Σημειώσεις

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Νικόλαος Ατρέας

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2012

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς.
2. Στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις.
3. Οριο-Συνέχεια-Παράγωγος. Αναλυτικές Συναρτήσεις.
4. Μιγαδική Ολοκλήρωση. Το Θεώρημα Cauchy και εφαρμογές.
5. Σειρές Taylor και Laurent. Ολοκληρωτικά υπόλοιπα και εφαρμογές.
6. Αρμονικές συναρτήσεις και προβλήματα αρχικών συνθηκών.

Συμβολισμοί

- $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών.
- $\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών.
- $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών.
- $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ είναι ο συνήθης ευκλείδιος χώρος όλων των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών.
- $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Βιβλιογραφία

1. Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές. R. Churchill-J. Brown. Μετάφραση: Δ. Καραγιαννάκης, Π.Ε.Κ. (1993).

2. Βασική Μιγαδική Ανάλυση. Jerrold Mardsen, Michael Hofmann. Μετάφραση: Λ. Παπαλουκάς. Εκδόσεις Συμμετρία.

3. Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές. Ε. Γ. Γαλανής. Εκδόσεις Συμεών. (1994).

4. Theory and problems of complex Variables. M. Spiegel, McGraw-Hill.

1. Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς.

Ορισμός 1.1 *Το σύνολο* $\{(x,y): x,y \in \mathbb{R}\}$ *όλων των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών στο οποίο έχουν ορισθεί οι πράξεις*

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2),$$

$$k\cdot(x_1,y_1)=(k\cdot x_1,\ k\cdot y_1),\ k\in\mathbb{R},$$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1),$$

καλείται σύνολο των ***μιγαδικών αριθμών*** *και συμβολίζεται με* $\mathbb{C}$*. Τα στοιχεία του* $\mathbb{C}$ *καλούνται μιγαδικοί αριθμοί, συμβολικά* $z=(x,y)$*.*

Ορισμός 1.2 *Δύο μιγαδικοί αριθμοί* $z_1=(x_1,y_1)$ *και* $z_2=(x_2,y_2)$ *καλούνται ίσοι, συμβολικά* $z_1=z_2$ *αν και μόνον αν* $x_1=x_2$ *και* $y_1=y_2$*.*

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι το σύνολο $\mathbb{C}$ διατηρεί τη δομή του $\mathbb{R}^2$ ως διανυσματικού χώρου, παράλληλα όμως μέσω της νέας πράξης του γινομένου μιγαδικών αριθμών γίνεται και σώμα. Πράγματι, η πράξη της πρόσθεσης στο $\mathbb{C}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $z_1+z_2=z_2+z_1$.
- $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.
- Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός ο $(0,0)$ έτσι ώστε $z+(0,0)=z$.
- Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός ο **αντίθετος** του *z*, συμβολικά $-z=(-x,-y)$, έτσι ώστε $z+(-z)=(0,0)$.

Γεωμετρικά το άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών $z_1=(x_1,y_1)$ και $z_2=(x_2,y_2)$ αντιστοιχεί στο άθροισμα των αντιστοίχων διανυσμάτων με καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1,y_1) και (x_2,y_2).

Η πράξη του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού k με μιγαδικό αριθμό $z=(x,y)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $(k \cdot \lambda) \cdot z = k \cdot (\lambda \cdot z)$.
- $(k + \lambda) \cdot z = k \cdot z + \lambda \cdot z$.
- $k \cdot (z_1 + z_2) = k \cdot z_1 + k \cdot z_2$.

Γεωμετρικά το γινόμενο $k \cdot z$ αντιστοιχεί στο γινόμενο πραγματικού αριθμού k με διάνυσμα που έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y).

Τέλος η πράξη του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
- $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
- Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός ο $(1,0)$ έτσι ώστε $z \cdot (1,0) = z$.
- Για κάθε $z \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός ο **αντίστροφος** του z, συμβολικά z^{-1} ή $\frac{1}{z}$, έτσι ώστε $z \cdot z^{-1} = (1,0)$.

Η απόδειξη των παραπάνω είναι απλή εφαρμογή του ορισμού της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών.

Ορισμός 1.3 *Ορίζουμε ως αφαίρεση $z_1 - z_2$ του μιγαδικού αριθμού z_2 από το μιγαδικό αριθμό z_1 να είναι η πρόσθεση του z_1 με τον αντίθετο του z_2, δηλαδή*

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Αν $z_1 = (x_1, y_1) \neq (0,0)$ και $z_2 = (x_2, y_2)$ τότε ορίζουμε τη διαίρεση $\frac{z_2}{z_1}$ ως το γινόμενο του z_2 με τον αντίστροφο του z_1. Με άλλα λόγια

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 \cdot z_1^{-1}.$$

Σημείωση: Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right)$.

Θεώρημα 1.1 *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *ισχύουν οι σχέσεις:*

- $(x,0) + (y,0) = (x+y,0)$.
- $(x,0) \cdot (y,0) = (x \cdot y,0)$.
- $\frac{(x,0)}{(y,0)} = \left(\frac{x}{y}, 0 \right),\ y \neq 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση (βλέπε ορισμό πρόσθεσης και πολ/σμού). □

Από το Θεώρημα 1.1 βλέπουμε ότι οι πράξεις όσον αφορά όλους τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $(x,0)$, $(x \in \mathbb{R})$ είναι ακριβώς όπως στους πραγματικούς αριθμούς. Αν λοιπόν ορίσουμε το σύνολο

$$A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\},$$

τότε προφανώς ισχύει $A \subset \mathbb{C}$, το A είναι κλειστό ώς προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, το A περιέχει τους αριθμούς $(0,0)$ και $(1,0)$ και υπάρχει μία $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του A και του $\mathbb{R}$ μέσω της ισοδυναμίας

$$x \leftrightarrow (x,0).$$

Εφόσον οι πράξεις στο A είναι ακριβώς όπως στο $\mathbb{R}$ στο εξής θα ταυτίζουμε το σύνολο A με το $\mathbb{R}$. Με τον τρόπο αυτό επεκτείνουμε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών στο σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Μέσω αυτής της επέκτασης ταυτίζουμε το μιγαδικό αριθμό $(x,0)$ με τον πραγματικό αριθμό x και γράφουμε $x = (x,0)$. Ετσι το μηδέν γράφεται ως $0 = (0,0)$ και το ένα γράφεται ως $1 = (1,0)$. Αναφέρουμε όμως ότι η έννοια της συνήθους διάταξης των πραγματικών αριθμών δεν μπορεί να επεκταθεί στους μιγαδικούς αριθμούς. Έτσι μια έκφραση της μορφής $z_1 < z_2$ έχει νόημα μόνο όταν $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Απ' την άλλη μεριά εφόσον κάθε μιγαδικός αριθμός z αναπαρίσταται από ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών ως $z = (x,y)$ προφανώς υπάρχει μια $1-1$ απεικόνιση του $\mathbb{C}$ επί του $\mathbb{R}^2$ θεωρώντας ότι κάθε μιγαδικός αριθμός z

έχει καρτεσιανές συντεταγμένες x και y αντιστοίχως. Εφόσον κάθε μιγαδικός της μορφής $(x,0)$ παριστάνει έναν πραγματικό αριθμό x, **ο οριζόντιος άξονας $x'x$ στη γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ παριστάνει την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$**. Τι μπορούμε να πούμε για τον άξονα $y'y$ που παράγεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $(0,1)$; Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Ορισμός 1.4 *Ο μιγαδικός αριθμός $(0,1)$ συμβολίζεται με i, καλείται **φανταστική μονάδα και ο άξονας $y'y$ καλείται φανταστικός άξονας**. Κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής $(0,y)=y\cdot(0,1)=y\cdot i$ καλείται **φανταστικός αριθμός**. Προφανώς ισχύει η σχέση*

$$i^2=-1.$$

Με βάση τα παραπάνω κάθε μιγαδικός αριθμός $z=(x,y)$ μπορεί να γραφεί ως

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)=x\cdot 1+y\cdot i=x+iy.$$

Η $z=x+iy$ καλείται **κανονική ή αλγεβρική γραφή** του z, η τετμημένη x καλείται **πραγματικό μέρος** του z και συμβολίζεται με $Re(z)$, η τεταγμένη y καλείται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}(z)$ και το επίπεδο της γεωμετρικής αναπαράστασης του z καλείται **μιγαδικό επίπεδο**.

Ορισμός 1.5 *Εστω $z=x+iy$ είναι μιγαδικός αριθμός. Τότε ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z}=x-iy$ καλείται **συζυγής** του z.*

Είναι εύκολο να αποδειχθούν οι ιδιότητες:

(α) $Re(z)=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right)$, (β) $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}\left(z-\bar{z}\right)$,

(γ) $\bar{\bar{z}}=z$, (δ) $\overline{z_1\pm\cdots\pm z_n}=\bar{z}_1\pm\cdots\pm\bar{z}_n$,

(ε) $\overline{z_1\cdots z_n}=\bar{z}_1\cdots\bar{z}_n$, (στ) z πραγματικός $\Leftrightarrow z=\bar{z}$,

(ζ) z φανταστικός $\Leftrightarrow z=-\bar{z}$.

Ορισμός 1.6 *Καλούμε μέτρο* $|z|$ *του μιγαδικού αριθμού* $z = x + iy$ *το μη αρνητικό αριθμό* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *.*

Γεωμετρικά ο αριθμός $|z|$ παριστάνει την απόσταση του $z = (x, y)$ ως σημείου του μιγαδικού επιπέδου από την αρχή των αξόνων και συμπίπτει με τη συνήθη απόλυτη τιμή όταν $y = 0$. Με ανάλογο τρόπο ο αριθμός $|z_1 - z_2|$ ισούται με την απόσταση μεταξύ των μιγαδικών $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ θεωρούμενων ως σημείων του μιγαδικού επιπέδου.

Θεώρημα 1.2 *Ισχύουν οι σχέσεις:*

(α) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

(β) $|z_1 \cdots z_n| = |z_1| \cdots |z_n|$.

(γ) $Re(z) \le |Re(z)| \le |z|$.

(δ) $Im(z) \le |Im(z)| \le |z|$.

(ε) $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ανισότητα).

Απόδειξη. Οι (α)-(δ) είναι εύκολες. Θα δείξουμε την (ε) όσον αφορά το $|z_1 + z_2|$. Η απόδειξη είναι όμοια για το $|z_1 - z_2|$. Θα αποδείξουμε πρώτα το δεύτερο σκέλος της τριγωνικής ανισότητας. Εχουμε:

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\,\overline{z_2} + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot Re\left(z_1\overline{z_2}\right) \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot \left|Re\left(z_1\overline{z_2}\right)\right| \\
&\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| = \left(|z_1| + |z_2|\right)^2.
\end{aligned}
$$

Άρα $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το πρώτο σκέλος της ανισότητας. Εστω $|z_1| \ge |z_2|$. Τότε

$$|z_1| = |(z_1+z_2)+(-z_2)| \ \le \ |z_1+z_2|+|(-z_2)|,$$

οπότε:

$$|z_1|-|z_2| \ \le \ |z_1+z_2| \ \Rightarrow \ \big|\,|z_1|-|z_2|\,\big| \ \le \ |z_1+z_2|.$$

Ομοίως αν $|z_1| \le |z_2|$, τότε

$$|z_2| = |(z_2+z_1)+(-z_1)| \ \le \ |z_1+z_2|+|(-z_1)|,$$

οπότε:

$$|z_2|-|z_1| \ \le \ |z_1+z_2|.$$

Αρα σε κάθε περίπτωση έχουμε:

$$\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big| \ \le \ |z_1+z_2|. \qquad \square$$

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών μπορεί να επεκταθεί εισάγοντας το σύμβολο ∞ στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε ορίζουμε το **επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο**

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

έτσι ώστε:

- $z+\infty=\infty \ (z \ne \infty)$ και $\infty \cdot \infty = \infty$,
- $\dfrac{z}{\infty}=0$ για κάθε $z \ne \infty$ και
- $\begin{cases} z \cdot \infty = \infty \\ \dfrac{z}{0}=\infty \end{cases}$ για κάθε $z \ne 0$.

Ως γεωμετρικό μοντέλο για το $\overline{\mathbb{C}}$ χρησιμοποιούμε τη μοναδιαία σφαίρα (**σφαίρα του Riemann**). Πράγματι αν θεωρήσουμε την ευθεία που ενώνει το σημείο $N=(0,0,1)$ με οποιοδήποτε σημείο $P \ne N$ της σφαίρας τότε η ευθεία αυτή τέμνει το επίπεδο Oxy σε μοναδικό σημείο P' ορίζοντας μία $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της μοναδιαίας σφαίρας και των σημείων του μιγαδικού επιπέδου. Αυτή η απεικόνιση καλείται **στερεογραφική προβολή**. Αν συμπεριλάβουμε και το σημείο N παρατηρούμε ότι όταν ένα σημείο P της σφαίρας πλησιάζει το σημείο N, τότε η ευθεία που διέρχεται από τα δύο αυτά

σημεία τείνει να γίνει παράλληλη προς το μιγαδικό επίπεδο και συνεπώς το σημείο P' τείνει να γίνει το κατ' εκδοχήν ή επ' άπειρο σημείο του μιγαδικού επιπέδου Oxy. Αν $P=(x,y,c)$ είναι οι καρτεσιανές συντ/νες οποιουδήποτε σημείου της μοναδιαίας σφαίρας (εκτός του N) τότε οι συντ/νες του σημείου $P'=(x',y',0)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$x'=\frac{x}{1-c},\ y'=\frac{y}{1-c}\ \text{(ή σε μιγαδική μορφή } z=\frac{x}{1-c}+\frac{y}{1-c}i\text{).}$$

Αντιστρόφως, αν $z\in\mathbb{C}$ τότε αποδεικνύεται ότι οι συντ/νες σημείου P της σφαίρας Riemann μέσω της στερεογραφικής προβολής είναι

$$x=\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1},\ y=\frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)},\ c=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι μέσω της στερεογραφικής προβολής το άνω ημισφαίριο της σφαίρας του Riemann απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου δίσκου $\{z\in\mathbb{C}:\ |z|>1\}$ ενώ το κάτω ημισφαίριο απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου $\{z\in\mathbb{C}:|z|\ <1\}$.

Πολική ή Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

Έστω $\rho>0$ και $\theta\in\mathbb{R}$ είναι οι πολικές συντεταγμένες σημείου $A=(x,y)$ του (μιγαδικού) επιπέδου που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό $z=x+iy$. Επειδή $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y=\rho\eta\mu\theta$, ο μιγαδικός z μπορεί να γραφεί ως

$$z=x+iy=\rho\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta).$$

Είναι γνωστό ότι $|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Τότε

$$\boxed{z=|z|\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta+i\cdot\eta\mu\theta)}$$

και έτσι παίρνουμε την **πολική ή τριγωνομετρική μορφή** του z. Λαμβάνοντας υπόψη την περιοδικότητα των συναρτήσεων $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ η παραπάνω ισότητα παίρνει τη μορφή

$$z=|z|\cdot(\sigma\upsilon\nu(\theta+2k\pi)+i\cdot\eta\mu(\theta+2k\pi)),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Για δοθέν $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $z = |z| \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta + i \cdot \eta\mu\theta)$, το σύνολο των γωνιών

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

καλείται **όρισμα** του z, συμβολικά $\arg(z)$. <u>Ορισμα δεν ορίζεται για το μιγαδικό αριθμό</u> $z = 0$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων και A είναι εκείνο το σημείο στο μιγαδικό επίπεδο που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό z, γεωμετρικά το $\arg(z)$ είναι κάθε γωνία σε ακτίνια την οποία σχηματίζει ο θετικός ημιάξονας των πραγματικών αριθμών με το τμήμα OA.

Σημείωση: Στο εξής θα λέμε ότι η γωνία θ διαγράφεται με τη **θετική φορά** αν η γωνία θ διαγράφεται από το θετικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών προς την ημιευθεία OA αντιωρολογιακά. Αν η φορά διαγραφής από το θετικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών προς την ημιευθεία OA είναι η ωρολογιακή, γράφουμε –θ.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι το $\arg(z)$ παίρνει άπειρες τιμές που όμως διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Μεταξύ των επιμέρους στοιχείων του συνόλου $\arg(z)$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο που ανήκει στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ (ή στο $[0, 2\pi)$). Αυτό το στοιχείο καλείται **πρωτεύουσα τιμή του ορίσματος** ή **πρωτεύον όρισμα** και συμβολίζεται με $Arg(z)$. Εστω $z = x + iy$ είναι ένας μη μηδενικός αριθμός. Ενας τρόπος υπολογισμού του πρωτεύοντος ορίσματος είναι ο εξής:

Εστω ότι $Arg(z) \in [0, 2\pi)$ και $z = x + iy$. Αν

$$\theta_0 = \tau o \xi \varepsilon \phi\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), \ x \neq 0,$$

τότε:

$$Arg(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^o \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^o \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^o \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^o \text{ τεταρτημόριο} \end{cases}.$$

Αν θεωρήσουμε ότι $Arg(z) \in (-\pi, \pi]$ και θ_0 είναι όπως παραπάνω, τότε

$$Arg(z)=\begin{cases}\theta_0 & \text{αν } z\in 1^o \text{ τεταρτημόριο}\\ \pi-\theta_0 & \text{αν } z\in 2^o \text{ τεταρτημόριο}\\ -\pi+\theta_0 & \text{αν } z\in 3^o \text{ τεταρτημόριο}\\ -\theta_0 & \text{αν } z\in 4^o \text{ τεταρτημόριο}\end{cases}.$$

Θεώρημα 1.3 *Εστω* $z_j = |z_j|\left(\sigma\upsilon\nu\phi_j + i\cdot\eta\mu\phi_j\right),\ j=1,2$ *είναι δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί. Τότε:*

(α) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$ και $\phi_1=\phi_2+2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

(β) $\overline{z_1} = |z_1|\left(\sigma\upsilon\nu(-\phi_1)+i\cdot\eta\mu(-\phi_1)\right)$.

Με άλλα λόγια ο συζυγής $\overline{z}=x-iy$ *ενός μιγαδικού αριθμού* $z=x+iy$ *παριστάνεται στο μιγαδικό επίπεδο ως το συμμετρικό του σημείου* $z=(x,y)$ *ως προς τον πραγματικό άξονα.*

(γ) $z_1\cdot z_2 = |z_1||z_2|\left(\sigma\upsilon\nu(\phi_1+\phi_2)+i\cdot\eta\mu(\phi_1+\phi_2)\right)$.

Με άλλα λόγια το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών z_1,z_2 *είναι ένας νέος μιγαδικός αριθμός με μέτρο ίσο με το γινόμενο των μέτρων των* z_1,z_2 *και όρισμα* $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$.

(δ) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left(\sigma\upsilon\nu(\phi_1-\phi_2)+i\cdot\eta\mu(\phi_1-\phi_2)\right)$.

Με άλλα λόγια το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών z_1,z_2 *είναι ένας νέος μιγαδικός αριθμός με μέτρο ίσο με το πηλίκο των μέτρων των* z_1,z_2 *και όρισμα* $\arg(z_1/z_2)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$.

Απόδειξη. Οι (α) και (β) είναι προφανείς. Ενδεκτικά θα δείξουμε τη (γ). Εστω $z=z_1\cdot z_2$, όπου $z=|z|\left(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\cdot\eta\mu\varphi\right)$, $\varphi\in\mathbb{R}$. Από την πολική μορφή των μιγαδικών z_1,z_2 έχουμε

$$z=z_1\cdot z_2 = |z_1z_2|\left(\left(\sigma\upsilon\nu\phi_1\sigma\upsilon\nu\phi_2-\eta\mu\phi_1\eta\mu\phi_2\right)+i\cdot\left(\eta\mu\phi_1\sigma\upsilon\nu\phi_2+\eta\mu\phi_2\sigma\upsilon\nu\phi_1\right)\right)$$

$$= \left|z_1 z_2\right|\left(\sigma\upsilon\nu(\phi_1+\phi_2)+i\cdot\eta\mu(\phi_1+\phi_2)\right).$$

Από την (α) έχουμε $|z|=|z_1 z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ και $\varphi=\phi_1+\phi_2+2k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Αρα

$$\arg\left(z_1\right)+\arg\left(z_2\right)=\left\{\phi_1+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}+\left\{\phi_2+2\lambda\pi:\ \lambda\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$=\left\{\phi_1+\phi_2+2\left(k+\lambda\right)\pi:\ k,\lambda\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\phi_1+\phi_2+2\pi n:\ n\in\mathbb{Z}\right\}=\arg\left(z\right).$$ □

Προσοχή: Ισχύει

$$\boxed{\arg z+\arg z\neq 2\arg z.}$$

Πράγματι

$$\arg\left(z\right)+\arg\left(z\right)=\left\{\varphi+2n\pi:\ n\in\mathbb{Z}\right\}+\left\{\varphi+2\lambda\pi:\ \lambda\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$=\left\{\varphi+\varphi+2\left(n+\lambda\right)\pi:\ n,\lambda\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{2\varphi+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\},$$

αλλά

$$2\arg\left(z\right)=2\left\{\varphi+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{2\varphi+4k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Είναι προφανές ότι $\left\{2\varphi+4k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\subset\left\{2\varphi+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Κατ' επέκταση ισχύει:

$$\boxed{\arg\left(z^n\right)=\arg z+\ldots+\arg z\neq n\arg z,\quad n\in\mathbb{Z}.}$$

Προσοχή: Οσον αφορά τις πρωτεύουσες τιμές των ορισμάτων ισχύει

- $A\mathrm{rg}\left(z_1 z_2\right)=A\mathrm{rg}\left(z_1\right)+A\mathrm{rg}\left(z_2\right)+2\lambda_0\pi$ για κάποιο ακέραιο $\left|\lambda_0\right|\leq 1$.

Ομοίως:

- $A\mathrm{rg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=A\mathrm{rg}\left(z_1\right)-A\mathrm{rg}\left(z_2\right)+2\lambda_0\pi$ για κάποιο ακέραιο $\left|\lambda_0\right|\leq 1$.

Σημείωση: Συμβολίζουμε με $\arg_{\theta_0}\left(z\right)$ το συγκεκριμένο στοιχείο του συνόλου

$\arg(z)$ που ικανοποιεί την $\theta_0 \le \arg_{\theta_0}(z) < \theta_0 + 2\pi$.

Ορισμός 1.7 *Για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$ και $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ορίζουμε τη δύναμη μιγαδικού (με εκθέτη ακέραιο) ως εξής:*

(α) $z^0 = 1$.

(β) $z^n = z \cdots z$, n-φορές.

(γ) $z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n$.

Αν $z = |z|\left(\sigma\upsilon\nu\phi + i \cdot \eta\mu\phi\right)$ είναι ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός τότε από το Θεώρημα 1.3 και τον ορισμό 1.7 προκύπτει άμεσα ο **τύπος του Moivre**:

$$\boxed{z^n = |z|^n \left(\sigma\upsilon\nu\left(n\phi\right) + i \cdot \eta\mu\left(n\phi\right)\right),\ n \in \mathbb{Z}}. \qquad (1.1)$$

Ο τύπος του Euler

Είναι γνωστό ότι $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$. Αν δεχθούμε ότι η παραπάνω ισχύει για $x = iy,\ y \in \mathbb{R}$, όπου i είναι η φανταστική μονάδα, τότε έχουμε:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!}\cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \sigma\upsilon\nu y + i \cdot \eta\mu y,$$

όπου τα δεξιά μέλη της προτελευταίας ισότητας είναι τα αναπτύγματα McLaurin των συναρτήσεων συνy και ημy αντίστοιχα. Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής ορισμό (**τύπος Euler**):

$$\boxed{e^{iy} = \sigma\upsilon\nu y + i \cdot \eta\mu y,\ \left(y \in \mathbb{R}\right)}. \qquad (1.2)$$

- Προφανώς $|e^{iy}|=1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

- Η γεωμετρική ερμηνεία του e^{iy} είναι προφανής: Αν το $y \in [0,2\pi)$ **τότε η** e^{iy} **διαγράφει το μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το (0,0) στο μιγαδικό επίπεδο κατά τη θετική φορά**. Για $y \in \mathbb{R}$ επαναδιαγράφουμε το μοναδιαίο κύκλο άπειρες φορές.

Από τον ορισμό (1.2) γίνεται σαφές ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $z=|z|(\sigma\upsilon\nu\phi + i\cdot\eta\mu\phi)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\boxed{z=|z|\,e^{i\phi}}. \tag{1.3}$$

Επίσης ο τύπος De Moivre γίνεται:

$$\boxed{z^n=|z|^n\,e^{in\phi},\ \ n\in\mathbb{Z}}. \tag{1.4}$$

Αν $z=e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}$, τότε:

$$\left(e^{i\theta}\right)^n=\left(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta\right)^n=\sigma\upsilon\nu\left(n\theta\right)+i\eta\mu\left(n\theta\right),\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Νιοστές ρίζες

Ορισμός 1.8 *Εστω $a\in\mathbb{C}-\{0\}$ και $n\in\mathbb{N}-\{1\}$. Καλούμε νιοστή ρίζα του a, συμβολικά $\sqrt[n]{a}$ (ή $a^{1/n}$) **κάθε** ρίζα της εξίσωσης $z^n=a$.*

Αν λοιπόν $z=|z|\,e^{i\phi}$ είναι ένας τυχαίος μιγαδικός αριθμός και $a=|a|\,e^{i\theta}$, τότε από την εξίσωση $z^n=a$ σε συνδυασμό με τον τύπο του De Moivre παίρνουμε

$$z^n=a \ \Leftrightarrow\ |z|^n e^{in\phi}=|a|e^{i\theta} \ \Leftrightarrow\ |z|^n=|a| \ \text{ και } n\phi=\theta+2k\pi.$$

Κατά συνέπεια λύνοντας ως προς $|z|$ και ϕ παίρνουμε

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\theta+2\lambda\pi}{n}\right)},\ \lambda\in\mathbb{Z}$$

και θέτοντας $\lambda=l\cdot n+k,\ l\in\mathbb{Z},\ k=0,\dots,n-1$ παρατηρούμε λόγω περιοδικότητας των συνx και ημx, ότι έχουμε ακριβώς n διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες της εξίσωσης $z^n=a$, τις

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},\ k = 0,\ldots,n-1.$$

Δείξαμε λοιπόν το

Θεώρημα 1.4 *Εστω* $a \in \mathbb{C} - \{0\}$: $a = |a| e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ *και* $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. *Οι νιοστές ρίζες του* a *είναι οι μιγαδικοί αριθμοί*

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},\ k = 0,\ldots,n-1.} \qquad (1.5)$$

Σημείωση: (α) Γεωμετρικά οι νιοστές ρίζες του a αναπαρίστανται στο μιγαδικό επίπεδο ως κορυφές ενός κανονικού n-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας $\sqrt[n]{|a|}$.

(β) Αν $\theta = \mathrm{A}rg(z)$, παίρνουμε τον ισοδύναμο τύπο της (1.5):

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{Arg(a)+2k\pi}{n}\right)},\ k = 0,\ldots,n-1.}$$

Ορισμός 1.9 *Εστω* $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ *και* $\mu \in \mathbb{N}$. *Τότε ορίζουμε*

$$\boxed{a^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{a^{\mu}} = \left(a^{\mu}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Σημείωση: Από τον παραπάνω ορισμό παίρνουμε άμεσα ότι

$$\boxed{\sqrt[n]{a^{\mu}} = \sqrt[n]{|a|^{\mu}} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\mu\cdot Arg(a)+2k\pi}{n}\right)},\ k = 0,\ldots,n-1.}$$

Παρατήρηση: Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι

$$\left(a^{\mu}\right)^{\frac{1}{n}} \neq (a^{\frac{1}{n}})^{\mu}$$

εκτός εάν οι μ και n είναι πρώτοι μεταξύ τους (δηλ. έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα), δηλαδή $(\mu, n) = 1$.

Λυμένες ασκήσεις

1. Δείξτε ότι $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0,\ n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Από την ιδιότητα $i^2 = -1$ έχουμε $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, άρα

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = i^n\left(1 + i + i^2 + i^3\right) = i^n\left(1 + i - 1 - i\right) = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

2. Δείξτε ότι αν $z, w \in \mathbb{C}$, τότε $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) + (z-w)(\overline{z} - \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= 2(|z|^2 + |w|^2).
\end{aligned}$$

3. Υπολογίστε τις παραστάσεις:

$$\left(1+i\right)^{12},\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^4,\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^8 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^8.$$

Λύση. (i) Γράφουμε το μιγαδικό αριθμό $z = 1 + i$ σε πολικές συντεταγμένες. Έχουμε $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\theta_0 = \tau o \xi \varepsilon \varphi\left(\frac{|1|}{|1|}\right) = \frac{\pi}{4}$. Εφ'οσον ο z αντιστοιχεί σε σημείο του μιγαδικού επιπέδου στο 1ο τεταρτημόριο προκύπτει άμεσα ότι $Arg\left(z\right) = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$ και συνεπώς $1 + i = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi i}{4}}$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του De Moivre (1.4) παίρνουμε

$$\left(1+i\right)^{12} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} e^{\frac{12\pi i}{4}} = 2^6 e^{3\pi i} = -64.$$

(ii) Ομοια ο μιγαδικός αριθμός $w = 1 + i\sqrt{3}$ γράφεται σε πολικές συντεταγμένες ως $1 + i\sqrt{3} = 2\, e^{\frac{\pi i}{3}}$ και από τον τύπο του De Moivre έχουμε

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^4 = \left(2e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^4 = 2^4 e^{\frac{4\pi i}{3}} = 16e^{\frac{4\pi i}{3}} = 16\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - 8\sqrt{3}\ i.$$

(iii) Παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός $1-\sqrt{3}\ i$ είναι συζυγής του $1+\sqrt{3}\ i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$ (βλέπε (ii)). Τότε

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^8 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^8 = \left(2e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^8 + \left(2e^{-\frac{\pi i}{3}}\right)^8 = 2^8 e^{\frac{8\pi i}{3}} + 2^8 e^{-\frac{8\pi i}{3}}$$

$$= 2^8\left(e^{\frac{8\pi i}{3}} + e^{-\frac{8\pi i}{3}}\right) = 2^8 \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -2^8 = -256.$$

4. Υπολογίστε τις κυβικές ρίζες της μονάδας.

Λύση. Από την (1.5) έχουμε $z^3 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{|1|}\ e^{i\left(\frac{0+2\lambda\pi}{3}\right)}$, $\lambda = 0,1,2$, άρα:

$$z_1 = 1,\ z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ z_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

5. Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες του $z = -2 + 2i$ και να γραφούν σε καρτεσιανή και πολική μορφή.

Λύση. Επειδή $|z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$, $\theta_0 = \tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{|2|}{|-2|}\right) = \frac{\pi}{4}$ και ο $z = -2 + 2i$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο έχουμε $Arg(z) = \pi - \theta_0 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, συνεπώς $z = -2 + 2i = \sqrt{8}\ e^{3\pi i/4}$. Τότε από την (1.5) έχουμε

$$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{|-2+2i|}\ e^{i\cdot\left(\frac{3\pi/4+2\lambda\pi}{3}\right)},\ \lambda=0,1,2.$$

Αρα

$$z_0=\sqrt{2}\ e^{\frac{\pi i}{4}},\ z_1=\sqrt{2}\ e^{\frac{11\pi i}{12}},\ z_2=\sqrt{2}\ e^{\frac{19\pi i}{12}}$$

και μετατρέποντας αυτές σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε

$$z_0=1+i,\ \ z_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ \ z_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{12}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}).$$

6. Αν $n\in\mathbb{N}$ να επιλυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $(1+z)^{2n}=-(1-z)^{2n}$.

Λύση. Προφανώς η ισότητα δεν ικανοποιείται για $z=1$. Για κάθε $z\neq 1$ έχουμε

$$\left(1+z\right)^{2n}=-\left(1-z\right)^{2n}\Leftrightarrow\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n}=-1,$$

άρα από την (1.5) παίρνουμε $\frac{1+z}{1-z}=\sqrt[2n]{-1}=e^{i\cdot\left(\frac{\pi+2\lambda\pi}{2n}\right)},\ \lambda=0,\ldots,2n-1$. Λύνουμε ως προς z και έχουμε

$$z=\frac{e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{2n}}-1}{e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{2n}}+1}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\right)+i\eta\mu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\right)-1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\right)+i\eta\mu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\right)+1}$$

$$=\frac{-2\eta\mu^2\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)+i\eta\mu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\right)}{2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)+i\eta\mu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\right)}$$

$$=\frac{-2\eta\mu^2\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)+2i\eta\mu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)}{2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)+2i\eta\mu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)}$$

$$=\varepsilon\phi\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)\frac{-\eta\mu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)+i\sigma\upsilon\nu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)+i\eta\mu\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right)}$$

$$=i\cdot\varepsilon\phi\left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{4n}\right),\ \lambda=0,1,\ldots 2n-1.$$

7. Υπολογίστε την $\sqrt{\sqrt{-i}}$.

Λύση. Από την (1.5) έχουμε $\sqrt{-i}=e^{i\cdot\left(\frac{-\pi/2+2k\pi}{2}\right)}\ (k=0,1)=\begin{cases} e^{\frac{-\pi i}{4}}, & k=0 \\ e^{\frac{3\pi i}{4}}, & k=1 \end{cases}.$

- **1η περίπτωση:** $\sqrt{-i}=e^{\frac{-\pi i}{4}}$. Τότε:

$$\sqrt{\sqrt{-i}}=\sqrt{e^{\frac{-\pi i}{4}}}=e^{i\cdot\left(\frac{-\pi/4+2\lambda\pi}{2}\right)}\ (\lambda=0,1)=\begin{cases} e^{\frac{-\pi i}{8}}, & \lambda=0 \\ e^{\frac{7\pi i}{8}}, & \lambda=1 \end{cases}.$$

- **2η περίπτωση:** $\sqrt{-i}=e^{\frac{3\pi i}{4}}$. Τότε:

$$\sqrt{\sqrt{-i}}=\sqrt{e^{\frac{3\pi i}{4}}}=e^{i\left(\frac{3\pi/4+2\lambda\pi}{2}\right)}\ (\lambda=0,1)=\begin{cases} e^{\frac{3\pi i}{8}}, & \lambda=0 \\ e^{\frac{11\pi i}{8}}, & \lambda=1 \end{cases}.$$

Τελικά $\sqrt{\sqrt{-i}}=\left\{e^{\frac{-\pi i}{8}},\ e^{\frac{7\pi i}{8}},\ e^{\frac{3\pi i}{8}},\ e^{\frac{11\pi i}{8}}\right\}.$

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε

$$\sqrt{\sqrt{-i}}=\left((-i)^{1/2}\right)^{1/2}=(-i)^{1/4}=\sqrt[4]{-i}$$

και υπολογίσουμε την 4η ρίζα του $-i$ μέσω της (1.5). Αν και μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει $\left(a^{1/n}\right)^{1/m} = a^{\frac{1}{nm}}$, $n,m \in \mathbb{N}$, ***η ισότητα*** $\left(a^{z}\right)^{w} = a^{zw}$ ***δεν ισχύει εν γένει για δυνάμεις*** $z,w \in \mathbb{C}$.

8. Δείξτε ότι $\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} : k = 0,...,n-1 \right\}$. Επιπλέον αν $w_k = e^{2k\pi i/n}$, $k = 0,...,n-1$, δείξτε ότι οι νιοστές ρίζες της μονάδας ικανοποιούν τη σχέση

$$1 + w_1 + ... + w_{n-1} = 0 \ .$$

Λύση. Από την (1.5) παίρνουμε

$$\sqrt[n]{1} = e^{i\cdot\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right)} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \ \left(k = 0,...,n-1\right).$$

Το άθροισμα $1 + w_1 + ... + w_{n-1}$ είναι άθροισμα n-όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = e^{2\pi i/n}$, άρα από την ισότητα

$$1 + w_1 + ... + w_{n-1} = 1 + \lambda + ... + \lambda^{n-1} = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}, \ (\lambda = e^{2\pi i/n})$$

έχουμε $1 + w_1 + ... + w_{n-1} = \dfrac{1-e^{2\pi in/n}}{1-e^{2\pi i/n}} = \dfrac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{2\pi i/n}} = 0$.

9. Εστω $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R} - \left\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Δείξτε ότι

$$1 + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu\left(2\theta\right) + ... + \sigma\upsilon\nu\left(n\theta\right) = \frac{1}{2} + \frac{\eta\mu\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)} \ .$$

Λύση. Εστω $w_\theta = e^{i\theta}$. Τότε παρατηρούμε ότι

$$Re\left(1 + w_\theta + w_\theta^2 + ... + w_\theta^n\right) = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu\left(2\theta\right) + ... + \sigma\upsilon\nu\left(n\theta\right). \qquad (α)$$

Απ' την άλλη μεριά υπολογίζουμε:

$$1+w_\theta+w_\theta^2+\ldots+w_\theta^n=\frac{1-w_\theta^{n+1}}{1-w_\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i(n+1)\theta/2}\overline{e^{i(n+1)\theta/2}}-e^{i(n+1)\theta/2}e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}\overline{e^{i\theta/2}}-e^{i\theta/2}e^{i\theta/2}}$$

$$=\frac{e^{i(n+1)\theta/2}\left(\overline{e^{i(n+1)\theta/2}}-e^{i(n+1)\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(\overline{e^{i\theta/2}}-e^{i\theta/2}\right)}=\frac{e^{i(n+1)\theta/2}\left(-2i\eta\mu\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right)}{e^{i\theta/2}\left(-2i\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}$$

$$=\frac{e^{in\theta/2}\eta\mu\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{n\theta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)}+i\frac{\eta\mu\left(\frac{n\theta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Άρα

$Re\left(1+w_\theta+w_\theta^2+\ldots+w_\theta^n\right)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{n\theta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)}$, οπότε συνδυάζοντας με την (α) παίρνουμε

$$1+\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu(2\theta)+\ldots+\sigma\upsilon\nu(n\theta)=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{n\theta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $\eta\mu a\sigma\upsilon\nu b=\dfrac{\eta\mu(a+b)+\eta\mu(a-b)}{2}$ προκύπτει το ζητούμενο.

10. Ερμηνεύστε γεωμετρικά τά κάτωθι σύνολα του μιγαδικού επιπέδου:

(α) $D_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|<r\}$, r θετική σταθερά.

(β) $E=\{z\in\mathbb{C}:\ z=z_0+t(z_1-z_0),\ t\in\mathbb{R}\}$.

(γ) $E=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|=a|z-z_1|\}$, z_0,z_1 δοθέντες μιγαδικοί και $a\in(0,+\infty)$.

Λύση. Εστω $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$ και $z_1=x_1+iy_1$. Τότε:

(α) $|z-z_0|<r \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$.

Αρα το σύνολο $D_r(z_0)$ είναι το **εσωτερικό κύκλου κέντρου** z_0 **και ακτίνας** r.

(β) $z=z_0+t(z_1-z_0) \Leftrightarrow x+iy=(x_0+t(x_1-x_0))+i(y_0+t(y_1-y_0))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0+t(x_1-x_0) \\ y=y_0+t(y_1-y_0) \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Οι παραπάνω είναι οι **παραμετρικές εξισώσεις ευθείας που διέρχεται από το σημείο** z_0 **και είναι παράλληλη στο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό** z_1-z_0.

(γ) $|z-z_0|=a|z-z_1| \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=a\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$.

Υψώνοντας στο τετράγωνο (και μετά από στοιχειώδεις πράξεις) παίρνουμε:

$$(1-a^2)x^2+2(a^2x_1-x_0)x+(1-a^2)y^2+2(a^2y_1-y_0)y=a^2(x_1^2+y_1^2)-(x_0^2+y_0^2)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $a\neq 1$. Τότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας με $1-a^2$ παίρνουμε (με συμπλήρωση τετραγώνων):

$$\left(x+\frac{a^2x_1-x_0}{1-a^2}\right)^2+\left(y+\frac{a^2y_1-y_0}{1-a^2}\right)^2=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{a^2x_1-x_0}{1-a^2}\right)^2+\left(\frac{a^2y_1-y_0}{1-a^2}\right)^2+\frac{a^2(x_1^2+y_1^2)-(x_0^2+y_0^2)}{1-a^2}}_{R},$$

δηλαδή έχουμε **κύκλο** κέντρου $\left(-\frac{a^2x_1-x_0}{1-a^2},-\frac{a^2y_1-y_0}{1-a^2}\right)$ και ακτίνας $\sqrt{R}$ (R είναι όπως παραπάνω) υπό την προϋπόθεση ότι $R>0$ (αλλιώς έχουμε σημείο ή αδύνατη).

- $a=1$. Τότε έχουμε

$$2(x_1-x_0)x+2(y_1-y_0)y=(x_1^2+y_1^2)-(x_0^2+y_0^2),$$

δηλαδή έχουμε **μια ευθεία (η οποία είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα** z_0,z_1).

11. Δείξτε την ισότητα $\sigma\upsilon\nu(5\theta)=16\sigma\upsilon\nu^5\theta-20\sigma\upsilon\nu^3\theta+5\sigma\upsilon\nu\theta$.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler σε συνδυασμό με το διωνυμικό ανάπτυγμα του Newton

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad a,b\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}.$$

Λαμβάνοντας υπόψην ότι $0!=1$ (εξ ορισμού) και $k!=1\cdot 2\cdots k$ έχουμε

$$(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\sigma\upsilon\nu^{5-k}\theta(i\eta\mu\theta)^k$$

$$=\binom{5}{0}\sigma\upsilon\nu^5\theta(i\eta\mu\theta)^0+\binom{5}{1}\sigma\upsilon\nu^4\theta(i\eta\mu\theta)^1+\binom{5}{2}\sigma\upsilon\nu^3\theta(i\eta\mu\theta)^2$$

$$+\binom{5}{3}\sigma\upsilon\nu^2\theta(i\eta\mu\theta)^3+\binom{5}{4}\sigma\upsilon\nu\theta(i\eta\mu\theta)^4+\binom{5}{5}\sigma\upsilon\nu^0\theta(i\eta\mu\theta)^5$$

$$=\sigma\upsilon\nu^5\theta+5i\sigma\upsilon\nu^4\theta\eta\mu\theta-10\sigma\upsilon\nu^3\theta\eta\mu^2\theta$$

$$-10i\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu^3\theta+5\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^4\theta-i\eta\mu^5\theta. \qquad (α)$$

Απ' την άλλη μεριά από τον τύπο De Moivre έχουμε

$$\left(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta\right)^5 = \sigma\upsilon\nu\left(5\theta\right) + i\eta\mu\left(5\theta\right). \qquad (\beta)$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη των (α) και (β) και χρησιμοποιώντας την $\eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta$ μετά από στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο.

12. Δείξτε ότι $\eta\mu^3\theta = \frac{3}{4}\eta\mu\theta - \frac{1}{4}\eta\mu\left(3\theta\right)$.

Λύση. Εφόσον $\eta\mu\theta = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ έχουμε

$$\eta\mu^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}}{8i^3}$$

$$= \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = +\frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}\right) = \frac{3}{4}\eta\mu\theta - \frac{1}{4}\eta\mu\left(3\theta\right)$$

13. (α) Δείξτε ότι κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση $az^2 + bz + c = 0,\ a,b,c \in \mathbb{C},$ $a \neq 0$ έχει δύο ακριβώς λύσεις τις $z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (η ρίζα είναι μιγαδική).

(β) Επιλύστε την εξίσωση $\left(1 + i\right)z^2 - 2iz + \left(3 - 2i\right) = 0$.

Λύση. (α) $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \left(2az + b\right)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (η ρίζα θεωρείται μιγαδική).

(β) Μετά από στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε

$$\sqrt{b^2-4ac}=2\cdot\sqrt{-6-i}=2\cdot\sqrt{|-6-i|}\ e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)},\ (k=0,1)=\pm 2\sqrt[4]{37}\ e^{\frac{i\theta}{2}},$$

$$=\pm 2\sqrt[4]{37}\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)\right),$$

όπου $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{-6}{\sqrt{37}},\ \eta\mu\theta=\frac{-1}{\sqrt{37}}$ (οι πολικές συντεταγμένες του $-6-i$).

Αλλά $\sigma\upsilon\nu(2\theta)=2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2}}$ και εφόσον από τις παραπάνω τιμές του ημθ και συνθ προκύπτει ότι η γωνία θ ανήκει στο 3^{ο} τεταρτημόριο αναγκαστικά η γωνία θ/2 ανήκει στο 2^{ο} τεταρτημόριο επομένως

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{6}{\sqrt{37}}}{2}}=-\sqrt{\frac{\sqrt{37}-6}{2\sqrt{37}}}.$$

Με την ίδια λογική βρίσκουμε

$$\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\eta\mu\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{-1}{\sqrt{37}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{37}+1}{2\sqrt{37}}}.$$

Αρα

$$\sqrt{b^2-4c}=\pm 2\sqrt[4]{37}\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=\pm\sqrt{2}\left(-\sqrt{\sqrt{37}-6}+i\cdot\sqrt{\sqrt{37}+1}\right)$$

οπότε οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$z_{1,2}=\frac{2i\pm\sqrt{2}\left(-\sqrt{\sqrt{37}-6}+i\cdot\sqrt{\sqrt{37}+1}\right)}{2(1+i)}.$$

Αλυτες ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις ποσότητες:

(α) $(3+2i)(2-i)$, **(β)** $(2i-1)^2\left(\frac{4}{i-1}+\frac{2-i}{1+i}\right)$.

Απάντ. (α) $8+i$, **(b)** $-19/2+i\cdot 33/2$.

2. Αν $z_1=1-i,\ z_2=-2+i,\ z_3=\sqrt{3}-2i$ υπολογίστε τις ποσότητες

$$\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|,\quad \left|z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right|,\quad \mathrm{Im}\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right),\ \mathrm{Re}\left(2z_1^3+2z_2^2-5z_3^2\right).$$

Απάντ. (α) 0, **(b)** 6, **(γ)** $\frac{3\sqrt{3}-2}{7}$, **(δ)** 7.

3. Εκφράστε τους κάτωθι μιγαδικούς αριθμούς σε πολική μορφή

(α) $-i$, **(β)** $-2\sqrt{3}-2i$, **(γ)** $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$.

Απάντ. (α) $e^{\frac{3\pi i}{2}}$, **(b)** $4e^{\frac{7\pi i}{6}}$, **(γ)** $\sqrt{3}e^{\frac{5\pi i}{3}}$.

4. Δείξτε ότι:

(α) $z_1\cdot z_2=0 \Leftrightarrow z_1=0$ ή $z_2=0$.

(β) $\left|\overline{z}\right|^n=\overline{|z|^n}=|z|^n$.

(γ) Αν $A=(x_1,y_1)$ και $B=(x_2,y_2)$ είναι σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 αντιστοίχως δείξτε ότι $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$ όπου $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overline{OA},\overline{OB}$.

(δ) Εάν z είναι μιγαδικός αριθμός δείξτε ότι

$$Re(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{|z|^2}{z}\right),\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{|z|^2}{z}\right).$$

(ε) Εάν z_0 είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n=0$, $a_i\in\mathbb{R}$ δείξτε ότι και ο $\overline{z_0}$ είναι επίσης ρίζα αυτής.

(στ) Δείξτε ότι $\arg\left(\overline{z^n}\right)\neq -n\arg(z)$.

5. Δείξτε ότι για κάθε $z,w\in\mathbb{C}$ ισχύει $\left|1-\bar{z}w\right|^2-\left|z-w\right|^2=\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν $|z|,|w|<1$ τότε $\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|<1$.

6. Εστω z μιγαδικός έτσι ώστε $\mathrm{Im}(z)\neq 0$ και $z\neq\pm i$. Δείξτε ότι

$$\frac{z}{z^2+1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow |z|^2=1.$$

7. Δείξτε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία z_1,z_2 και τα σημεία z_3,z_4 είναι κάθετα αν και μόνον αν $Re\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\right)=0$.

8. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση $a|z|^2+cz+\overline{cz}+b=0,$ ($a,b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{C}-\{0\}$ γνωστοί). **Απάντ.** Αν $a=0$ ευθεία. Αν $a\neq 0$ και $|c|^2>ab$ κύκλος.

9. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

(α) $|z-(1+i)|=2$, **(β)** $|z+2|+|z-3i|=6$, **(γ)** $|z-1|-|z+1|=10$,

(δ) $\mathrm{Im}(z)=3$, **(ε)** $\mathrm{Im}\left(z^2\right)=4$, **(στ)** $\bar{z}(z+2)=3$.

Απάντ. (α) κύκλος κέντρου $1+i$ και ακτίνας 2. **(β)** έλλειψη με εστίες τα σημεία -2 και 3i. **(γ)** υπερβολή με εστίες τα σημεία 1 και -1. **(δ)** ευθεία παράλληλη με τον πραγματικό άξονα που διέρχεται από το $3i$. **(ε)** υπερβολή. **(στ)** κύκλος.

10. Υπολογίστε την ποσότητα $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$. **Απάντ.** $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

11. Δείξτε ότι: **(α)** $\dfrac{\eta\mu(4\theta)}{\eta\mu\theta}=4\sigma\upsilon\nu^3\theta-4\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\theta,\ (\theta\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$

(β) $\sigma\upsilon\nu^4\theta=\dfrac{\sigma\upsilon\nu(4\theta)}{8}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu(2\theta)}{2}+\dfrac{3}{8}$.

Υπόδ. (α) Οπως η λυμένη άσκ. 11. **(β)** Οπως η λυμένη άσκ. 12.

12. Εστω $n\in\mathbb{N},\ \theta\in\mathbb{R}-\{2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$. Δείξτε ότι

$$1+\eta\mu\theta+\eta\mu(2\theta)+\ldots+\eta\mu(n\theta)=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{(2n+1)\theta}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}.$$

Υπόδ. (α) Εργασθείτε όπως στη λυμένη άσκ. 9.

13. Δείξτε ότι: **(α)** $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right)=-1$.

(β) $\eta\mu\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)+\eta\mu\left(\dfrac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\eta\mu\left(\dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right)=0$.

Υπόδ. Υπολογίστε το άθροισμα των νιοστών ριζών της μονάδας.

14. Υπολογίστε και σχεδιάστε στο μιγαδικό επίπεδο τις τέταρτες ρίζες του 16.

Απάντ. $\{2,\ 2i,-2,\ -2i\}$, τετράγωνο με κορυφές τα σημεία αυτά.

15. Αν $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ δείξτε ότι $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

16. Να επιλυθούν οι εξισώσεις

(α) $z^2 + (i-2)z = -3 + i$, **(β)** $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$,

(γ) $z^4 = \sqrt{3} - i$, **(δ)** $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = -1$.

Απάντ. (α) $1+i,\ 1-2i$. **(β)** $1,\ 1,\ 2,\ -1 \pm i$ (σχήμα Horner).

(γ) $2e^{-\frac{\pi i}{12}},\ 2e^{\frac{5\pi i}{12}},\ 2e^{\frac{11\pi i}{12}},\ 2e^{\frac{17\pi i}{12}}$. **(δ)** $\frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)$.