x,-x)=x(1,-1),\ x\in\mathbb{R}$ και το διάνυσμα $(1,-1)$ είναι είναι μια βάση του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων. □

2. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$p(\lambda)=Det\left(A-\lambda\cdot \boldsymbol{I}_{3\times 3}\right)=\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ -1 & 1-\lambda & 1\\ -1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}=3\lambda^2-\lambda^3.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $3\lambda^2-\lambda^3$ δηλαδή

$$Det\left(A-\lambda\cdot \boldsymbol{I}_{3\times 3}\right)=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=0\ (\delta\iota\pi\lambda\eta)},\ \boxed{\lambda=3}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda=0,\ \lambda=3$ υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος $A\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}$ αντικαθιστώντας την τιμή του λ με τη συγκεκριμένη ιδιοτιμή που βρήκαμε. Πιο συγκεκριμένα:

- Για $\lambda=0$ έχουμε

$$A\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}\Leftrightarrow\left(A-0\cdot \boldsymbol{I}_{3\times 3}\right)\cdot\vec{u}=\vec{\boldsymbol{0}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad (A1)$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}u_1-u_2-u_3=0\\ -u_1+u_2+u_3=0\\ -u_1+u_2+u_3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow u_1-u_2-u_3=0.$$

Για να λύσουμε το παραπάνω θέτουμε $u_2=c=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$ και $u_3=d=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$ οπότε η λύση του συστήματος *(A1)* είναι όλα τα διανύσματα $u=\left(u_1,u_2,u_3\right)$ των οποίων οι συντεταγμένες είναι της μορφής

$$u=\left(u_1,u_2,u_3\right)=\left(c+d,c,d\right)=c\left(1,1,0\right)+d\left(1,0,1\right). \qquad (A2)$$

Όλα τα διανύσματα *(A2)* είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή *λ=0* και όπως φαίνεται στην προκειμένη περίπτωση ορίζουν ένα διδιάστατο χώρο με βάση $\left\{(1,1,0),(1,0,1)\right\}$. Εκλέγουμε τη βάση αυτή ως αντιπρόσωπο και λέμε ότι στην ιδιοτιμή *λ=0* αντιστοιχεί η βάση ιδιοδιανυσμάτων $\left\{(1,1,0),(1,0,1)\right\}$.

- Για $\lambda=3$ έχουμε

$$A\cdot\overline{u}=\lambda\cdot\overline{u}\Leftrightarrow\left(A-3\cdot\boldsymbol{I}_{3\times3}\right)\cdot\overline{u}=\overline{\boldsymbol{O}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}2u_1+u_2+u_3=0\\u_1+2u_2-u_3=0\\u_1-u_2+2u_3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}u_1=-u_3\\u_2=u_3\end{array}\right..$$

Επομένως η λύση του αρχικού συστήματος είναι όλα τα διανύσματα $u=\left(u_1,u_2,u_3\right)$ των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν τη σχέση

$$\left(u_1,u_2,u_3\right)=\left(-u_3,u_3,u_3\right)=u_3\left(-1,1,1\right),\ u_3\in\mathbb{R}. \qquad (A3)$$

Όλα τα διανύσματα *(A3)* είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή *λ=3* και όπως φαίνεται ορίζουν ένα μονοδιάστατο χώρο με βάση το διάνυσμα *(-1,1,1)*. Εκλέγουμε αυτή ως αντιπρόσωπο και λέμε ότι το διάνυσμα *(-1,1,1)* είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή *λ=3*. Τελικά

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=0(\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta})\leftrightarrow\left\{\left(1,1,0\right),\left(1,0,1\right)\right\}\\\lambda=2\leftrightarrow\left(-1,1,1\right)\end{array}\right..$$

□

3. Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}.$$

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$p(\lambda)=Det\left(A-\lambda\cdot\boldsymbol{I}_{3\times3}\right)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\0&1-\lambda&-1\\0&2&4-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\lambda-2\right)^2\left(\lambda-3\right).$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα *A* είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$Det\left(A-\lambda\cdot\boldsymbol{I}_{3\times3}\right)=0\Leftrightarrow\lambda=2\ (\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}),\ \lambda=3.$$

Για $\lambda=2$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -y \\ z = -y \end{array} \right. ,$$

Άρα $(x, y, z) = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}$. Διαπιστώνουμε ότι ενώ η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda=2$ είναι ίση με 2, εν αντιθέσει η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με 1. Αρα ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. □

4. Να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας A της άσκησης 2.

Λύση: Εφόσον $\begin{cases} \lambda = 0 (\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}) \leftrightarrow \{(1,1,0),(1,0,1)\} \\ \lambda = 2 \leftrightarrow (-1,1,1) \end{cases}$ είναι οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα αυτών και εφόσον η αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών $\lambda=0$ και $\lambda=2$ ταυτίζονται ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Γράφουμε τις συντ/νες των παραπάνω ιδιοδιανυσμάτων ως στήλες του πίνακα

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός είναι αντιστρέψιμος και επιπλέον

$$U^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ορίζουμε επίσης το διαγώνιο πίνακα

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $U \cdot D \cdot U^{-1} = A$. □

5. Αν $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Στη συνέχεια δείξτε ότι

$$A^{101}+A^{51}-2A=\mathbf{0}.$$

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$p(\lambda)=Det\left(A-\lambda\cdot \boldsymbol{I}_{3\times 3}\right)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(1+\lambda)(1-\lambda).$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι $\lambda=0$, $\lambda=1$ και $\lambda=-1$.

- Για $\lambda=0$ έχουμε

$$A\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}\Leftrightarrow\left(A-0\cdot \boldsymbol{I}_{3\times 3}\right)\cdot\vec{u}=\vec{\boldsymbol{0}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε η λύση είναι όλα τα διανύσματα $u=(u_1,u_2,u_3)$ των οποίων οι συντεταγμένες είναι της μορφής

$$u=(u_1,u_2,u_3)=(0,c,0)=c(0,1,0),\ c\in\mathbb{R}.$$

Λέμε λοιπόν ότι στην ιδιοτιμή *λ=0* αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $(0,1,0)$ (ως αντιπρόσωπος όλων των ιδιοδιανυσμάτων).

- Για $\lambda=1$ έχουμε

$$A\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}\Leftrightarrow\left(A-1\cdot \boldsymbol{I}_{3\times 3}\right)\cdot\vec{u}=\vec{\boldsymbol{0}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} u_1+u_2=0 \\ u_3=0 \end{vmatrix},$$

άρα η λύση του συστήματος είναι όλα τα διανύσματα $u=(u_1,u_2,u_3)$ των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν τη σχέση

$$(u_1,u_2,u_3)=(u_1,-u_2,0)=u_1(1,-1,0),\ u_1\in\mathbb{R}.$$

- Για $\lambda=-1$ έχουμε

$$A\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}\Leftrightarrow\left(A+1\cdot\boldsymbol{I}_{3\times3}\right)\cdot\vec{u}=\vec{\boldsymbol{0}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

άρα η λύση του συστήματος είναι όλα τα διανύσματα $u=(u_1,u_2,u_3)$ των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν τη σχέση

$$(u_1,u_2,u_3)=(0,0,u_3)=u_3(0,0,1),\ u_3\in\mathbb{R}.$$

Τελικά

$$\begin{cases}\lambda=0\leftrightarrow(0,1,0)\\ \lambda=1\leftrightarrow(1,-1,0)\\ \lambda=-1\leftrightarrow(0,0,1)\end{cases}.$$

Αρα ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και ισχύει $A=U\cdot D\cdot U^{-1}$, όπου

$$U=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι

$$A^k=U\cdot D^k\cdot U^{-1}=U\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^k&0\\0&0&1^k\end{pmatrix}\cdot U^{-1}.$$

Συνεπώς αν $k=$περιττός τότε

$$A^k = U \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{pmatrix} \cdot U^{-1} = U \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot U^{-1} = A.$$

Τελικά

$$A^{101} + A^{51} - 2A = A + A - 2A = \mathbf{0}. \qquad \square$$

6. Εστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A είναι το $x^4 - 2x^3 + x + 4$. Να υπολογίσετε **(α)** τη διάσταση του πίνακα A, **(β)** να εκφράσετε τον πίνακα A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του A.

Λύση: (α) Εφόσον το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $4^{ου}$ βαθμού τότε και ο A είναι 4×4 πίνακας.

(β) Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton είναι γνωστό ότι ο πίνακας A είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του, άρα:

$$A^4 - 2A^3 + A + 4I_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow -A^4 + 2A^3 - A = 4I_4$$

$$\Leftrightarrow A\left(-A^3 + 2A^2 - I_4\right) = 4I_4 \Leftrightarrow A\left(\frac{-A^3 + 2A^2 - I_4}{4}\right) = I_4.$$

Αρα $A^{-1} = \dfrac{-A^3 + 2A^2 - I_4}{4}$. $\square$

Αλυτες ασκήσεις

6.1. Να διαγωνοποιηθούν οι πίνακες

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Απάντ. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}2/3 & 2/3 & 1/3\\ 1/3 & -1/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & -2/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3/4 & 1/4 & 5/8\\ 3/4 & -3/4 & -3/8\\ 0 & 1 & -1/2\end{pmatrix}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Δευτεροβάθμιες καμπύλες στο επίπεδο και δευτεροβάθμιες επιφάνειες

7.1 Δευτεροβάθμιες καμπύλες στο επίπεδο.

Η γενική μορφή μιας δευτεροβάθμιας καμπύλης στον $\mathbb{R}^2$ είναι

$$Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + Z = 0, \quad (A, B, ..., Z \in \mathbb{R}). \qquad (1)$$

Η γραφική παράσταση της (1) με κατάλληλη παράλληλη μεταφορά και στροφή καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων ανάγεται σε κάποια από τις ακόλουθες μορφές:

- Έλλειψη: $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1, \ (a, b > 0)$,
- Υπερβολή: $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1, \ (a, b > 0)$,
- Παραβολή: $Y^2 = 2pX, \ (X^2 = 2qY)$,
- ζεύγος παραλλήλων ή τεμνομένων ευθειών,
- σημείο,
- η εξίσωση είναι αδύνατη στον $\mathbb{R}^2$.

Για να εντοπίσουμε την ακριβή μορφή της καμπύλης (1) εργαζόμαστε ως εξής:

Αν $A, B, ..., Z \in \mathbb{R}$ είναι όπως στην (1), ορίζουμε τους αριθμούς:

- $\mathbf{R} = A + \Gamma$,
- $\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & A \end{vmatrix}$,
- $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} A & B/2 & \Delta/2 \\ B/2 & \Gamma & E/2 \\ \Delta/2 & E/2 & Z \end{vmatrix}$.

Τότε ισχύει:

- $\Delta > 0$ και $\begin{cases} \boldsymbol{R} \cdot D < 0 \Rightarrow \text{ έλλειψη} \\ \boldsymbol{R} \cdot D > 0 \Rightarrow \text{αδύνατη} \\ D = 0 \Rightarrow \text{σημείο} \end{cases}$

- $\Delta < 0$ και $\begin{cases} D \neq 0 \Rightarrow \text{ υπερβολή} \\ D = 0 \Rightarrow \text{ζεύγος τεμνόμενων ευθειών} \end{cases}$

- $\Delta = 0$ και $\begin{cases} D \neq 0 \Rightarrow \text{ παραβολή} \\ D = 0 \text{ και } \begin{cases} \mathbf{S} > 0 & \text{αδύνατη} \\ \mathbf{S} = 0 & \text{ζεύγος συμπιπτουσών ευθειών} \\ \mathbf{S} < 0 & \text{ζεύγος παραλλήλων ευθειών} \end{cases} \end{cases}$,

όπου $\boxed{\mathbf{S} = Z \cdot \mathbf{R} - \left(\left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{E}}{2} \right)^2 \right)}$.

7.2 Δευτεροβάθμιες επιφάνειες.

Κάθε επιφάνεια της μορφής

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + A_4xy + A_5xz + A_6yz + A_7x + A_8y + A_9z + A_{10} = 0,\ \ A_i \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

καλείται επιφάνεια 2^{ου} βαθμού στο χώρο.

A. ***<u>Ας υποθέσουμε ότι από την εξίσωση (2) λείπουν δύο μεταβλητές</u>*** π.χ. οι μεταβλητές y και z. Προκύπτει λοιπόν η επιφάνεια με εξίσωση

$$A_1x^2 + A_7x + A_{10} = 0,\ \ y, z \in \mathbb{R}.$$

Η παραπάνω εξίσωση προφανώς θα έχει είτε δύο άνισες πραγματικές ρίζες, είτε μία διπλή πραγματική ρίζα, είτε καμία πραγματική ρίζα. Εστω ρ_1, ρ_2 είναι οι πραγματικές ρίζες του τριωνύμου (όταν υπάρχουν). Τότε η επιφάνεια μας είναι το σύνολο των σημείων

$$\{(\rho_1, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\} \text{ και } \{(\rho_2, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\},$$

δηλαδή δύο επίπεδα που συμπίπτουν ή είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Τελικά αν από την επιφάνειά μας λείπουν δύο μεταβλητές, τότε η επιφάνεια μας είναι: είτε ζεύγος παραλλήλων επιπέδων, είτε ζεύγος συμπιπτουσών επιπέδων, είτε δεν υπάρχει επιφάνεια που ικανοποιεί την (2).

B. ***<u>Ας υποθέσουμε ότι από την εξίσωση (2) λείπει μία μεταβλητή</u>*** π.χ. η μεταβλητή z (δηλαδή $A_3 = A_5 = A_6 = A_9 = 0$). Τότε προκύπτει μία επιφάνεια με εξίσωση

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_4xy + A_7x + A_8y + A_{10} = 0,\ \ z \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

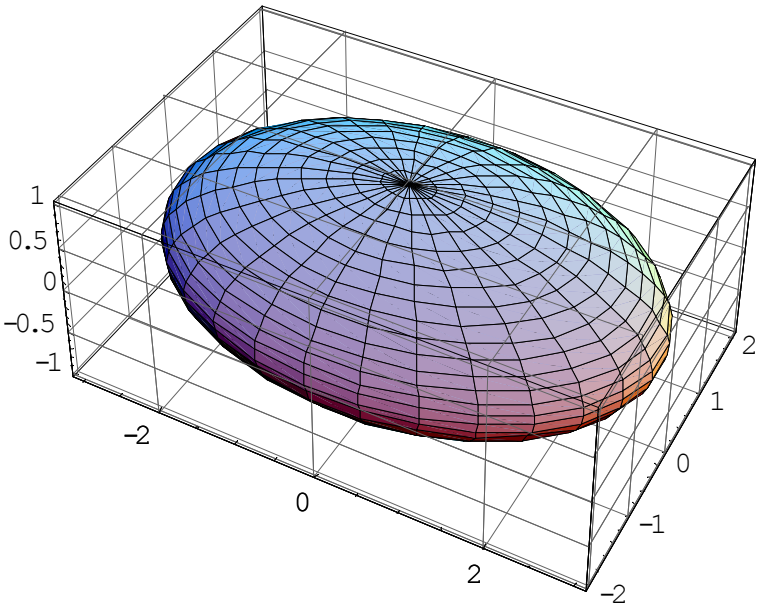
Προφανώς $\forall z \in \mathbb{R}$ η προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο Oxy είναι μία δευτεροβάθμια καμπύλη γένους παραβολής, έλλειψης ή υπερβολής όπως τη μελετήσαμε παραπάνω. Μία τέτοια επιφάνεια καλείται ***κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό την καμπύλη (3)*** διότι προκύπτει από την κίνηση μιας ευθείας γραμμής παράλληλης στον άξονα z′z κατά μήκος της καμπύλης με εξίσωση (3).

Γ. ***<u>Τέλος ας θεωρήσουμε τη γενική περίπτωση όπου κάθε μεταβλητή x,y,z εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στην εξίσωση (2)</u>***. Προφανώς αν στην (2) εμφανίζονται μόνον γραμμικοί όροι η (2) είναι ένα επίπεδο. Στο εξής θεωρούμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον μη γραμμικός όρος στην (2). Τότε η μορφή της επιφάνειας ανάγεται σε κάποια από τις ακόλουθες μορφές :

Γ1. Ελλειψοειδές με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \left(a,b,c>0\right),$$

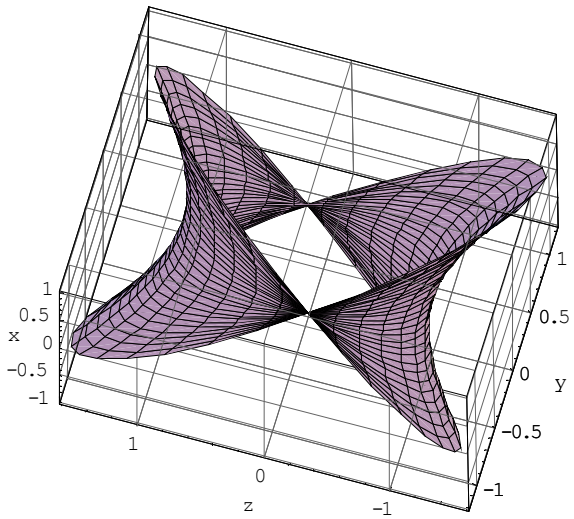
όπου $|x|\le a,|y|\le b,|z|\le c$. Οι τομές αυτής με τα επίπεδα *Oxy, Oyz, Oxz* είναι ελλείψεις.



Γ2. Μονόχωνο υπερβολοειδές με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \left(a,b,c>0\right).$$

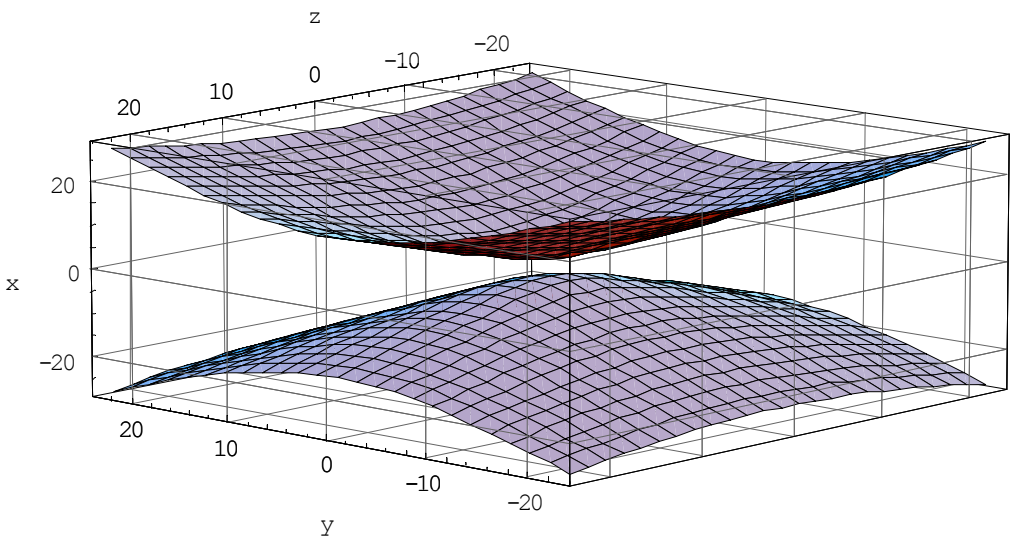
Οι τομές αυτής με τα επίπεδα *Oxy, Oyz* είναι υπερβολές, ενώ με το επίπεδο *Oxz* είναι έλλειψη.



Γ3. Δίχωνο υπερβολοειδές με εξίσωση

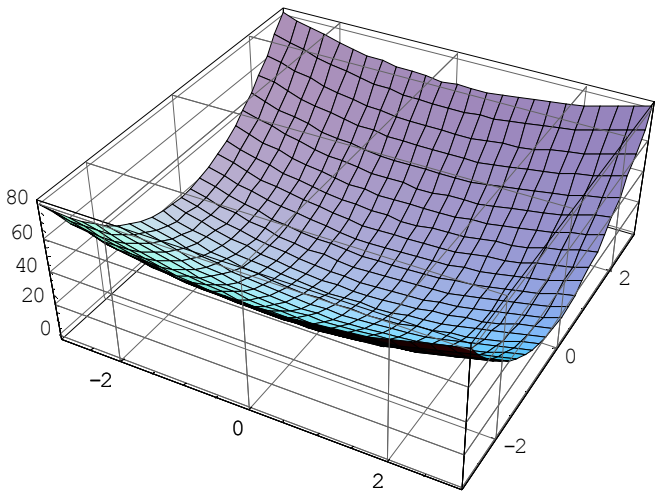
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

όπου $|x|\geq a,\ y,z\in\mathbb{R},\ a,b,c>0$. Οι τομές αυτής με τα επίπεδα *Oxy, Oxz* είναι υπερβολές. Δεν τέμνει το επίπεδο *Oyz*.



Γ4. Ελλειπτικό παραβολοειδές με εξίσωση

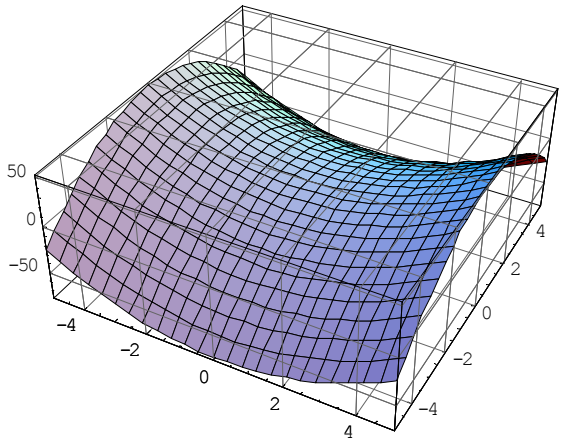
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz\ \left(a,b>0,\ c\in\mathbb{R}^*\right)$$



Καλείται έτσι διότι η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο *z=c* είναι έλλειψη (υπό την προϋπόθεση $cz \geq 0$). Το επίπεδο *Oxy* εφάπτεται της επιφάνειας στο σημείο *(0,0,0)*, ενώ οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα *Oxz, Oyz* είναι παραβολές.

Γ5. Υπερβολικό παραβολοειδές με εξίσωση

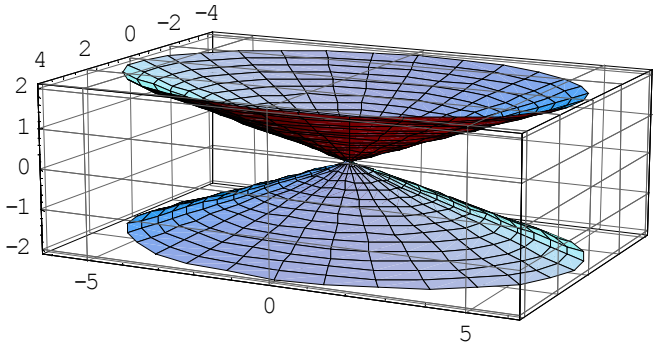
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \ \left(a, b > 0,\ c \in \mathbb{R}^*\right)$$



Καλείται έτσι διότι η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο *z=c* είναι υπερβολή. Το επίπεδο *Oxy* εφάπτεται της επιφάνειας στο σημείο *(0,0,0)*, ενώ οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα *Oxz, Oyz* είναι παραβολές.

Γ6. Κωνική επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



Παραδείγματα

1. Να αναγνωρισθούν οι επιφάνειες με εξισώσεις

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3y^2 + 2x + z - 2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z^2 + x - y = 0 \end{aligned}.$$

Λύση: Δημιουργούμε τέλεια τετράγωνα ως εξής:

$$2x^2 - 3y^2 + 2x + z - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + x\right) - 3y^2 + z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - 3y^2 + z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3y^2 + z - 2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3y^2 + \left(z - \frac{9}{4}\right) = 0.$$

Θέτουμε *x+1/2=X, y=Y, z-9/4=Z*, οπότε (με παράλληλη μεταφορά του συστήματος συντ/νων κατά το διάνυσμα $\left(-1/2, 0, 9/4\right)$) παίρνουμε

$$2X^2 - 3Y^2 + Z = 0 \Leftrightarrow -2X^2 + 3Y^2 = Z$$

Αρα έχουμε ένα *υπερβολικό παραβολοειδές*.

Ομοίως

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + x - y = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x\right) + \left(2y^2 - y\right) - z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+2\left(y^2-\frac{y}{4}+\frac{1}{16}\right)-z^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-z^2=\frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{32}{5}\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{16}{5}z^2=1.$$

Θέτουμε *x+1/2=X, y-1/4=Y, z=Z*, οπότε (με παράλληλη μεταφορά του συστήματος συντ/νων κατά το διάνυσμα $(-1/2,1/4,0)$) παίρνουμε

$$\frac{16}{5}X^2+\frac{32}{5}Y^2-\frac{16}{5}Z^2=1.$$

Αρα έχουμε ένα *μονόχωνο υπερβολοειδές*. □

2. Να αναγνωρισθούν οι επιφάνειες χωρίς να γίνουν οι πράξεις

i) $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=2$, **ii)** $2(x-3z)^2+3(x-z)^2=1$.

Λύση: i) Θέτουμε *x+1=X, y-2=Y, z=Z* οπότε η εξίσωση της επιφάνειας παίρνει τη μορφή

$$X^2+Y^2+Z^2=2$$

η οποία είναι *σφαίρα* κέντρου *(X,Y,Z)=(0,0,0)* και ακτίνας $\sqrt{2}$.

ii) Επειδή λείπει μία μεταβλητή η γραφική παράσταση είναι μία κυλινδική επιφάνεια. Μετά από πράξεις παίρνουμε

$$5x^2-18xz+21z^2-1=0.$$

Επειδή η διακρίνουσα $A\Gamma-B^2/4=5\cdot 21-18^2/4>0$ έχουμε κυλινδρική επιφάνεια γένους έλλειψης. □

Αλυτες ασκήσεις

7.1. Να αναγνωρίσετε τις κάτωθι καμπύλων $2^{ου}$ βαθμού (χωρίς να γίνουν άλλες πράξεις):

(α) $2x^2+4x+1=y^2-4y$, **(β)** $2xy+3x=y-1$,

(γ) $x^2+y^2+4x-1=2xy$, **(δ)** $2xy=3x^2-2$, **(ε)** $2x^2+2y^2-2xy-1=0$.

Απάντ. (α) Υπερβολή, **(β)** Υπερβολή, **(γ)** Παραβολή, **(δ)** Υπερβολή, **(ε)** Ελλειψη.

7.2. Να αναγνωρισθούν οι επιφάνειες χωρίς να γίνουν οι πράξεις

i) $3(x-1)^2+2(y+3)^2-2z^2=2$, **ii)** $2(x-y-3z)^2-(x-z)^2=0$,

iii) $2(x-z)^2-3(x-z-1)^2=1$, **iv)** $x-3+\frac{1}{2}(y+z)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2=3$.

Απάντ. (i) Μονόχωνο υπερβολοειδές**, (ii)** ζεύγος τεμνόμενων επιπέδων**, (iii)** κυλινδρική επιφάνεια, **(iv)** ελλειπτικό παραβολοειδές.