Κεφάλαιο 8

Συνοριακά προβλήματα.

8.1. Αρμονικές συναρτήσεις.

Ορισμός 8.1. *Εστω $E \subset \mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό σύνολο και $f : E \to \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών x και y. Θα λέμε ότι η f είναι αρμονική στο E αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace*

$$f_{xx} + f_{yy} = 0 \text{ για κάθε } (x, y) \in E.$$

Θεώρημα 8.1. *Εστω $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο E. Τότε οι συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι αρμονικές στο E.*

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι αναλυτική στο E τότε οι συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι απειροδιαφορίσιμες στο E και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Αρα

$$u_{xx} = v_{yx} \text{ και } u_{yy} = -v_{xy}$$

και εφόσον η v έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης θα ισχύει $v_{xy} = v_{yx}$, οπότε αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι $u_{xx} + u_{yy} = 0$ για κάθε $(x, y) \in E$. Ομοια είναι η απόδειξη για τη v. □

Ορισμός 8.2. *Αν $u, v : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις σε ανοικτό σύνολο E τέτοιες ώστε η $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ να είναι ολόμορφη στο E, τότε οι u, v καλούνται αρμονικές συζυγείς επί του συνόλου E. Η v καλείται **αρμονική συζυγής της** u.*

Στο ερώτημα «αν u είναι αρμονική συνάρτηση σ' ένα σύνολο A μπορούμε πάντα να βρούμε μια συζυγή αρμονική της v ώστε η $f = u + iv$ να είναι αναλυτική στο A» η απάντηση είναι πολύπλοκη και εξαρτάται από τη μορφή του συνόλου A. Ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση 8.1. *Αν u είναι αρμονική συνάρτηση σε απλά συνεκτικό τόπο E, τότε υπάρχει μοναδική ολόμορφη συνάρτηση f στο E έτσι ώστε $u = \mathrm{Re}(f)$. Συνεπώς η u έχει μοναδική αρμονική συζυγή v με προσέγγιση σταθεράς.*

Παράδειγμα. Αν $u(x,y) = 3xy$ υπολογίστε τις συζυγείς αρμονικές αυτής.

Λύση. Από τις συνθήκες Cauchy-Riemmann έχουμε

$$\begin{cases} v_y = u_x = 3y \\ v_x = -u_y = -3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \int 3y dy + a(x) \\ v_x = -3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{3}{2}y^2 + a(x) \\ v_x = -3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = \frac{3}{2}y^2 + a(x) \\ v_x = -3x = a'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{3}{2}y^2 + a(x) \\ -3x = a'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{3}{2}y^2 + a(x) \\ a(x) = -\frac{3}{2}x^2 + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \frac{3}{2}\left(y^2 - x^2\right) + c.$$

Πρόταση 8.2. (αρχή μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις) *Αν u είναι μια αρμονική (και μη σταθερή) συνάρτηση σε φραγμένο τόπο E και συνεχής στο σύνορο ∂E, όπου ∂E είναι μια κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη, τότε η u παίρνει μέγιστη τιμή πάνω στο σύνορο ∂E.*

Πρόταση 8.3. *Αν u είναι μια αρμονική συνάρτηση σε φραγμένο τόπο E και $u(x,y) = c$ πάνω στο σύνορο ∂E, όπου το ∂E είναι μια κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη, τότε η $u(x,y) = c$ παντού στο E.*

Ορισμός 8.3. *Εστω $E \subset \mathbb{R}^2$ είναι φραγμένος τόπος και $u_0(x,y)$ είναι δοθείσα συνεχής συνάρτηση πάνω στο σύνορο ∂E. Το (συνοριακό)* ***πρόβλημα Dirichlet*** *ασχολείται με την εύρεση πραγματικής συνάρτησης $u(x,y)$ τέτοιας ώστε:*

- *u να είναι αρμονική στο εσωτερικό του E και*
- *$u(x,y) = u_0(x,y)$ στο ∂E.*

Θα λύσουμε το πρόβλημα αυτό σε κάποια χωρία του επιπέδου

χρησιμοποιώντας μια πολύ χρήσιμη μέθοδο, το χωρισμό μεταβλητών. Προηγουμένως όμως ας δώσουμε μερικούς γενικότερους ορισμούς.

8.2. Μια Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

Ορισμός 8.4. *Καλούμε μερική διαφορική εξίσωση, ή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (στο εξής ΜΔΕ), μια εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον μια από τις μερικές παραγώγους (1ης ή ανώτερης τάξης) μιας άγνωστης πραγματικής συνάρτησης δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών.*

Ορισμός 8.5. *Τάξη ΜΔΕ καλείται η τάξη της μεγαλύτερης μερικής παραγώγου που περιέχεται στη διαφορική εξίσωση.*

Ορισμός 8.6. *Λύση ΜΔΕ καλείται κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τη ΜΔΕ. Γενική λύση ΜΔΕ καλείται μια οικογένεια λύσεων αυτής που περιέχει αυθαίρετες συναρτήσεις, το πλήθος των οποίων είναι ίσο με την τάξη της.*

Ορισμός 8.7. *Μερική λύση ΜΔΕ καλείται κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τη ΜΔΕ και προκύπτει από τη γενική λύση της με συγκεκριμένη επιλογή των αυθαίρετων συναρτήσεων.*

Στο εξής όταν γράφουμε $u \in C^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ εννοούμε ότι η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $k-$τάξης σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα. Εστω $u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ είναι πραγματική συνάρτηση με

$$u_{xy} = 2(x+y).$$

Η γενική λύση αυτής υπολογίζεται με απευθείας ολοκληρώσεις:

$$u_{xy} = 2(x+y) \Leftrightarrow u_x = \int 2(x+y)dy = 2xy + y^2 + a\left(x\right)$$

$$\Leftrightarrow u = \int\left(2xy + y^2 + a\left(x\right)\right)dx = x^2y + xy^2 + \int a\left(x\right)dx + b\left(y\right)$$

$$\Leftrightarrow u = x^2y + xy^2 + a_1\left(x\right) + b\left(y\right).$$

Υπάρχουν δυο βασικές κατηγορίες ΜΔΕ: **οι γραμμικές** και οι **μη**

γραμμικές. Για τη διδιάστατη περίπτωση, αν $A,B,\Gamma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι γνωστές συναρτήσεις και $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ άγνωστη συνάρτηση, τότε κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + \Gamma(x,y)u = 0$$

καλείται **ομογενής γραμμική ΜΔΕ 1ης τάξης**, διότι αν θεωρήσουμε το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας ως ένα τελεστή

$$\mathcal{L}(u) = A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + \Gamma(x,y)u\,,$$

τότε

$$\mathcal{L}(au+bv) = a\mathcal{L}(u) + b\mathcal{L}(v).$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν u,v είναι δυο λύσεις μιας ομογενούς ΜΔΕ, τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι επίσης λύση της ίδιας ΜΔΕ. Αυτή είναι η αρχή της **υπέρθεσης**. Κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + \Gamma(x,y)u = f(x,y)\,,$$

όπου $A,B,\Gamma,f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι γνωστές συναρτήσεις και $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι άγνωστη συνάρτηση καλείται **μη ομογενής γραμμική ΜΔΕ 1ης τάξης**. Στην περίπτωση αυτή, αν αθροίσουμε τη γενική λύση της ομογενούς ΜΔΕ και μια μερική λύση της μη ομογενούς ΜΔΕ παίρνουμε τη γενική λύση της μη ομογενούς ΜΔΕ.

Παράδειγμα. Εστω $u\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Επιλύστε τη ΜΔΕ $u_x + \alpha\, u_y = 0$, όπου , $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερά.

Λύση. Είναι μια ομογενής γραμμική ΜΔΕ. Τότε:

$$u_x + \alpha\, u_y = 0 \Leftrightarrow (1,\alpha)\bullet(u_x,u_y) = 0 \Leftrightarrow (1,\alpha)\bullet\nabla u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}} = 0\,,$$

όπου $\mathbf{a} = (1,\alpha)$. Εφόσον η παράγωγος της u κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{a}$ ισούται με μηδέν, η γενική λύση u της ΜΔΕ είναι σταθερή κατά μήκος οποιασδήποτε ευθείας παράγεται απ' το διάνυσμα $\mathbf{a}$, δηλαδή κατά μήκος όλων των ευθειών της μορφής

$y = \alpha x + b$, $b\in\mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά.

Αυτές καλούνται **χαρακτηριστικές καμπύλες** της ΜΔΕ. Ετσι, $u(x,y)=C$ πάνω σε κάθε ευθεία $y=\alpha x+b$, όπου C σταθερά κατά μήκος συγκεκριμένης ευθείας που μεταβάλλεται κάθε φορά που αλλάζει η ευθεία, δηλαδή εξαρτάται απ' το b, συνεπώς το C είναι συνάρτηση του b. Αρα η γενική λύση της ΜΔΕ είναι:

$$u(x,y)=C(b)=C(y-\alpha x),$$

όπου C είναι αυθαίρετη παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. □

Συχνά θέλουμε να υπολογίσουμε συγκεκριμένες λύσεις ΜΔΕ που ικανοποιούν επιπλέον συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές είναι:

- **αρχικές συνθήκες (Cauchy)**, αν το πρόβλημά μας είναι χρονο-εξαρτώμενο (δίνουν πληροφορία στην αρχή του χρόνου),

- **συνοριακές συνθήκες (Dirichlet)**, αν το πρόβλημα αναφέρεται σ' ένα φραγμένο χωρίο (δίνουν πληροφορία για την κατάσταση στο σύνορο),

- είτε συνδυασμός αυτών.

Μια ΜΔΕ μαζί με τις επιπλέον συνθήκες λέμε ότι αποτελεί ένα **πρόβλημα**. Ενα πρόβλημα είναι **καλώς τεθιμένο** αν έχει μοναδική και **ευσταθή** λύση, δηλαδή μικρή μεταβολή των συνθηκών επιφέρει εξίσου μικρή μεταβολή στη λύση.

Παράδειγμα. Επιλύστε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x \\ u(x,0)=0 \ , \ x,t>0 \ . \\ u(0,t)=0 \end{cases}$$

Λύση. Θα επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace. Εστω

$$F(x,s)=\mathcal{L}^t\left(u(x,t)\right)$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της u ως προς t (υπό την

προϋπόθεση ότι η u (και η u_x) είναι εκθετικής τάξης ως προς t). Σταθεροποιούμε προς στιγμήν κάποιο $x>0$ και εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}^t$ και στα δυο μέλη της ΜΔΕ. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace και παίρνουμε:

$$\mathcal{L}^t\left(u_t+xu_x\right)=\mathcal{L}^t\left(x\right)\Leftrightarrow sF\left(x,s\right)-u\left(x,0\right)+x\frac{d}{dx}F\left(x,s\right)=\frac{x}{s}$$

$$\underset{x>0}{\overset{u(x,0)=0}{\Leftrightarrow}}\frac{d}{dx}F\left(x,s\right)+\frac{s}{x}F\left(x,s\right)=\frac{1}{s}.$$

Για σταθεροποιημένο s, η παραπάνω είναι μια γραμμική ΔΕ 1^{ης} τάξης ως προς $x>0$ με γενική λύση:

$$F\left(x,s\right)=e^{-\int\frac{s}{x}dx}\left(C\left(s\right)+\int\frac{1}{s}e^{\int\frac{s}{x}dx}dx\right)=\left|x\right|^{-s}\left(C(s)+\frac{1}{s}\int\left|x\right|^{s}dx\right)$$

$$=x^{-s}\left(C(s)+\frac{x^{s+1}}{s\left(s+1\right)}\right)=\frac{C\left(s\right)}{x^{s}}+\frac{x}{s\left(s+1\right)}.$$

Αλλά

$$u\left(0,t\right)=0\Rightarrow\mathcal{L}^t\left(u\left(0,t\right)\right)=\mathcal{L}^t\left(0\right)\Rightarrow F\left(0,s\right)=0.$$

Πρέπει λοιπόν $C\left(s\right)=0$, συνεπώς:

$$F\left(x,s\right)=\frac{x}{s\left(s+1\right)}\Leftrightarrow\mathcal{L}^{-t}\left(F\left(x,s\right)\right)=\mathcal{L}^{-t}\left(\frac{x}{s\left(s+1\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow u\left(x,t\right)=x\mathcal{L}^{-t}\left(\frac{1}{s\left(s+1\right)}\right)=x\left[\mathcal{L}^{-t}\left(\frac{1}{s}\right)-\mathcal{L}^{-t}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right]$$

$$=x\left(1-e^{-t}\right),\ t,x\geq 0.$$

Στον $\mathbb{R}^2$, κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$A\left(x,y\right)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+\Gamma\left(x,y\right)u_{yy}+\Delta\left(x,y\right)u_x+E\left(x,y\right)u_y+Z\left(x,y\right)u=0$$

καλείται **ομογενής γραμμική ΜΔΕ 2ης τάξης**, ενώ η

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+\Gamma(x,y)u_{yy}+\Delta(x,y)u_x+E(x,y)u_y+Z(x,y)u=f(x,y)$$

καλείται **μη ομογενής γραμμική ΜΔΕ 2ης τάξης**. Στις παραπάνω ισότητες οι $A,B,...,Z$ και f είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις δυο μεταβλητών. Μια διδιάστατη γραμμική ΜΔΕ 2ης τάξης καλείται:

- **Ελλειπτική σε σημείο** (x_0,y_0), αν $(4A\Gamma-B^2)(x_0,y_0)>0$.
- **Υπερβολική σε σημείο** (x_0,y_0), αν $(4A\Gamma-B^2)(x_0,y_0)<0$.
- **Παραβολική σε σημείο** (x_0,y_0), αν $(4A\Gamma-B^2)(x_0,y_0)=0$.

Η ταξινόμηση αυτή μας θυμίζει την ταξινόμηση δευτεροβάθμιων καμπύλων στο επίπεδο.

Αν η ΜΔΕ είναι π.χ. ελλειπτική σε κάθε σημείο χωρίου $E\subset\mathbb{R}^2$, τότε λέμε ότι η ΜΔΕ είναι ελλειπτική στο E. Χαρακτηριστική περίπτωση π.χ. ελλειπτικής γραμμικής ΜΔΕ 2ης τάξης είναι η εξίσωση Laplace.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε την τάξη των κάτωθι ΜΔΕ:

$$2u_x+3u_{y^2}+2u_{x^2y^2}=u\,,\qquad 2u_{xz}-3xu_{yz}+2u_x-u_{x^3}=u^6-2x^2y\,,$$

$$-u_{xx}-3u_{xy}+2u_{y^2}=u^3\,,\qquad -u^3u_{xy}+u^2u_y+2uu_{x^2y^2}=1+2xyu\,.$$

2. Ποιες από τις παρακάτω ΜΔΕ είναι γραμμικές;

$$2u_x+3u_y-zu_z=4u\,,\qquad xu_x-yu_y=xyu\,,\qquad u^2u_x+2xyu_y=0\,,$$

$$2u_x+3u_{y^2}+2u_{x^2y^2}=u\,,\qquad 2u_{xz}-3xu_{yz}+2u_x-u_{x^3}=u^6-2x^2y\,,$$

$$-u_{xx}-3u_{xy}+2u_{y^2}=u^3\,,\qquad -u^3u_{xy}+u^2u_y+2uu_{x^2y^2}=1+2xyu\,.$$

3. Υπολογίστε τη γενική λύση των ΜΔΕ:

$$u_x + u_y = 1, \qquad u_x + 3u_y = 0,\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. Ταξινομήστε τις γραμμικές ΜΔΕ 2^{ης} τάξης:

$3u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + xu_y = 0$, $\quad u_{xx} + xu_{yy} = 0$, $\quad u_{tt} = c^2 u_{xx},\ c > 0$,

$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$, $\quad u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x + 4u_y = 0$,

$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$, $\quad (1+x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$.

8.3 Η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών

Ενας τρόπος επίλυσης προβλημάτων Dirichlet μας παρέχει η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών. Εφαρμόζεται σε γραμμικές ομογενείς ΜΔΕ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Με αυτή την τεχνική ψάχνουμε για λύσεις ειδικής μορφής. Δεχόμαστε ότι μια λύση μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο αγνώστων συναρτήσεων, η κάθε μια εκ των οποίων εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή. Υποθέτοντας ότι μπορούμε να βρούμε μια λύση της ΜΔΕ αυτής της μορφής αντικαθιστούμε τη λύση αυτή στη ΜΔΕ και καταλήγουμε σε σύστημα συνήθων δ.ε.

Παράδειγμα. Να λυθεί το πρόβλημα των συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_x = u_y \\ u(0,y) = 2e^{-5y} \end{cases}.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη λύση γράφεται στη μορφή

$$u(x,t) = X(x)Y(t).$$

Τότε:

$$u_x(x,y) = X'(x)Y(y)$$

και

$$u_y(x,y) = X(x)Y'(y).$$

Αντικαθιστούμε στη ΜΔΕ και παίρνουμε

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y).$$

Για να ισχύει αυτή η σχέση θα πρέπει να έχουμε

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda \ \left(X \neq 0,\ Y \neq 0\right)$$

για κάποια αυθαίρετη πραγματική σταθερά λ. Αν λοιπόν υπάρχει τέτοια λύση θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - \lambda Y(y) = 0 \end{cases}.$$

Οι παραπάνω είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως με γενική λύση

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{\lambda y} \end{cases}.$$

Συνεπώς

$$u(x,y) = ABe^{\lambda(x+y)}.$$

Αλλά από την υπόθεση έχουμε

$$u(0,y) = ABe^{\lambda y} = 2e^{-5y},$$

άρα

$$\begin{cases} AB = 2 \\ \lambda = -5 \end{cases}.$$

Επομένως η ζητούμενη λύση είναι η

$$u(x,y) = 2e^{-5(x+y)}. \qquad \square$$

Παράδειγμα (Το πρόβλημα Dirichlet σε ορθογώνιο).

Εστω $u \in C^2(Q) \bigcap C(\partial Q):\ u = u(x,y)$ και

$$Q = \{(x,y):\ 0 < x < L,\ 0 < y < H\}$$

είναι ανοικτό ορθογώνιο με πλευρές μήκους L και H αντιστοίχως. Θα επιλύσουμε το ακόλουθο διδιάστατο πρόβλημα Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \forall (x,y) \in Q \\ u(x,0) = 0 & 0 \le x \le L \\ u(x,H) = 0 & 0 \le x \le L \\ u(0,y) = 0 & 0 \le y \le H \\ u(L,y) = g(y) & 0 \le y \le H \end{cases},$$

όπου g είναι γνωστή συνεχής συνάρτηση του y στο διάστημα $[0,H]$, με $g(0) = g(H) = 0$ ώστε να έχουμε συνέχεια της u στο σύνορο.

Εστω μη μηδενική λύση της μορφής:

$$u(x,y)=X(x)Y(y).$$

Αρχικά χρησιμοποιούμε τις (τρεις πρώτες) ομογενείς αρχικές συνθήκες και παίρνουμε

$$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u(x,H)=0 \\ u(0,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x)Y(0)=0 \\ X(x)Y(H)=0 \\ X(0)Y(y)=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{X(0)=Y(0)=Y(H)=0}, \quad (8.1)$$

αλλιώς $X(x)=0\ \forall x\in[0,L]$ ή $Y(y)=0\ \forall y\in[0,H]$, άρα η λύση μας u είναι η μηδενική. Οσον αφορά τη μη ομογενή συνοριακή συνθήκη, έχουμε απλώς

$$u(L,y)=g(y)\Rightarrow X(L)Y(y)=g(y). \quad (8.2)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη συγκεκριμένη μορφή της λύσης στην εξίσωση Laplace και παίρνουμε:

$$\boxed{\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda} \quad (8.3)$$

για κάποια πραγματική σταθερά $\lambda\in\mathbb{R}$. Ετσι το πρόβλημά μας ανάγεται στην επίλυση δυο συνήθων ομογενών γραμμικών δ.ε. 2^{ης} τάξης

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}$$

μαζί με τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες (8.1) και (8.2).

Ασχολούμαστε αρχικά με το απλούστερο (εκ των δυο) **πρόβλημα ιδιοτιμών** (με ομογενείς αρχικές συνθήκες)

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \\ Y(0)=Y(H)=0 \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) $\boxed{\lambda=0}$. Τότε

$$Y'' = 0 \Rightarrow Y(y) = Ay + B,\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Με χρήση των αρχικών συνθηκών $Y(0) = Y(H) = 0$ προκύπτει άμεσα η λύση $Y(y) = 0$, άρα και η τετριμμένη λύση $u = 0$ για κάθε (x, y) εντός του Q, άτοπο.

β) $\boxed{\lambda < 0}$. Τότε

$$Y'' + \lambda Y = 0 \Rightarrow Y(y) = Ae^{\sqrt{-\lambda}y} + BAe^{-\sqrt{-\lambda}y},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Πάλι με χρήση των αρχικών συνθηκών $Y(0) = Y(H) = 0$ προκύπτει άμεσα η λύση $Y(y) = 0$, άρα και η τετριμμένη λύση $u = 0$, άτοπο.

γ) $\boxed{\lambda > 0}$. Τότε

$$Y'' + \lambda Y = 0 \Rightarrow Y(y) = Acos\left(\sqrt{\lambda}y\right) + B\eta\mu\left(\sqrt{\lambda}y\right),\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Με χρήση των αρχικών συνθηκών $Y(0) = Y(H) = 0$ προκύπτει

$$\begin{cases} A = 0 \\ 0 = B\sin\left(\sqrt{\lambda}H\right) \end{cases} \overset{B \neq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} A = 0 \\ \sin\left(\sqrt{\lambda}H\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \sqrt{\lambda}H = k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \lambda = \left(\dfrac{k\pi}{H}\right)^2,\ k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

όπου θεωρήσαμε $B \neq 0$ και $\lambda \neq 0$, διότι για $B = 0$ ή $\lambda = 0$ πάλι θα παίρναμε $Y(y) = 0$ άρα και την τετριμμένη λύση $u = 0$. Ετσι προκύπτουν οι λύσεις

$$Y_k(y) = B_k \sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right),\ B_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots$$

Τελικά, μη τετριμμένες λύσεις Y παίρνουμε για τις **ιδιοτιμές**

$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{H}\right)^2$, $k = 1,2,...,$ με **ιδιοδιανύσματα** $B_k \sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)$.
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές του λ στην (8.3) παίρνουμε

$$X''(x) = \lambda_k X(x),\ \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{H}\right)^2,\ k = 1,2,...$$

με λύσεις

$$X_k(x) = Ae^{\sqrt{\lambda_k}x} + Be^{-\sqrt{\lambda_k}x} = A_k e^{k\pi x/H} + B_k e^{-k\pi x/H},\ A_k, B_k \in \mathbb{R}.$$

Μάλιστα, θέτοντας $\begin{cases} A_k = \dfrac{C_k + D_k}{2} \\ B_k = \dfrac{C_k - D_k}{2} \end{cases}$, $C_k, D_k \in \mathbb{R}$, η γενική λύση της X_k γράφεται ως

$$X_k(x) = C_k \cosh\left(\frac{k\pi x}{H}\right) + D_k \sinh\left(\frac{k\pi x}{H}\right),\ C_k, D_k \in \mathbb{R},\ k = 1,2,....$$

Λαμβάνοντας υπόψη τώρα την ομογενή συνοριακή συνθήκη (8.1) για τη X παίρνουμε:

$$X_k(0) = 0 \Rightarrow C_k = 0,$$

άρα

$$X_k(x) = D_k \sinh\left(\frac{k\pi x}{H}\right),\ D_k \in \mathbb{R}$$

κι έτσι οι

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \left(D_k \sinh\left(\frac{k\pi x}{H}\right)\right)\left(B_k \sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\right)$$

$$= G_k \sinh\left(\frac{k\pi x}{H}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right),\ G_k = B_k D_k \in \mathbb{R},\ k = 1,2,...,$$

είναι λύσεις του προβλήματος Dirichlet που ικανοποιεί τις τρεις πρώτες ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Από την αρχή της υπέρθεσης και η

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(G_k\sinh\left(\frac{k\pi x}{H}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\right) \qquad (8.4)$$

αποτελεί λύση υπό την προϋπόθεση ότι η παραπάνω σειρά συναρτήσεων έχει νόημα (δηλαδή συγκλίνει με κάποια έννοια).

Μένει να ελέγξουμε τη συνθήκη (8.2):

$$u(L,y)=g(y)\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\left(G_k\sinh\left(\frac{k\pi L}{H}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\right)=g(y)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\left(M_k\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\right)=g(y), \qquad (8.5)$$

όπου

$$M_k:=G_k\sinh\left(\frac{k\pi L}{H}\right),$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει σημειακά στα συνοριακά σημεία (L,y) στις τιμές $g(y)$. Οι συντελεστές M_k προσδιορίζονται με μοναδικό τρόπο από τη θεωρία των σειρών Fourier. Η σειρά (8.5) θυμίζει τη σειρά Fourier ημιτόνων της συνάρτησης g. Με την επιπλέον υπόθεση ότι η g έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,H]$ και $g(0)=g(H)=0$, θεωρώντας την περιττή επέκταση της g στο διάστημα $[-H,0]$ και επεκτείνοντας τη g περιοδικά πάνω στην πραγματική ευθεία, υπάρχει **μοναδική** ακολουθία συντελεστών

$$M_k:=\frac{1}{H}\int_{-H}^{H}g(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)dy=\frac{2}{H}\int_{0}^{H}g(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)dy$$

τέτοια ώστε

$$S_g(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(M_k\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)\right)=g(y)$$

απόλυτα και ομοιόμορφα στο $[0,H]$. Εφόσον $M_k:=G_k\sinh\left(\frac{k\pi L}{H}\right)$, αντικαθιστώντας στην (8) παίρνουμε ότι λύση του προβλήματος Dirichlet είναι η ακόλουθη:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{2}{H}\int_0^H g(\omega)\sin\left(\frac{k\pi\omega}{H}\right)d\omega}{\sinh\left(\frac{k\pi L}{H}\right)}\sinh\left(\frac{k\pi x}{H}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\right).$$

Η παραπάνω ικανοποιεί την αρχική συνθήκη, οπότε αν η σειρά παραγωγίζεται όρο προς όρο δυο φορές ως προς x και ως προς y, τότε αυτή είναι η λύση.

Πρόταση 8.1. *Εστω Ω είναι ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε, αν υπάρχει λύση $u\in C^2(\Omega)\bigcap C(\partial\Omega)$ στο πρόβλημα Dirichlet, τότε αυτή η λύση είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Εστω u, v είναι δύο λύσεις του προβλήματος Dirichlet. Θέτουμε $\phi=u-v$. Τότε η ϕ είναι αρμονική στο Ω και $\phi=0$ πάνω στο σύνορο $\partial\Omega$. Τότε, από την αρχή μεγίστου αναγκαστικά $\phi\le 0$ στο Ω. Ομοίως, η $-\phi$ είναι επίσης αρμονική στο Ω και ισχύει $\phi=0$ πάνω στο σύνορο $\partial\Omega$. Αρα $\phi\ge 0$ στο Ω και τελικά $\phi=0$ στο Ω. □

Παράδειγμα. (**Παλλόμενη χορδή**) Εστω ότι η συνάρτηση $u(x,t)$ δίνει τη μετατόπιση σημείου $x\in[0,T]$ χορδής τη χρονική στιγμή t με ακίνητα άκρα

$$u(0,t)=u(T,t)=0.$$

Υποθέτουμε ότι η αρχική ταχύτητα σε κάθε σημείο της χορδής είναι μηδέν, δηλαδή

$$u_t(x,0)=0$$

και τη χρονική στιγμή $t=0$ η θέση κάθε σημείου της χορδής περιγράφεται από μια συνάρτηση $f(x)$, άρα

$$u(x,0)=f(x)$$

Να υπολογισθεί η $u(x,t)$.

Λύση. Η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση αυτή δίνεται από τη σχέση

$$u_{tt}=c^2u_{xx},$$

όπου c σταθερά που σχετίζεται με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη λύση γράφεται στη μορφή

$$u(x,t) = X(x)Y(t).$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = X''(x)Y(t) \\ u_{yy}(x,t) = X(x)Y''(t) \end{cases}.$$

Αντικαθιστώντας στη μ.δ.ε. παίρνουμε

$$X(x)Y''(t) = c^2 X''(x)Y(t),$$

οπότε

$$\frac{Y''(t)}{c^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Για να ισχύει η σχέση αυτή θα πρέπει:

$$\frac{Y''(t)}{c^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

για κάποια αυθαίρετη σταθερά λ. Αν λοιπόν υπάρχει τέτοια λύση της διαφορικής εξίσωσης θα πρέπει οι συναρτήσεις X, Y να ικανοποιούν τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ Y''(t) + \lambda c^2 Y(t) = 0 \end{cases}.$$

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$u(0,t) = X(0)Y(t) = 0,$$

και

$$u(T,t) = X(T)Y(t) = 0,$$

άρα:

$$X(0) = X(T) = 0.$$

Ετσι, έχουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(T) = 0 \end{cases} \quad (0 < x < T).$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής είναι

$$r^2 + \lambda = 0.$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Εστω $\lambda = b^2 > 0,\ (b > 0)$. Τότε οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $r = \pm bi$ και άρα η γενική λύση δίνεται από τη σχέση

$$X(x) = A\cos bx + B\sin bx.$$

Από την αρχική συνθήκη $X(0) = 0$ προκύπτει ότι $c_1 = 0$ ενώ από την αρχική συνθήκη $X(T) = 0$ παίρνουμε

$$\sin bT = 0$$

και άρα

$$b = \frac{n\pi}{T},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Οι αριθμοί

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2$$

είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος συνοριακών τιμών και οι συναρτήσεις

$$B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

είναι οι ιδιοσυναρτήσεις. Για την εύρεση της Y (με τα λ_n που ήδη έχουμε υπολογίσει) έχουμε

$$Y_n(t) = C_n \cos\left(\frac{npc}{T}t\right) + D_n \sin\left(\frac{npc}{T}t\right).$$

Αρα από την αρχή της υπέρθεσης και η

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\left(\frac{npc}{T}t\right)+D_n\sin\left(\frac{npc}{T}t\right)\right)B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Gamma_n\cos\left(\frac{npc}{T}t\right)+\Delta_n\sin\left(\frac{npc}{T}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

αποτελεί μια λύση της μ.δ.ε. Παραγωγίζοντας την παραπάνω ως προς t όρο προς όρο παίρνουμε

$$u_t=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-C_n\frac{npc}{T}\sin\left(\frac{npc}{T}t\right)+D_n\frac{npc}{T}\cos\left(\frac{npc}{T}t\right)\right)B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

και επειδή $u_t(x,0)=0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n\sin\left(\frac{npc}{T}t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)=0\,.$$

Από τη θεωρία των τριγωνομετρικών σειρών η παραπάνω υπονοεί ότι

$$\Delta_n\sin\left(\frac{npc}{T}t\right)=0\Leftrightarrow\Delta_n=0\ \forall t\,,$$

άρα

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\cos\left(\frac{npc}{T}t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right).$$

Τέλος για να ισχύει η συνθήκη $u(x,0)=f(x)$ θα πρέπει

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\cos\left(\frac{npc}{T}t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right),$$

συνεπώς από τη θεωρία των σειρών Fourier θα πρέπει οι Γ_n να είναι οι συντελεστές Fourier της f, δηλ.

$$\Gamma_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx\,.$$

(ii) Για $\lambda\le 0$ καταλήγουμε σε τετριμένες λύσεις.

Ασκήσεις.

1. Δείξτε ότι η λύση του προβλήματος διάδοσης θερμότητας

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \ (0 < x < \pi, \ t > 0) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

είναι η $u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\sigma\upsilon\nu(nx)\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu(nx)dx$.

2. Λύστε την κυματική εξίσωση $u_{tt} = u_{xx}$ με αρχικές/συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \eta\mu(2x) \ , \ (0 < x < \pi, \ t > 0). \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

3. Να επιλυθεί με τη μέθοδο Laplace το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} xu_t - 2u_x = 0 \\ u(x,0) = x \ , \ x,t \geq 0. \\ u(0,t) = 2\sqrt{t} \end{cases}$$

4. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,0) = e^{-|x|}, \ (x, y \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

5. Επιλύστε το πρόβλημα Dirichlet στο μοναδιαίο δίσκο:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ u(1,\theta) = f(\theta) \end{cases},$$

όπου $u = u(r,\theta)$ και f είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση.

6. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & \text{στο χωρίο } \Pi^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y>0\} \\ u(x,0)=f(x), & \text{πάνω στην πραγματική ευθεία (το σύνορο του } \Pi^+) \end{cases},$$

όπου $\int_{\mathbb{R}}|u(x,y)|dx<\infty$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} u_x(x,y) = \lim\limits_{|x|\to\infty} u_{xx}(x,y)=0$ και f είναι γνωστή συνεχής συνάρτηση πάνω στην πραγματική ευθεία.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Fourier.

7. Εστω $u\in C^2(\Omega)\cap C(\partial\Omega):\ u=u(x,y)$ φραγμένη στο $\Omega\cup\partial\Omega$ και

$$\Omega=\{(x,y):\ x>0,\ 0<y<1\}$$

είναι ανοικτό μη φραγμένο ορθογώνιο. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & \forall(x,y)\in\Omega \\ u_x(0,y)=0 & 0\le y\le 1 \\ u_y(x,0)=0 & \text{πάνω στην ημιευθεία } x\ge 0 \\ u(x,1)=f(x) & \text{πάνω στην ημιευθεία } y=1 \text{ για } x\ge 0 \end{cases}.$$

8. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy – Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ t>0,\ 0<x<L \\ u(x,0)=\phi(x),\ 0\le x\le L \\ u(0,t)=u(L,t)=0,\ t\ge 0 \end{cases},$$

όπου $\phi\in C[0,L]$ με $\phi(0)=\phi(L)=0$.

9. Επιλύστε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t=3u_{xx},\ 0<x<1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ t\ge 0 \\ u_t(x,0)=2x,\ 0\le x\le 1 \end{cases}.$$

Βιβλιογραφία

1. Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές. R. Churchill-J. Brown. Μετάφραση: Δ. Καραγιαννάκης, Π.Ε.Κ. (1993).

2. Βασική Μιγαδική Ανάλυση. Jerrold Mardsen, Michael Hofmann. Μετάφραση: Λ. Παπαλουκάς. Εκδόσεις Συμμετρία.

3. Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές. Ε. Γ. Γαλανής. Εκδόσεις Συμεών. (1994).

4. Theory and problems of complex Variables. M. Spiegel, McGraw-Hill.

5. Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις. Schaum' s series, R. Bronson (μετάφραση Σ. Περσίδης).

6. Διαφορικές Εξισώσεις. Κ. Σεραφειμίδης, Εκδ. Σοφία 2005.

7. Differential equations. P. Dawkins. (2007) http://tutorial.math.lamar.edu/terms.aspx.

8. The Laplace transform. Theory and Applications. J. L. Schiff. Spinger.

9. Elementary differential equations and boundary value problems. W. E. Boyce and R. C. Diprima. John Willey and Sons Inc. 2001.

10. Real Analysis. Walter Rudin (3rd Edition).