Κεφάλαιο 2

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης.

2.1 Εισαγωγή και βασικές έννοιες.

Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι πολύ σημαντική διότι μοντελοποιεί πλήθος φυσικών προβλημάτων μέσω μιας εξίσωσης ή και ενός συστήματος εξισώσεων που περιλαμβάνει άγνωστες συναρτήσεις καθώς και παραγώγους αυτών των συναρτήσεων.

Ένα απ' τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, σύμφωνα με τον οποίο η συνισταμένη δύναμη που δρα σ' ένα σώμα ισούται με το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την επιτάχυνσή του. Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι

$$m \cdot \mathbf{r}''(t) = \Sigma\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

όπου m είναι η (σταθερή) μάζα του σώματος, $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος τη χρονική στιγμή t και $\Sigma\mathbf{F}$ είναι το διάνυσμα της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα συναρτήσει του χρόνου t, της θέσης $\mathbf{r}$ και της ταχύτητάς του $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$. Αν η δύναμη $\Sigma\mathbf{F}$ οφείλεται μόνον στη βαρύτητα, τότε

$$m \cdot \mathbf{r}''(t) = -m \cdot g \cdot \mathbf{k} \,,$$

όπου $\mathbf{k} = (0,0,1)$ και g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας, οπότε με δυο διαδοχικές ολοκληρώσεις παίρνουμε

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{gt^2}{2}\mathbf{k} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \ \left(\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3\right).$$

Επιπλέον, αν είναι γνωστή τόσο η θέση $\mathbf{r}(t_0)$ όσο και η ταχύτητα $\mathbf{r}'(t_0)$ του σώματος κάποια χρονική στιγμή t_0, τότε η θέση του σώματος προσδιορίζεται μονοσήμαντα κάθε χρονική στιγμή t.

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα. Εστω $p = p(t)$ είναι απομονωμένος πληθυσμός ενός βιότοπου τη χρονική στιγμή t. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε $n(t)$ γεννήσεις και $m(t)$ θανάτους και ότι ο ρυθμός μεταβολής των γεννήσεων και θανάτων είναι ανάλογος του πληθυσμού με κάποιες σταθερές αναλογίας $a,b \in (0,1)$. Τότε παίρνουμε τη δ.ε.

$$p'(t) = n'(t) - m'(t) = (a-b)\cdot p(t)$$

που αποτελεί ένα μοντέλο εξέλιξης του πληθυσμού $p = p(t)$.

Ορισμός 2.1. *Εστω n είναι φυσικός αριθμός και $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα I, δηλαδή ορίζονται οι παράγωγοι αυτής $y', y'', y''', ..., y^{(n)}$ σε κάθε σημείο του I. Μια εξίσωση που περιέχει μια τουλάχιστον από τις παραγώγους της συνάρτησης y καλείται (συνήθης) διαφορική εξίσωση (στο εξής θα γράφουμε για συντομία δ.ε.).*

Οι ακόλουθες είναι συνήθεις δ.ε.:

(i) $y' = 3x^2 + 5x + 6$.

(ii) $e^{y''} y + 2(y')^2 = 4$.

(iii) $y' + 2xy = x^2$.

(iv) $2xdx + ydy = 0$.

(v) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 5x$.

(vi) $2y''' - 3y = x^2 + 1$.

(vii) $x^2 y'' - xy' + y = 2$.

(viii) $\cos(y')y' = x\sin(x^2)$.

Ορισμός 2.2. *Η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται σε μια δ.ε. καλείται **τάξη** της δ.ε.*

Ετσι, οι διαφορικές εξισώσεις (i), (iii), (iv) και (viii) είναι 1ης τάξης, οι (ii), (v) και (vii) είναι 2ης τάξης και η (vi) είναι 3ης τάξης.

Γενικά, οποιαδήποτε δ.ε. n-τάξης μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (2.1)$$

όπου F είναι μια συνάρτηση $n+2$ μεταβλητών που εν γένει εξαρτάται απ' όλες (ή κάποιες) από τις παραμέτρους $x, y, y', ..., y^{(n)}$. Η (2.1) καλείται **πλεγμένη μορφή** της δ.ε. Αν η (2.1) μπορεί να λυθεί ως προς $y^{(n)}$, τότε η μορφή

$$y^{(n)} = f\left(x, y, ..., y^{(n-1)}\right) \tag{2.2}$$

καλείται **κανονική μορφή** της δ.ε.

Ορισμός 2.3. *Η μέγιστη δύναμη της μέγιστης τάξης παραγώγου μιας πολυωνυμικής δ.ε. καλείται **βαθμός** της δ.ε. Αν η δ.ε. δεν είναι πολυωνυμική τότε δεν ορίζεται βαθμός για τη δ.ε.*

Για παράδειγμα οι δ.ε. (i), (iii), (iv), (vi) και (vii) είναι 1ου βαθμού, η (v) είναι 3ου βαθμού, ενώ για τις (ii) και (viii) δεν ορίζεται βαθμός.

Υπάρχουν δυο βασικές κατηγορίες δ.ε.: **οι γραμμικές** και οι **μη γραμμικές**.

Ορισμός 2.4. *Καλούμε **γραμμική δ.ε. n-τάξης** κάθε δ.ε. της μορφής:*

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b, \tag{2.3}$$

όπου $a_0, a_1, ...a_{n-1}, b$ είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις.

Αν μια δ.ε. δεν είναι της μορφής (2.3), τότε καλείται **μη γραμμική** δ.ε. Επίσης, αν

$$a_0(x) = a_0,\ a_1(x) = a_1, ..., a_{n-1}\left(x\right) = a_{n-1} \quad \forall x,$$

όπου $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ είναι πραγματικές σταθερές, τότε η (2.3) καλείται **γραμμική δ.ε. με σταθερούς συντελεστές**, διαφορετικά καλείται **γραμμική δ.ε. με μεταβλητούς συντελεστές**. Ανάλογος είναι ο ορισμός και για μη γραμμικές δ.ε.

Ορισμός 2.5. *Καλούμε **λύση (ή ολοκλήρωμα)** της δ.ε. (2.1) (ή της (2.2)), κάθε συνάρτηση $y = y\left(x\right)$ που την επαληθεύει ταυτοτικά. Η γραφική παράσταση της y είναι μια καμπύλη στο επίπεδο που καλείται **ολοκληρωτική καμπύλη** της δ.ε.*

Τονίζουμε εδώ ότι οι λύσεις μιας δ.ε. (αν υπάρχουν) είναι πάντα ***συναρτήσεις*** σε αντίθεση με τις λύσεις μιας αλγεβρικής εξίσωσης που είναι αριθμοί. Συνήθως μια δ.ε. έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Για παράδειγμα οι λύσεις της δ.ε.

$$y' = x$$

είναι οι συναρτήσεις

$$y = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

όπως προκύπτει εύκολα με απλή ολοκλήρωση. Ομοίως οι λύσεις της δ.ε.

$$y'' = x$$

προκύπτουν εύκολα με δυο ολοκληρώσεις:

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Στα παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ότι όταν η λύση μιας δ.ε. προέρχεται από n-ολοκληρώσεις τότε η λύση εξαρτάται από n-αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Είναι λογικό να αναρωτηθούμε αν αυτός ο κανόνας μπορεί να γενικευθεί, δηλ. αν η λύση όλων των δ.ε. 1^{ης} τάξης εξαρτάται από μια αυθαίρετη σταθερά, των δ.ε. 2^{ης} τάξης από δυο αυθαίρετες σταθερές κλπ. Δυστυχώς μια τέτοια γενίκευση δεν ισχύει. Κάλλιστα μπορεί μια δ.ε. να έχει μόνον μια πραγματική λύση, όπως π.χ. η δ.ε. 1^{ης} τάξης $(y')^2 + 3y^2 = 0$ που έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική συνάρτηση και δεν εξαρτάται καν από σταθερά. Επίσης η δ.ε. 1^{ης} τάξης

$$(y' - 1)(y' - y) = 0$$

έχει λύση $(y - c_1)(y - c_2 e^x) = 0$ που εξαρτάται από δυο (και όχι μια) σταθερές. Αναφέρουμε επίσης ότι μια δ.ε. μπορεί να μην έχει λύση στο $\mathbb{R}$, όπως π.χ. η $(y')^2 + 3y^2 = -1$.

Παρόλα αυτά όμως υπάρχουν οικογένειες δ.ε. n-τάξης, οι λύσεις των οποίων εξαρτώνται από ακριβώς n αυθαίρετες σταθερές. Επιπλέον, ένα μεγάλο πλήθος δ.ε. που μοντελοποιούν φυσικά προβλήματα ανήκουν σε τέτοιες οικογένειες. Ετσι το πρώτο μας

μέλημα σε μια δ.ε. n-τάξης είναι να ψάξουμε για λύσεις που εξαρτώνται από n-αυθαίρετες σταθερές. Σ' αυτά τα πλαίσια δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 2.6. *Καλούμε **γενική λύση** της δ.ε. (2.1) (ή (2.2)) κάθε λύση της μορφής*

$$y(x) = \phi(x, c_1, \ldots, c_n) \tag{2.4}$$

όπου $c_1, \ldots, c_n$ είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. ***Μερική λύση** της δ.ε. (2.1) (ή (2.2)) καλείται κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τη δ.ε. και η οποία προκύπτει από τη γενική λύση για συγκεκριμένη επιλογή των σταθερών $c_1, \ldots, c_n$.*

Οι λύσεις (2.4) παριστάνουν στο επίπεδο μια n-παραμετρική οικογένεια **ολοκληρωτικών καμπύλων**. Αν οι παραπάνω λύσεις δίνονται σε πλεγμένη μορφή, δηλ. στη μορφή

$$\varphi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0\,,$$

όπου $c_1, \ldots, c_n$ είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές και η συνάρτηση y ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, τότε μιλάμε για το ***γενικό ολοκλήρωμα** της δ.ε. (2.1)* ή της *(2.2).*

Πολλές φορές ακόμη κι αν υπάρχει η γενική λύση μιας δ.ε. δεν περιλαμβάνει όλες τις λύσεις της δ.ε.

Ορισμός 2.7. *Καλούμε **ιδιάζουσα λύση** (**ή ιδιάζον ολοκλήρωμα**) της δ.ε. (2.2) (ή (2.1)) κάθε λύση της δ.ε. που δεν προκύπτει από τη γενική λύση (ή το γενικό ολοκλήρωμα) της δ.ε. για καμιά επιλογή των παραμέτρων $c_1, \ldots, c_n$.*

Το σύνολο των λύσεων μιας δ.ε. καλείται **πλήρης λύση** της δ.ε. (ή **πλήρες ολοκλήρωμα** της δ.ε.). Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η γενική λύση και η πλήρης λύση δεν ταυτίζονται πάντα.

Ορισμός 2.8. *Δοθέντων πραγματικών αριθμών $x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}$, η εύρεση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης (2.1) (ή (2.2)) που ικανοποιεί τις συνθήκες*

$$y(x_0) = y_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{2.5}$$

καλείται ***πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)*** *και οι σχέσεις (2.5) καλούνται* ***αρχικές συνθήκες***.

Ασκήσεις 1. Να βρεθεί: **(α)** η τάξη, **(β)** ο βαθμός, **(γ)** η γραμμικότητα ή μη, **(δ)** η άγνωστη συνάρτηση, **(ε)** η ανεξάρτητη μεταβλητή των κάτωθι δ.ε.:

$(i)\ \left(\dfrac{db}{dp}\right)^7 = 3p \qquad (ii)\ s'' - ts' = 1 + \cos t \qquad (iii)\ (y'')^2 - 3yy' + xy = 0$

$(iv)\ \left(y^{(6)}\right)^3 + x^4 y^{(4)} - x^2 y'' = 0 \qquad (v)\ \left(\dfrac{d^2 r}{dy^2}\right)^{3/2} = y^{1/2}$

$(vi)\ y^3 \cdot \ln\left(1 + (y')^2\right) + xy = 4$

Απ. **(i)** (α)-1, (β)-7, (γ)-μη γραμμική, (δ)-b, (ε)-p
(ii) (α)-2, (β)-1, (γ)-γραμμική, (δ)-s, (ε)-t
(iii) (α)-2, (β)-2, (γ)-μη γραμμική, (δ)-y, (ε)-x
(iv) (α)-6, (β)-3, (γ)-μη γραμμική, (δ)-y, (ε)-x
(v) (α)-2, (β)-3, (γ)-γραμμική, (δ)-r, (ε)-y
(vi) (α)-1, (β)-δεν έχει, (γ)-μη γραμμική (δ)-y, (ε)-x

2. Εξετάστε αν η $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ είναι λύση της δ.ε.

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$ (**Απ**. Είναι)

3. Εξετάστε αν η πλεγμένη μορφή $y = \ln y + 1 + t^2$ είναι λύση της δ.ε.

$$\frac{dy}{dt} = (1 - 2t)\, y.$$ (**Απ**. Είναι)

4. Βρείτε τις τιμές του $m \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η $y = e^{mx}$ είναι λύση της δ.ε. $y'' - 5y' + 6y = 0$. (**Απ**. $m = 2,\ m = 3$)

5. Υπολογίστε τη γενική λύση της δ.ε. $y'' = x^2 + \sin x + e^{2x}$. Στη συνέχεια βρείτε μια μερική λύση αυτής που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

(**Απ**. Γενική λύση: $y=\frac{x^4}{12}-\sin x+\frac{e^{2x}}{4}+c_1x+c_2$

Μερική λύση: $y=\frac{x^4}{12}-\sin x+\frac{e^{2x}}{4}+x$).

6. Δείξτε ότι η $y=\left(2x^2-4\right)^{-1}$ είναι λύση της δ.ε. $y'+4xy^2=0$ στο διάστημα $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, όχι όμως και σε μεγαλύτερο διάστημα που περιέχει είτε το $\sqrt{2}$ είτε το $-\sqrt{2}$.

7. Προσδιορίστε τις σταθερές c_1,c_2 ώστε η $s(t)=c_1\eta\mu t+c_2\sigma\upsilon\nu t$ να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $s(0)=1,\ s'\left(0\right)=2$.

(**Απ**. $c_1=2,\ c_2=1$)

2.2. Διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης.

2.2.1. Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

Ορισμός 2.9. *Μια δ.ε. 1^{ης} τάξης περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής*

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (2.6)$$

όπου F είναι μια γνωστή πραγματική συνάρτηση που μπορεί εν γένει να εξαρτάται από κάποιες ή και όλες τις παραμέτρους x, y, y'. Αν η (2.6) μπορεί να λυθεί ως προς την y', τότε η εξίσωση

$$y' = f(x, y) \qquad (2.7)$$

*καλείται **κανονική μορφή** της δ.ε.*

Ορισμός 2.10. *Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ϕ καλείται **πλεγμένη** (ή **κανονική**) λύση της (2.6) (ή της (2.7)) σε κάποιο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ αν επαληθεύει την (2.6) (ή τη (2.7)) για κάθε $x \in I$. Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών αποτελείται από την (2.6) (ή τη (2.7)) μαζί με μια αρχική συνθήκη της μορφής*

$$y(x_0) = y_0.$$

Αν δοθεί μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων

$$y = g(x, c),$$

τότε μπορούμε να βρούμε τη δ.ε. με γενική λύση $y = g(x, c)$ παραγωγίζοντας και στη συνέχεια απαλείφοντας τη σταθερά από τις σχέσεις

$$\begin{cases} y = g(x, c) \\ y' = g'(x, c) \end{cases}.$$

Για παράδειγμα, αν

$$y = cx + 3,$$

τότε

$$y' = c,$$

συνεπώς η δ.ε. με γενική λύση $y = cx + 3$ είναι η

$$y = x \cdot y' + 3.$$

Γενικά η (2.7) μας λέει ότι σε κάθε σημείο (x, y), η τιμή $f(x, y)$ είναι η κλίση της λύσης της δ.ε. στο σημείο αυτό. Αν λοιπόν θεωρήσουμε έναν τόπο D όπου η f ορίζεται και είναι συνεχής, τότε σε κάθε σημείο $(x, y) \in D$ αντιστοιχεί ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση ίση με $f(x, y)$. Σχεδιάζοντας το τμήμα αυτό σε μικρές περιοχές ενός σχετικά πυκνού πλήθους σημείων $(x, y) \in D$, προκύπτει ως γεωμετρική εικόνα ένα σύνολο τμημάτων το οποίο καλούμε **πεδίο κλίσεων της δ.ε.**

Ορισμός 2.11. *Κάθε καμπύλη $y = y(x)$ που σε κάθε σημείο της εφάπτεται του πεδίου κλίσεων είναι **ολοκληρωτική καμπύλη** της δ.ε., δηλ. είναι λύση της δ.ε. Αν μάλιστα θεωρήσουμε και αρχική τιμή $y_0 = y(x_0)$, τότε όλες οι καμπύλες (αν υπάρχουν) που διέρχονται από το σημείο $(x_0, y_0) \in D$ και σε κάθε σημείο τους εφάπτονται του πεδίου κλίσεων είναι **ολοκληρωτικές καμπύλες** της δ.ε.*

Ενα σημαντικό ερώτημα σ' αυτή την κατεύθυνση είναι το εξής:

- πότε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών έχει λύση

και επιπρόσθετα

- αν έχει λύση, υπό ποιες συνθήκες η λύση αυτή είναι μοναδική.

Το ακόλουθο Θεώρημα μας δίνει ικανές συνθήκες (τοπικής) ύπαρξης και μοναδικότητας του προβλήματος αρχικών τιμών.

Θεώρημα 2.1. (Picard–Lindelöf) *Εστω το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{2.8}$$

Αν οι συναρτήσεις f και $\frac{\partial f}{\partial y} := f_y$ είναι συνεχείς σ' ένα ορθογώνιο Τ κέντρου (x_0, y_0), τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.8) έχει

μοναδική λύση $y = y(x)$ *για* x *σε κατάλληλη περιοχή του σημείου* x_0.

Παρατηρήσεις: (α) Αν μόνον η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα ορθογώνιο Τ κέντρου (x_0, y_0), τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.8) έχει πάντα λύση $y = y(x)$ σε κατάλληλη περιοχή του σημείου x_0, **αλλά όχι κατ' ανάγκην μοναδική**.

(β) Η βασική ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.1 βασίζεται **στη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων** του Picard. Σκιαγραφώντας τη μέθοδο, αρχικά (και με την υπόθεση συνεχείας της f) ολοκληρώνουμε την $y' = f(x, y)$ και έχουμε

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\,dt\,,$$

που είναι ισοδύναμη της (2.8). Στη συνέχεια σχηματίζουμε τον αναδρομικό τύπο

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x_0) \\ y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\,dt \end{cases},\ n = 1, \ldots,$$

και αποδεικνύουμε με την επιπλέον συνθήκη συνεχείας για την f_y ότι υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$.

Σημείωση. Εστω f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Στο εξής με το συμβολισμό

$$\int f(x)\,dx$$

θα δηλώνουμε μια **συγκεκριμένη** αντιπαράγωγο της f. Υπενθυμίζουμε ότι αν F, G είναι δυο αντιπαράγωγοι της f σε διάστημα, τότε

$$F = G + c,\ \ c \in \mathbb{R} \text{ είναι μια σταθερά.}$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = 2x\sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Προφανώς, $y \geq 0$. Παρατηρούμε ότι η $y = 0$ είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. Στη συνέχεια αναζητούμε και άλλες λύσεις. Θεωρούμε λοιπόν $y > 0$, οπότε

$$\frac{y'}{\sqrt[3]{y}} = 2x \Rightarrow \int \frac{y'}{\sqrt[3]{y}} dx = \int 2x dx + c \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}} dy = x^2 + c \Rightarrow \frac{3}{2} y^{2/3} = x^2 + c.$$

Ετσι για τις αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0) = (0,0)$ παίρνουμε $c = 0$, οπότε και η $\frac{3}{2} y^{2/3} = x^2$ είναι μια άλλη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. Συνεπώς, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει τουλάχιστον δυο λύσεις (και όχι μοναδική) σε μια περιοχή του σημείου $(x_0, y_0) = (0,0)$. Πράγματι, από το Θεώρημα 2.1 παρατηρούμε ότι η $f(x, y) = 2x\sqrt[3]{y}$ είναι συνεχής σε μια περιοχή του σημείου $(x_0, y_0) = (0,0)$, άρα υπάρχει λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. Παρατηρούμε όμως ότι δεν ικανοποιείται η συνθήκη συνεχείας για την $f_y = \frac{2x}{3\sqrt[3]{y^2}}$ στο $(0,0)$, άρα και σε οποιοδήποτε ορθογώνιο που περιέχει το $(0,0)$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη μοναδικότητα λύσης από το Θεώρημα 1.1. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών δεν είναι μοναδική όπως είδαμε παραπάνω. Αν όμως θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = 2x\sqrt[3]{y} \\ y(x_0) = y_0, \ (x_0 \in \mathbb{R}, \ y_0 \neq 0) \end{cases},$$

τότε το Θεώρημα 1.1 διασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσης σε κατάλληλη περιοχή του σημείου (x_0, y_0). □

2.2.2. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Ορισμός 2.12. *Καλούμε* ***γραμμική δ.ε. 1ης τάξης*** *κάθε δ.ε. της μορφής*

$$y' + p \cdot y = q, \qquad (2.9)$$

όπου $p,q : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *και* I *διάστημα της πραγματικής ευθείας. Αν* $q \equiv 0$ *τότε μιλάμε για* ***ομογενή*** *δ.ε., αλλιώς μιλάμε για μη ομογενή δ.ε.*

Εστω ότι οι p,q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I. Για να λύσουμε τη (2.9) πολ/ζουμε και τα δυο μέλη της με μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mu : I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mu(x) > 0 \ \forall x$ και

$$\mu' = \mu \cdot p .$$

Τότε

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \Rightarrow \mu \cdot y' + \mu' \cdot y = \mu \cdot q$$

$$\Rightarrow (\mu \cdot y)' = \mu \cdot q \Rightarrow \mu \cdot y = \int \mu(x) \cdot q(x) dx + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) \cdot q(x) dx + c \right).$$

Επίσης από την $\mu' = \mu \cdot p$ έχουμε

$$\frac{\mu'}{\mu} = p \Rightarrow \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int p(x) dx + d \Rightarrow \ln(\mu(x)) = \int p(x) dx + d \Rightarrow \mu(x) = e^{d + \int p(x) dx}$$

.

Εφόσον ενδιαφερόμαστε για μια συγκεκριμένη μ, θεωρούμε για απλότητα $d = 0$ και στη συνέχεια αντικαθιστώντας το μ παίρνουμε τη γενική λύση της (2.9) από τον τύπο:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left(c + \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx \right)}. \qquad (2.10)$$

Παράδειγμα. Να επιλυθεί η δ.ε. $y'(x) + \frac{2}{\tan x} y(x) = \frac{1}{\sin x}$.

Λύση. Εχουμε γραμμική δ.ε. 1ης τάξης. Θεωρούμε $x \neq k\pi, k\pi + \pi/2$. Οι συναρτήσεις $p(x) = \dfrac{2}{\tan x}$ και $q(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ είναι συνεχείς σε κάθε διάστημα $I_k = (k\pi, k\pi + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ετσι για x σε κάποιο από τα διαστήματα αυτά, χρησιμοποιώντας τη (2.10) παίρνουμε

$$y(x) = e^{-\int \frac{2dx}{\tan x}} \left(c + \int \frac{1}{\sin x} e^{\int \frac{2dx}{\tan x}} dx \right) = e^{-2\ln|\sin x|} \left(c + \int \frac{1}{\sin x} e^{2\ln|\sin x|} dx \right)$$

$$= \frac{1}{|\sin x|^2} \left(c + \int |\sin x| dx \right) = \begin{cases} \dfrac{c - \cos x}{\sin^2 x}, & \sin x \geq 0 \\ \dfrac{c + \cos x}{\sin^2 x}, & \sin x \leq 0 \end{cases}, \; x \in I_k . \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να επιλυθεί η δ.ε. $y' + \dfrac{y}{x} = e^{3x}$.

Λύση. Εχουμε γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης. Θεωρούμε $x \neq 0$. Ετσι σε κάθε διάστημα I της πραγματικής ευθείας που δεν περιέχει το $x = 0$, η γενική της λύση της δ.ε. δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = e^{-\int x^{-1} dx} \left(c + \int e^{3x} e^{\int x^{-1} dx} dx \right) = e^{-\ln|x|} \left(c + \int e^{3x} e^{\ln|x|} dx \right)$$

$$= |x|^{-1} \left(c + \int e^{3x} \, |x| \, dx \right).$$

Επειδή

$$\int e^{3x} |x| dx = \begin{cases} \dfrac{xe^{3x}}{3} - \dfrac{1}{3} \int e^{3x} (x)' dx = \dfrac{xe^{3x}}{3} - \dfrac{e^{3x}}{9}, & x > 0 \\ -\dfrac{xe^{3x}}{3} + \dfrac{1}{3} \int e^{3x} (x)' dx = -\dfrac{xe^{3x}}{3} + \dfrac{e^{3x}}{9}, & x < 0 \end{cases},$$

έχουμε

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \left(c_1 + \dfrac{xe^{3x}}{3} - \dfrac{e^{3x}}{9} \right), & x \in I \subset (0, +\infty) \\ -\dfrac{1}{x} \left(c_2 - \dfrac{xe^{3x}}{3} + \dfrac{e^{3x}}{9} \right), & x \in J \subset (-\infty, 0) \end{cases},$$

οπότε για $c_2 = -c_1 = c \in \mathbb{R}$ παίρνουμε τελικά

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(c + \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right) \ \forall x \in I \subset (0,+\infty) \ \dot{\eta} \ \forall x \in J \subset (-\infty,0). \qquad \square$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε τη μερική λύση της δ.ε.

$$y' - \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot y = x \cdot \ln x$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_0 = \sqrt{e}, y_0 = e^4$.

Λύση. Εχουμε γραμμική δ.ε. 1ης τάξης. Θεωρούμε $x > 0$ λόγω λογαρίθμου. Τότε

$$y = e^{\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx}\left(c + \int x \cdot \ln x \cdot e^{-\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx} dx\right).$$

Αλλά:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln|\ln x|,$$

συνεπώς:

$$y = e^{\ln|\ln x|}\left(c + \int x \cdot \ln x \cdot e^{-\ln|\ln x|} dx\right) = |\ln x|\left(c + \int x \cdot \ln x \cdot |\ln x|^{-1} dx\right)$$

$$= \ln x\left(c + \int x \cdot \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} dx\right) = \ln x\left(c + \int x dx\right) = \ln x\left(c + \frac{x^2}{2}\right)$$

(οι απόλυτες τιμές απαλοίφονται όπως στο προηγούμενο παράδ.). Για τη μερική λύση θέτουμε στη γενική λύση $x_0 = \sqrt{e}, y_0 = e^4$, άρα

$$e^4 = \ln\left(\sqrt{e}\right)\left(c + \frac{e}{2}\right) \Rightarrow e^4 = \frac{1}{2}\left(c + \frac{e}{2}\right) \Rightarrow c = 2e^4 - \frac{e}{4}.$$

Τελικά η ζητούμενη μερική λύση είναι η $y = \ln x\left(2e^4 - \frac{e}{4} + \frac{x^2}{2}\right)$. $\square$

Παράδειγμα. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = e^{3x} \\ y(x_0) = y_0, \ \ x_0 \neq 0 \end{cases}.$$

Παραπάνω δείξαμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι η

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(c + \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right) \ \forall x \in I \subset (0,+\infty) \ \ \dot{\eta} \ \forall x \in J \subset (-\infty,0).$$

Συνεπώς:

$$y_0 = y(x_0) = \frac{1}{x_0}\left(c + \frac{x_0 e^{3x_0}}{3} - \frac{e^{3x_0}}{9}\right) \Rightarrow c = x_0 \cdot y_0 - \frac{x_0 e^{3x_0}}{3} + \frac{e^{3x_0}}{9}.$$

Ετσι:

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(x_0 \cdot y_0 - \frac{x_0 e^{3x_0}}{3} + \frac{e^{3x_0}}{9} + \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right). \qquad \square$$

Το παραπάνω παράδειγμα υποδηλώνει ότι κάθε λύση της γραμμικής δ.ε. (2.9) προέρχεται από τη γενική της λύση (2.10). Πράγματι το Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για γραμμικές δ.ε. παίρνει τη μορφή:

Θεώρημα 2.2. *Εστω* $p,q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο ανοικτό διάστημα* I *και* $x_0 \in I$. *Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{cases} y' + p \cdot y = q \\ y(x_0) = y_0, \ \ (x_0 \in I, \ y_0 \in \mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.11}$$

έχει μοναδική λύση στο I. *Με άλλα λόγια πλήρης λύση και γενική λύση ταυτίζονται.*

Απόδ. Η ύπαρξη μιας λύσης τεκμηριώνεται από τα παραπάνω. Για τη μοναδικότητα αυτής $\forall x \in I$ εργαζόμαστε ως εξής: Εστω $y_1, y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δυο λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών (2.11). Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση $v = y_1 - y_2$ είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} v' + p(x)\cdot v = 0 \\ v(x_0) = 0, \quad (x_0 \in I) \end{cases}.$$

Ως γνωστόν, η γενική λύση της $v' + p(x)\cdot v = 0$ δίνεται από τη (2.10):

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int 0 \cdot e^{\int p(x)dx} dx\right) = c \cdot e^{-\int p(x)dx},$$

και εφόσον $v(x_0) = 0 \Rightarrow c = 0$, παίρνουμε

$$v(x) = 0 \Rightarrow y_1(x) - y_2(x) = 0 \Rightarrow y_1(x) = y_2(x) \ \forall x \in I. \qquad \square$$

Εφαρμογές.

Παράδειγμα (Νόμος ψύξης Νεύτωνα). Μεταλλική ράβδος θερμοκρασίας $T_0 = 100^{\circ}\ C$ σε κάθε σημείο της τοποθετείται σε χώρο σταθερής θερμοκρασίας $0^{\circ}\ C$. Εάν μετά από 20 min η θερμοκρασία της ράβδου σε κάθε σημείο της είναι $50^{\circ}\ C$, υπολογίστε:

(α) τη θερμοκρασία της ράβδου μετά από 10 min.

(β) το χρόνο που χρειάζεται για να ψυχθεί η ράβδος στους $25^{\circ}\ C$.

Λύση. Σύμφωνα με το νόμο ψύξης του Νεύτωνα, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος είναι ανάλογος της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ σώματος και περιβάλλοντος.

(α) Με βάση το νόμο ψύξης, αν $T(t)$ είναι η θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t, $T(0) = 100$, $T(20) = 50$ και $T_{\pi\varepsilon\rho.} = 0 = \sigma\tau\alpha\theta.$, τότε

$$T'(t) = k\left(T(t) - T_{\pi\varepsilon\rho.}\right) \Rightarrow T'(t) - k \cdot T(t) = 0,$$

όπου k είναι μια αρνητική σταθερά που διασφαλίζει ότι $T'(t) < 0$, δηλαδή το σώμα ψύχεται. Η παραπάνω είναι μια γραμμική δ.ε. με λύση:

$$T(t) = c \cdot e^{kt}.$$

Από τις συνθήκες $T(0) = 100$, $T(20) = 50$ βρίσκουμε

$$\begin{cases} T(0) = 100 \\ T(20) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100 = c \\ 50 = ce^{20k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 100 \\ e^{20k} = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 100 \\ k = -\dfrac{\ln 2}{20} \end{cases},$$

συνεπώς

$$T(t) = 100 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{20} \cdot t}.$$

Αρα η θερμοκρασία της ράβδου μετά από 10 min είναι

$$T(10) = 100 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{2}} \approx 70.7107^0 \ C.$$

(β) Εχουμε

$$25 = 100 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{20} \cdot t} \Rightarrow t = 40 \text{ min.}$$ □

Παράδειγμα (Αραίωση διαλυμάτων). Ένα δοχείο έχει $V_0 \ m^3$ διάλυμα νερού με $s_0 \ kg$ ζάχαρη (θεωρούμε ότι η ζάχαρη είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάλυμα). Ένα άλλο διάλυμα με $a \ \dfrac{kg}{m^3}$ ζάχαρη χύνεται στο δοχείο με ρυθμό $f \ \dfrac{m^3}{\min}$ ενώ ταυτόχρονα από το δοχείο απομακρύνονται $g \ \dfrac{m^3}{\min}$ διαλύματος. Πόση ζάχαρη έχει το δοχείο τη χρονική στιγμή t;

Λύση. Εστω $s(t)$ είναι η ποσότητα ζάχαρης τη χρονική στιγμή t (t σε min). Τότε:

$s(t + \Delta t) - s(t)$ = ζάχαρη που εισέρχεται στο δοχείο – ζάχαρη που εξέρχεται απ' το δοχείο.

Αλλά η ζάχαρη που εισέρχεται στο δοχείο σε χρόνο Δt ισούται με $a \cdot f \cdot \Delta t \ \dfrac{kg}{\min}$. Για να βρούμε τη ζάχαρη που εξέρχεται σε χρόνο Δt απ' το δοχείο πρέπει να βρούμε πρώτα τον όγκο του δοχείου τη χρονική στιγμή t. Ο όγκος αυτός είναι $V_0 + (f - g) \cdot t$, οπότε η

περιεκτικότητα σε ζάχαρη/m^3 τη χρονική στιγμή t είναι $\frac{s(t)}{V_0+(f-g)\cdot t}\ \frac{kg}{m^3}$ και συνεπώς η ζάχαρη που εξέρχεται απ' το δοχείο σε χρόνο Δt ισούται με $g\cdot\frac{s(t)\cdot\Delta t}{V_0+(f-g)\cdot t}\ \frac{kg}{\min}$. Αρα:

$$s(t+\Delta t)-s(t)=a\cdot f\cdot\Delta t-g\cdot\frac{s(t)\cdot\Delta t}{V_0+(f-g)\cdot t}$$

$$\Rightarrow\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=a\cdot f-g\cdot\frac{s(t)}{V_0+(f-g)\cdot t}$$

και για $\Delta t\to 0$ έχουμε

$$s'(t)+\frac{g}{V_0+(f-g)\cdot t}\cdot s(t)=a\cdot f$$

η οποία είναι μια γραμμική δ.ε. 1^{ης} τάξης με αρχική συνθήκη $s(0)=s_0$, η λύση της οποίας προκύπτει από την (2.10). □

Παράδειγμα (Ηλεκτρικά κυκλώματα). Κύκλωμα περιλαμβάνει πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης $E=3\sin(2t)\ Volt$, αντίσταση $R=10\ \Omega$ και πηνίο αυτεπαγωγής $L=0.5\ H$. Υπολογίστε την ένταση I του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, αν η αρχική ένταση είναι $I_0=6\ A$.

Λύση. Η εξίσωση που περιγράφει τη ροή του ηλεκτρικού φορτίου σε κύκλωμα RL είναι

$$I'(t)+\frac{R}{L}\cdot I(t)=\frac{E}{L}.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} I'(t)+20I(t)=6\sin(2t) \\ I_0=I(0)=6 \end{cases}.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η γενική λύση της παραπάνω γραμμικής δ.ε. είναι η εξής:

$$I(t) = ce^{-20t} + \frac{15\sin(2t)}{53} - \frac{3\cos(2t)}{106}.$$

Από τη συνθήκη $I_0 = 6\ A$ υπολογίζουμε τη σταθερά c. □

Ασκήσεις.

1. Να επιλυθούν οι γραμμικές δ.ε.:

- $y' + y = x$ **Απ.** $y = ce^{-x} + x - 1$
- $y' + y\tan x + \cos x = 0$ **Απ.** $y = (c - x)\cdot\cos x$
- $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ **Απ.** $y = (c + x^2)\cdot e^{-x^2}$
- $\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x}y = x \\ y(1) = 0 \end{cases}$ **Απ.** $y(x) = \dfrac{x^4 - 1}{4x^2}$
- $\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x}y = x^2 - x + 2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ **Απ.** $y(x) = \dfrac{23 + 40x^3 - 15x^4 + 12x^5}{60x^2}$

2. Σε μια πόλη ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι ανάλογος του πληθυσμού. Εάν μετά από 10 χρόνια ο πληθυσμός έχει τριπλασιασθεί και μετά από 20 χρόνια είναι 150.000 υπολογίστε τον αρχικό πληθυσμό της πόλης. **Απ.** ~ 16.667

3. Σώμα θερμοκρασίας $T_0 = 50^{\circ}\ C$ τοποθετείται σε φούρνο σταθερής θερμοκρασίας $150^{\circ}\ C$. Εάν μετά από 10 min η θερμοκρασία του σώματος είναι $75^{\circ}\ C$, υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται για να γίνει η θερμοκρασία του σώματος $100^{\circ}\ C$.

Απ. $\sim 24{,}0942\ \min$

2.2.3. Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης.

2.2.3.1. Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.

Ορισμός 2.13. *Κάθε δ.ε. της μορφής*

$$y'(x) = p(x)q(y) \qquad (2.12)$$

όπου p,q *είναι γνωστές συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, καλείται δ.ε.* ***χωριζομένων μεταβλητών****.*

Για να τη λύσουμε θεωρούμε $q(y) \neq 0 \ \forall y$ και έχουμε

$$\frac{y'}{q(y)} = p(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{q(y)} dx = \int p(x)dx + c$$

ή ισοδύναμα

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx + c\,. \qquad (2.13)$$

Η παραπάνω ισότητα είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (2.12). Εν γένει η λύση δίνεται σε πλεγμένη μορφή. Επίσης οι πραγματικές λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης $q(y) = 0$ (αν υπάρχουν) είναι και αυτές λύσεις της (2.12). Ενδέχεται δε κάποιες απ' αυτές τις λύσεις να είναι ιδιάζουσες, δηλ. να μην προκύπτουν από το γενικό ολοκλήρωμα (2.13).

Ειδικές περιπτώσεις: (α) Αν $p(x) = 1 \ \forall x$, τότε οι δ.ε. της μορφής

$$y' = q(y)$$

καλούνται **αυτόνομες** και τετριμένα λύνονται με απλή ολοκλήρωση

$$\frac{y'}{q(y)} = 1 \Rightarrow \int \frac{dy}{q(y)} = x + c\,.$$

(β) Αν $q(y) = 1 \ \forall x$, τότε οι δ.ε. της μορφής

$$y' = p(x)$$

έχουν γενική λύση $y(x)=\int p(x)dx+c$.

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε.

$$x^2(y^2-1)-y(x^3-1)y'=0.$$

Λύση. Η δ.ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών. Προφανώς

$$x^2(y^2-1)-y(x^3-1)\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow y(x^3-1)dy=x^2(y^2-1)dx.$$

Θεωρούμε $y^2\neq 1 \Leftrightarrow y\neq \pm 1$ και $x^3\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1$. Τότε

$$\frac{ydy}{y^2-1}=\frac{x^2dx}{x^3-1} \Leftrightarrow \int\frac{ydy}{y^2-1}=\int\frac{x^2dx}{x^3-1}+c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{d\left(y^2-1\right)}{y^2-1}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3-1\right)}{x^3-1}+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=\frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right|+c.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε $c=\frac{\ln|C|}{6},\ (C\neq 0)$, οπότε η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$3\cdot\ln\left|y^2-1\right|=2\cdot\ln\left|x^3-1\right|+\ln|C| \Leftrightarrow \ln\left|y^2-1\right|^3=\ln\left|x^3-1\right|^2+\ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|y^2-1\right|^3=\ln\left(|C|\cdot\left|x^3-1\right|^2\right) \Leftrightarrow \left|y^2-1\right|^3=\left|C\cdot\left(x^3-1\right)^2\right|,\ \ (C\neq 0,\ y\neq\pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2-1\right)^3=\pm C\cdot\left(x^3-1\right)^2,\ \ (C\neq 0,\ y\neq\pm 1).$$

Η τελευταία είναι το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. Αξίζει να σημειώσουμε ότι και οι $y=\pm 1$ είναι επίσης λύσεις της δ.ε. Ετσι ενοποιώντας όλες τις λύσεις έχουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$\left(y^2-1\right)^3=C\cdot\left(x^3-1\right)^2,\ \ (C\in\mathbb{R}).$$ □

Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$e^{x+y}dy = e^{-y}dx.$$

Λύση. Εχουμε δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών, συνεπώς:

$$e^{2y}dy = e^{-x}dx \Leftrightarrow \int e^{2y}dy = \int e^{-x}dx \Leftrightarrow \frac{e^{2y}}{2} = -e^{-x} + c. \qquad \square$$

Παράδειγμα (ορθογώνιες τροχιές). Υπολογίστε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας καμπύλων $x^2 + y^2 = c^2,\ (c \neq 0)$.

Λύση. Ψάχνουμε οικογένεια καμπύλων $f(x, y, c) = 0$ που τέμνουν κάθετα την οικογένεια $x^2 + y^2 = c^2$. Αρχικά βρίσκουμε τη δ.ε. της οποίας η $x^2 + y^2 = c^2$ είναι γενικό ολοκλήρωμα. Με παραγώγιση της πλεγμένης συνάρτησης y μέσω της εξίσωσης $x^2 + y^2 = c^2$ έχουμε:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y},\ (y \neq 0).$$

Από τη γνωστή εξίσωση $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, όπου λ_1, λ_2 είναι οι κλίσεις των καμπύλων των οικογενειών $x^2 + y^2 = c^2$ και $f(x, y, c) = 0$ αντιστοίχως, έχουμε

$$-\frac{x}{y} \cdot y' = -1 \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + c \ \ (x \neq 0).$$

Θέτουμε $c = \ln|C|,\ (C \neq 0)$ και παίρνουμε $|y| = |C \cdot x| \ \ (C \neq 0)$ ή ισοδύναμα $y = \pm C \cdot x \ \ (C \neq 0)$. $\square$

Παράδειγμα (Η λογιστική εξίσωση). Σύμφωνα με το μοντέλο Malthus, σ' ένα πληθυσμό $y(t)$, τόσο ο ρυθμός γεννήσεων όσο και ο ρυθμός θανάτων είναι ανάλογοι του μεγέθους του πληθυσμού. Αν ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι ανάλογος της διαφοράς μεταξύ του ρυθμού γεννήσεων και θανάτων, τότε το μοντέλο μεταβολής του πληθυσμού είναι

$$y'(t) = a \cdot y(t) - b \cdot y(t),$$

όπου a,b είναι θετικές σταθερές που σχετίζονται με το ρυθμό γεννήσεων και θανάτων αντιστοίχως. Η παραπάνω είναι μια δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών και με μια αρχική συνθήκη $y(0)=y_0$ έχει γενική λύση

$$y(t)=y_0e^{(a-b)t}.$$

Αν όμως το μέγεθος του πληθυσμού είναι πολύ μεγάλο, τότε τα a,b δεν είναι σταθερές, διότι (λόγω εγκληματικών δραστηριοτήτων ή εξαιτίας του μεγαλύτερου ανταγωνισμού για τροφή) θα υπάρχει κάποια μείωση του αριθμού των γεννήσεων και αύξηση του αριθμού θανάτων. Αν το παραπάνω εκφρασθεί ως

$$a(t)=c_1-c_2y(t),\ \ b(t)=c_3-c_4y(t),$$

όπου c_1,c_2,c_3,c_4 είναι θετικές σταθερές, τότε έχουμε το μοντέλο

$$y'(t)=\left(c_1-c_2y(t)\right)\cdot y(t)-\left(c_3-c_4y(t)\right)\cdot y(t)=\left(A-By(t)\right)\cdot y(t),$$

όπου οι $A=c_1-c_3,\ B=c_2-c_4$ θεωρούνται θετικές σταθερές. Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$y'=A\cdot\left(1-\frac{y}{M}\right)\cdot y,$$

όπου $M=\dfrac{A}{B}$. Η παραπάνω καλείται **λογιστική εξίσωση**. Προφανώς για μικρά y σε σχέση με το M η λογιστική εξίσωση συμπίπτει με το μοντέλο Malthus. Η λογιστική εξίσωση είναι μια δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών. Προφανώς οι $y=0,\ y=M$ είναι λύσεις της δ.ε. Για $y\neq 0,M$ έχουμε

$$\frac{dy}{\left(1-\frac{y}{M}\right)\cdot y}=Adt\Leftrightarrow\int\frac{dy}{\left(1-\frac{y}{M}\right)\cdot y}=At+C$$

και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μερικών κλασμάτων έχουμε

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y}{M}\right)\cdot y}=\frac{-M}{y\cdot\left(y-M\right)}=\frac{k}{y}+\frac{\lambda}{y-M}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\ \lambda=1\end{cases},$$

άρα

$$-\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dy}{y-M}=At+C\Leftrightarrow\ln\left|y-M\right|-\ln\left|y\right|=At+C$$

$$\Leftrightarrow\ln\left|\frac{y-M}{y}\right|=At+C\Leftrightarrow\frac{y-M}{y}=\pm Me^{At+C}=C'\cdot Me^{At},\ \left(C'=\pm e^{C},\ C'\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{M}{1-C'\cdot Me^{At}},$$

που είναι η γενική λύση της λογιστικής εξίσωσης. Σημειώνουμε ότι οι $y=0$ είναι **ιδιάζουσα λύση** της δ.ε. □

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι ακόλουθες δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών:

- $x^2(y^2+1)dx+y\sqrt{x^3+1}dy=0$ **Απ.** $y^2+1=ce^{-\frac{4}{3}\sqrt{x^3+1}}$ $(c>0)$
- $\ln x=\frac{x}{y}y'$ **Απ.** $y=ce^{(\ln x)^2/2}(c\geq 0,\ x>0)$
- $x^2dy-\cos^2 ydx=0$

  Απ. $\begin{cases}\varepsilon\phi y=-\frac{1}{x}+c,\ \left(x\neq 0,\ y\in\left(k\pi+\frac{\pi}{2},(k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\ \text{γενικό ολοκλ.}\\ y=k\pi+\frac{\pi}{2}\ \text{ιδιάζουσες λύσεις}\end{cases}$

- $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{y+1}$ **Απ.** $\frac{y^2}{2}+y=e^x+e^{-x}+c$
- $xe^{x^2}dx+ydy=0$ με $y(0)=1$ **Απ.** $e^{x^2}+y^2=2$

2. Αν για μια καμπύλη c με εξίσωση $y = y(x)$ το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα x, την καμπύλη c την ευθεία x=α όπου A=(α,β) είναι δοθέν σημείο της καμπύλης και την ευθεία x=x όπου P=(x,y) είναι μεταβλητό σημείο σημείο της καμπύλης είναι ανάλογο του μήκους του τόξου της καμπύλης μεταξύ των σημείων A και P, υπολογίστε την εξίσωση της καμπύλης c.

Απ. $y = -\cosh\left(c \pm \frac{x}{k}\right), \quad (k > 0)$

3. Υπολογίστε τις ισοθερμικές καμπύλες, αν οι καμπύλες κατά μήκος των οποίων διαδίδεται η θερμότητα δίνονται από τη σχέση $y^2 + 2xy - x^2 = 0$. **Απ.** $y^2 - 2xy - x^2 = c$

4. Ενας σπουδαστής σε μια φοιτητική οργάνωση 200 μελών διαδίδει μια φήμη. Αν ο ρυθμός διάδοσης της φήμης είναι ανάλογος του αριθμού των φοιτητών (έστω y) που γνωρίζουν τη φήμη και ανάλογος του αριθμού των φοιτητών που δε γνωρίζουν τη φήμη, τότε αν σε μια μέρα ενημερώθηκαν 50 φοιτητές, πόσοι φοιτητές θα έχουν ενημερωθεί μετά από 2 μέρες; **Απ.** ~ 191

2.2.3.2. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Ορισμός 2.14. *Ομογενής δ.ε. πρώτης τάξης καλείται μια δ.ε. της μορφής*

$$y'(x) = F\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (2.14)$$

όπου η συνάρτηση F *εξαρτάται μόνον από το πηλίκο* $\frac{y}{x}$.

Για να τη λύσουμε κάνουμε την αντικατάσταση $y = u \cdot x$ για κάποια άγνωστη συνάρτηση $u = u(x)$, οπότε η (2.14) γίνεται

$$u' \cdot x + u = F(u) \Rightarrow \frac{du}{F(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

η οποία είναι δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στην προηγούμενη παράγραφο. Στη συνέχεια με την αντικατάσταση $u = \frac{y}{x}$ παίρνουμε τη λύση της (2.14). Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζουμε μια δ.ε. της μορφής

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (2.15)$$

όπου οι συναρτήσεις M, N είναι ομογενείς με τον ίδιο βαθμό ομογένειας, έστω m, δηλαδή ισχύει

$$M(tx,ty) = t^m M(x,y) \text{ και } N(tx,ty) = t^m N(x,y), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $(x^2 + y^2)dx + 3xydy = 0$.

Λύση. Εχουμε μια ομογενή δ.ε. βαθμού ομογένειας 2, διότι

$$\begin{cases} M(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2 M(x,y) \\ N(tx,ty) = 3(tx)(ty) = t^2 N(x,y) \end{cases}.$$

Αντικαθιστούμε $y = u \cdot x$ και για $x \neq 0$ έχουμε

$$\left(x^2 + x^2u^2\right)dx + 3x \cdot ux\left(xdu + udx\right) = 0 \Rightarrow \left(1 + u^2\right)dx + 3u\left(xdu + udx\right) = 0$$

$$\Rightarrow (4u^2+1)dx + 3xudu = 0 \Rightarrow \frac{3u}{4u^2+1}du = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{3u}{4u^2+1}du = -\int \frac{dx}{x} + \ln|c|,\ c \neq 0 \Rightarrow \frac{3}{8}\ln\left(4u^2+1\right) = -\ln|x| + \ln|c|,\ \left(c \neq 0\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left|x^8\left(4u^2+1\right)^3\right| = \ln|c|^8 \Rightarrow x^8\left(4u^2+1\right)^3 = \pm c^8 = C,\ \left(C \neq 0\right).$$

Θέτοντας $u = \frac{y}{x}$ παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

$$x^2(4y^2+x^2)^3 = C. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $\left(x+y+1\right)dy - \left(x-y-2\right)dx = 0$.

Λύση. Εστω $\begin{cases} M(x,y) = x+y+1 \\ N(x,y) = x-y-2 \end{cases}$. Λύνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} M(x,y) = 0 \\ N(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Θέτουμε $\begin{cases} x = X + \frac{1}{2} \\ y = Y - \frac{3}{2} \end{cases}$, οπότε η δ.ε. μετασχηματίζεται σε

$$\left(X+Y\right)dY - \left(X-Y\right)dX = 0,$$

η οποία είναι ομογενής βαθμού ομογένειας 1. Αντικαθιστούμε $Y = u \cdot X,\ \left(u = u\left(X\right)\right)$ και παίρνουμε

$$\left(X + u \cdot X\right)d\left(u \cdot X\right) - \left(X - u \cdot X\right)dX = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+u\right)\left(udX + Xdu\right) - \left(1-u\right)dX = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+u}{u^2+2u-1}du = -\frac{dX}{X}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1+u}{u^2+2u-1}du = -\int \frac{dX}{X} + \ln|c|,\ (c \neq 0),$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{d\left(u^2+2u-1\right)}{u^2+2u-1} = -\ln|X| + \ln|c|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|u^2+2u-1\right| + \ln|X| = \ln|c| \Leftrightarrow \left|X^2\left(u^2+2u-1\right)\right|^{\frac{1}{2}} = |c|$$

$$\Leftrightarrow X^2\left(u^2+2u-1\right) = C,\ \left(C = \pm c,\ C \neq 0\right)$$

Θέτοντας $X = x - \frac{1}{2}$ και $u = \frac{Y}{X} = \frac{2y+3}{2x-1}$ παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(\left(\frac{2y-3}{2x-1}\right)^2 + \frac{2y-3}{2x-1} - 1\right) = C,\ \left(C \neq 0\right). \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να βρεθούν όλες οι καμπύλες του επιπέδου, των οποίων η εφαπτόμενη ευθεία σ' ένα τυχαίο σημείο $M = (x, y)$ τέμνει τον άξονα ΟΨ στο ίδιο σημείο στο οποίο τον τέμνει και η κάθετος στην ευθεία ΟΜ που διέρχεται απ΄ το σημείο $(x, 0)$.

Λύση. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της ζητούμενης καμπύλης y στο σημείο $M = (x, y)$ είναι

$$Y - y = y'\left(X - x\right).$$

Το σημείο τομής αυτής, έστω Κ με τον άξονα ΟΨ έχει συντ/νες $K = \left(0, y - y'x\right)$. Η εξίσωση της ευθείας ΟΜ είναι η

$$\Psi = \frac{y}{x}X$$

και η εξίσωση της καθέτου αυτής που διέρχεται απ' το σημείο $(x, 0)$

είναι η

$$\Psi = -\frac{x}{y}\left(X - x\right).$$

Το σημείο τομής αυτής, έστω Λ με τον άξονα ΟΨ έχει συντ/νες $\Lambda = \left(0, -\frac{x^2}{y}\right)$. Σύμφωνα με την άσκηση θα πρέπει

$$\left|\mathrm{K}\Lambda\right| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(y - y'x - \frac{x^2}{y}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}.$$

Η παραπάνω είναι μια ομογενής δ.ε. βαθμού ομογένειας 2, συνεπώς με την αντικατάσταση $y = u \cdot x$ ανάγεται σε μια δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$udu = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} = -\ln\left|x\right| + c \Leftrightarrow u^2 = -\ln\left(x^2\right) + C \Leftrightarrow y^2 = x^2\left(C - \ln\left(x^2\right)\right). \square$$

Παράδειγμα (Ισογώνιες τροχιές). Υπολογίστε τις ισογώνιες τροχιές 30° των ευθειών $y = \lambda x$.

Λύση. Αν $F(x, y, c) = 0$ είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων με κλίση $y' = f(x, y)$ σε κάθε σημείο της, τότε κάθε καμπύλη που τέμνει όλες τις καμπύλες της οικογένειας $F(x, y, c) = 0$ με σταθερή γωνία $0 < a < 90^{\circ}$ (θεωρούμε τη γωνία να διαγράφεται από τις καμπύλες της οικογένειας $F(x, y, c) = 0$ αντιωρολογιακά), καλείται **ισογώνιος τροχιά** της δοθείσης οικογένειας (για $a = 90^{\circ}$ μιλούμε για ορθογώνιες τροχιές όπως είδαμε σε παραπάνω παράδειγμα).

Αν λοιπόν $y' = \varepsilon\varphi\omega = f(x, y)$ είναι η κλίση (δηλαδή η εφαπτομένη) της δοθείσης οικογένειας $F(x, y, c) = 0$, τότε η γωνία κλίσης της ισογώνιας τροχιάς θα είναι $\omega + a$, συνεπώς η κλίση της ισογώνιας τροχιάς, θα είναι

$$\varepsilon\varphi(\omega + a) = \frac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi a}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi a} = \frac{f(x, y) + \varepsilon\varphi a}{1 - f(x, y) \cdot \varepsilon\varphi a},$$

ή ισοδύναμα

$$y' = \frac{f(x,y) + \varepsilon\varphi a}{1 - f(x,y)\cdot \varepsilon\varphi a}. \qquad (2.16)$$

Αρα στο παράδειγμά μας έχουμε $y = \lambda x \Leftrightarrow y' = \lambda = \frac{y}{x}$, οπότε η (2.16) γίνεται

$$y' = \frac{\frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}y + x}{\sqrt{3}x - y},$$

η οποία είναι μια ομογενής δ.ε. βαθμού ομογένειας 1 με λύση

$$2\sqrt{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(x^2 + y^2\right) = c. \qquad \square$$

Ασκήσεις.

1. Να λυθούν οι ομογενείς δ.ε.:

- $(x - 2y)dx + xdy = 0$ **Απ.** $y = x + cx^2$
- $x^2dx - (x^2 - 6xy)dy = 0$ **Απ.** $y^6 - 6x^5y = \ln|cx|$
- $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y-x}{x}$ **Απ.** $\begin{cases} \cos\left(\frac{y}{x} - 1\right) = \frac{1-cx^2}{1+cx^2} \\ \frac{y}{x} = 1 + k\pi + \frac{\pi}{2} \ \left(\text{ιδιάζουσες}\right) \end{cases}$
- $(x^2 + y^2)dx + 3xydy = 0$ με $y(1) = 0$ **Απ.** $x^2(4y^2 + x^2)^3 = 1$
- $y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ με $y(1) = 1$ **Απ.** $\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + \frac{\pi}{4}$

2. Αεροπλάνο κινείται από μια πόλη Α προς μια πόλη Β με μέση ταχύτητα μέτρου $\upsilon\ km/h$. Η κατεύθυνση της ταχύτητας σε κάθε σημείο Μ της κίνησης είναι πάνω στην ευθεία ΜΒ. Η πόλη Β απέχει από την πόλη Α $a\ \mathrm{K}m$. Αν κατά τη διάρκεια της κίνησης φυσά

άνεμος ταχύτητας $w < \upsilon \ km/h$ με κατεύθυνση κάθετη στην ευθεία των δυο πόλεων, ποια είναι η εξίσωση κίνησης; (Υπόδ. Θεωρήστε καρτεσιανό σύστημα συντ/νων Oxy με αρχή την πόλη B και τον ημιάξονα Ox πάνω στην ευθεία που ενώνει τις δυο πόλεις και αναλύστε την κίνηση σε συνιστώσες)

Απ. $y = \frac{a}{2}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{w}{\upsilon}} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{w}{\upsilon}}\right)$

3. Υπολογίστε τις ισογώνιες τροχιές 45° των ευθειών $y = \lambda x$.

Απ. $-y + 2\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = x^2 + cx$

2.2.3.3. Πλήρεις (ή ακριβείς) διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις ολικών διαφορικών.

Ορισμός 2.15. *Εστω* $P,Q:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ανοικτό και συνεκτικό σύνολο* D. *Μια δ.ε. της μορφής*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

καλείται ***ακριβής*** *ή* ***πλήρης*** *ή* ***ολικών διαφορικών****, αν υπάρχει συνάρτηση* $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *με συνεχείς μερικές παραγώγους στο* D, *έτσι ώστε*

$$f_x=P(x,y) \text{ και } f_y=Q(x,y).$$

Τότε

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\Leftrightarrow f_xdx+f_ydy=0\Leftrightarrow df=0\Leftrightarrow f(x,y)=c$$

είναι το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

Θεώρημα 2.3. *Εστω* D *είναι* ***κυρτός*** *τόπος του* $\mathbb{R}^2$ *και οι συναρτήσεις* $P,Q:D\to\mathbb{R}$ *έχουν* ***συνεχείς μερικές παραγώγους*** *στο* D. *Τότε η συνάρτηση* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *είναι (ολικό) διαφορικό μιας συνάρτησης* $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *αν και μόνον αν*

$$P_y(x,y)=Q_x(x,y),\quad \forall(x,y)\in D.$$

Επιπρόσθετα:

$$f=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt,$$

όπου (x_0,y_0) *είναι οποιοδήποτε πλην όμως σταθεροποιημένο σημείο του* D *και* (x,y) *είναι τυχαίο σημείο του* D.

Πόρισμα 2.1 *Εστω* D *είναι κυρτός τόπος του* $\mathbb{R}^2$ *και οι συναρτήσεις* $P,Q:D\to\mathbb{R}$ *έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο* D. *Μια δ.ε. της μορφής* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ *είναι πλήρης αν και μόνον αν*

$$P_y(x,y)=Q_x(x,y),\quad \forall(x,y)\in D.$$

Επιπρόσθετα ο τύπος:

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = c \qquad (2.16)$$

μας δίνει το γενικό ολοκλήρωμα της πλήρους δ.ε.

Σημείωση. Τόσο το Θεώρημα 2.3, όσο και το Πόρισμα 2.1 γενικεύονται και για απλά συνεκτικούς τόπους (αλλά ο τύπος (2.16) ενδέχεται να μην ισχύει). Στην περίπτωση αυτή το γενικό ολοκλήρωμα δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_c Pdx + Qdy = c, \qquad (2.17)$$

πάνω σε οποιοαδήποτε τμηματικά C^1-καμπύλη εντός του D με αρχή ένα οποιοδήποτε σταθεροποιημένο σημείο του D και πέρας ένα τυχαίο σημείο (x, y) του D.

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε.

$$\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0.$$

Λύση. Η δ.ε. είναι πλήρης διότι για $P(x, y) = e^x + y + \sin y$ και $Q(x, y) = e^y + x + x\cos y$ έχουμε

$$P_y = 1 + \cos y = Q_x \quad \forall\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Ετσι για $\left(x_0, y_0\right) = \left(0, 0\right) \in \mathbb{R}^2$ παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. από τη σχέση

$$\int_0^x e^t dt + \int_0^y \left(e^t + x + x\cos t\right)dt = c \Leftrightarrow e^t\Big|_0^x + \left(e^t + x\left(t + \sin t\right)\right)\Big|_0^y = c$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 + e^y - 1 + x(y + \sin y) = c. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $e^y \cdot dx + \left(xe^y + 2y - 1\right) \cdot dy = 0$.

Λύση. Εστω $P(x, y) = e^y$ και $Q(x, y) = xe^y + 2y - 1$. Επειδή

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \forall\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2$$

η δ.ε. είναι πλήρης. Για να βρούμε το γενικό ολοκλήρωμα αυτής μπορούμε να εργασθούμε ως εξής:

Αφού η $e^y dx + \left(xe^y + 2y - 1\right)dy$ είναι (ολικό) διαφορικό μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f = f\left(x, y\right)$ θα ισχύει

$$f_x = e^y \text{ και } f_y = xe^y + 2y - 1.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x (και θεωρώντας το y σταθερό) παίρνουμε

$$f_x = e^y \Rightarrow f(x,y) = \int e^y dx + g(y) = xe^y + g(y),$$

όπου $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αυθαίρετη πλην όμως συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση που θα προσδιορίσουμε. Από την παραπάνω ισότητα έχουμε

$$f(x,y) = xe^y + g(y) \Rightarrow f_y = xe^y + g'(y).$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ισότητα με την $f_y = xe^y + 2y - 1$ προκύπτει

$$xe^y + g'(y) = xe^y + 2y - 1 \Rightarrow g'(y) = 2y - 1 \Rightarrow \int g'(y)dy = \int (2y-1)dy$$

$$\Rightarrow g(y) = y^2 - y + c.$$

Τελικά

$$e^y \cdot dx + \left(xe^y + 2y - 1\right) \cdot dy = 0 \Leftrightarrow dg\left(x, y\right) = 0 \Leftrightarrow g(x,y) = c'$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y + c = c' \Leftrightarrow y^2 - y = C \ \left(C = c' - c\right). \qquad \square$$

Ασκήσεις 1. Να λυθούν οι ακόλουθες πλήρεις δ. ε.:

- $(2xy + x + 1)dx + (x^2 + y)dy = 0$ **Απ.** $\dfrac{x^2 + y^2}{2} + x^2 y + x = c$

- $(2x\sin y + y)dx + (x^2 \cos y + x - y)dy = 0$

  Απ. $-\dfrac{y^2}{2} + x^2 \sin y + xy = c$

- $\left(2x\ln y + \sin y + x\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + x\cos y - 1\right)dy = 0$

  Απ. $x^2 \ln y + \dfrac{x^2}{2} + x\sin y - y = c$

- $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ με $y(0) = 0$

  Απ. $x^2 + x + y^2 - xy - y = 0$

- $(x - y)dx - xdy = 0$ με $y(0) = \dfrac{1}{2}$ **Απ.** $\dfrac{x^2}{2} - xy = \dfrac{1}{2}$

2. Δείξτε ότι κάθε δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών είναι πλήρης.

2.2.3.4. Ολοκληρωτικοί παράγοντες.

Ορισμός 2.16. *Εστω* $P,Q:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$*, είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο* D *και*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (2.18)$$

είναι μια ***μη πλήρης*** *δ.ε. Θα λέμε ότι μια διαφορίσιμη και μη μηδενική συνάρτηση* $\mu:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\ \mu=\mu(x,y)$ *είναι ένας* ***ολοκληρωτικός παράγοντας*** *για τη δ.ε. (2.18), αν η δ.ε.*

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0 \qquad (2.19)$$

είναι πλήρης.

Προφανώς λόγω της υπόθεσης $\mu(x,y)\neq 0\ \forall(x,y)\in D$, οι δ.ε. (2.18) και (2.19) έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.3, τότε η (2.19) είναι πλήρης αν και μόνον αν

$$(\mu P)_y=(\mu Q)_x \Leftrightarrow \mu_y P+\mu P_y=\mu_x Q+\mu Q_x \Leftrightarrow \mu=\frac{\mu_y P-\mu_x Q}{Q_x-P_y}.$$

Η τελευταία ισότητα είναι μια μερική δ.ε. και γενικά είναι δύσκολο να λυθεί αναλυτικά. Αν υποθέσουμε ότι $\mu=\mu(\zeta)$ για κάποια διαφορίσιμη συνάρτηση $\zeta:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \zeta=\zeta(x,y)$, τότε

$$\mu_y=\mu'(\zeta)\cdot\zeta_y \text{ και } \mu_x=\mu'(\zeta)\cdot\zeta_x,$$

οπότε

$$\mu=\mu'(\zeta)\frac{\zeta_y P-\zeta_x Q}{Q_x-P_y}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{Q_x-P_y}{\zeta_y P-\zeta_x Q}. \qquad (2.20)$$

Αν το δεξιό μέλος της (2.20) είναι συνάρτηση μόνον του ζ, δηλ.

$$\frac{Q_x - P_y}{\zeta_y P - \zeta_x Q} = f(\zeta),$$

τότε προσδιορίζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ από τη σχέση

$$\frac{\mu'}{\mu} = f(\zeta) \Rightarrow \ln|\mu| = \int f(\zeta)d\zeta + c \Rightarrow |\mu| = e^{c\int f(\zeta)d\zeta}.$$

Στη συνέχεια (θεωρώντας π.χ. $c = 1$) λύνουμε την πλήρη δ.ε. (2.19) και βρίσκουμε τις λύσεις της (2.18).

Σημείωση. (α) Αν το δεξιό μέλος της (2.20) δεν μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του ζ, τότε η (2.20) είναι δύσκολο να λυθεί ως προς μ.

(β) Υπάρχει περίπτωση η δ.ε. (2.18) να μην έχει ολοκληρωτικό παράγοντα. Σε περίπτωση όμως που έχει, αυτός δεν είναι μοναδικός, αλλά άπειροι. Εμείς αρκεί να προσδιορίσουμε έναν απ' αυτούς.

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $\left(y^2 \sigma\upsilon\nu x\right)dx + \left(4 + 5y\eta\mu x\right)dy = 0$ με ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(y)$.

Λύση. Είναι εύκολο να δούμε ότι η δ.ε. είναι μη πλήρης. Πολ/ζουμε και τα 2 μέλη με $\mu = \mu(y)$ και προσδιορίζουμε τη μ από την εξίσωση

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x \Leftrightarrow \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \Leftrightarrow \mu = \frac{\mu_y P - \mu_x Q}{Q_x - P_y}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\mu'(y) y^2 \sigma\upsilon\nu x}{3y\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{3}{y} \Rightarrow \mu = \pm c y^3.$$

Θεωρούμε $\mu = y^3$ και λύνουμε την πλήρη δ.ε.

$$\mu(y)\left(y^2 \sigma\upsilon\nu x\right)dx + \mu(y)\left(4 + 5y\eta\mu x\right)dy = 0, \ (y \neq 0)$$

$$\Rightarrow y^5 \sigma\upsilon\nu x dx + y^3\left(4 + 5y\eta\mu x\right)dy = 0.$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow y^4 + y^5 \eta\mu x = c\,.$$

Εύκολα φαίνεται ότι και η $y = 0$ είναι επίσης λύση της αρχικής δ.ε.□

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $\left(1 + x^2 y^2 + y\right)dx + xdy = 0$ με ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu\left(xy\right)$.

Λύση. Είναι εύκολο να δούμε ότι η δ.ε. είναι μη πλήρης. Πολ/ζουμε και τα 2 μέλη με $\mu = \mu\left(xy\right)$ και προσδιορίζουμε τη μ από την εξίσωση

$$\left(\mu P\right)_y = \left(\mu Q\right)_x \Leftrightarrow \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \Leftrightarrow \mu = \frac{\mu_y P - \mu_x Q}{Q_x - P_y}$$

$$\overset{\zeta = xy}{\Rightarrow} \mu = -\frac{\mu'\left(\zeta\right)\left(1 + \zeta^2\right)}{2\zeta} \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2\zeta}{1 + \zeta^2} \Rightarrow \mu = \pm c \frac{1}{1 + \zeta^2}\,.$$

Θεωρούμε $\mu = \dfrac{1}{1 + \left(xy\right)^2}$ και λύνουμε την πλήρη δ.ε.

$$\mu(xy)\left(1 + x^2 y^2 + y\right)dx + \mu(xy)xdy = 0 \Rightarrow \frac{1 + x^2 y^2 + y}{1 + x^2 y^2}dx + \frac{x}{1 + x^2 y^2}xdy = 0,$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \tau o \xi \varepsilon \phi\left(xy\right) + x = c\,. \qquad \square$$

Ασκήσεις. 1. Να λυθεί η δ.ε. $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$ με χρήση κατάλληλου ολοκληρωτικού παράγοντα.

Απ. $\ln|x|-y+\dfrac{1}{xy}=c$

2. Αν $\left(x^2+y\right)dx+g\left(x\right)dy=0$, προσδιορίστε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε η παραπάνω δ.ε. να έχει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x)=x$.

Απ. $\dfrac{1}{x}\left(c+\dfrac{x^2}{2}\right)$

3. Να λυθεί η δ.ε. $1-xy+\left(xy-x^2\right)y'=0$ με χρήση κατάλληλου ολοκληρωτικού παράγοντα. **Απ.** $\ln|x|-xy+\dfrac{y^2}{2}=c$

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\mu=\dfrac{1}{xP+yQ}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της ομογενούς και πλήρους δ.ε.

$$P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0.$$

(**Υπόδειξη**: Μια συνάρτηση f είναι ομογενής αν και μόνον αν $xf_x+yf_y=k\cdot f$, όπου k είναι ο βαθμός ομογένειας της f.)

2.2.3.5. Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και Ricatti.

Ορισμός 2.17. *Μια δ.ε. της μορφής*

$$y'(x)+P(x)y(x)=Q(x)\cdot y^k(x) \qquad (2.21)$$

με $k\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ *καλείται δ.ε.* ***Bernoulli****.*

Αν $k=0$ τότε η (2.21) είναι γραμμική ενώ για $k=1$ προκύπτει δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών. Για να λύσουμε τη (2.21) πολ/ζουμε και τα δυο μέλη με y^{-k}, συνεπώς

$$y^{-k}y'+P(x)y^{1-k}=Q(x).$$

Θέτουμε

$$y^{1-k}=u,$$

οπότε

$$u'=(1-k)y^{-k}y' \Leftrightarrow y^{-k}y'=\frac{u'}{1-k}$$

και έτσι προκύπτει η μορφή

$$\frac{u'}{1-k}+P(x)u=Q(x) \Leftrightarrow u'+(1-k)P(x)u=(1-k)Q(x),$$

η οποία είναι γραμμική πρώτης τάξης και λύνεται με τον κλειστό τύπο (2.10) όπως ήδη έχουμε πει. Στη συνέχεια με την αντικατάσταση $u=y^{1-k}$ βρίσκουμε το γενικό ολοκλήρωμα της (2.21).

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $y'-\dfrac{y}{2x}=x^3y^5$.

Λύση. Εχουμε μια δ.ε. Bernoulli με $k=5$. Αντικαθιστούμε $u=y^{1-5}=y^{-4}$, άρα $u'=-4y^{-5}y'$, οπότε η αρχική δ.ε. παίρνει τη μορφή

$$-\frac{u'}{4}-\frac{u}{2x}=x^3 \Leftrightarrow u'+\frac{2}{x}u=4x^3 \Leftrightarrow u=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(c+4\int x^3e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right)$$

$$\Leftrightarrow u = |x|^{-2}\left(c + 4\int x^3 |x|^2 dx\right) \Leftrightarrow u = \frac{1}{x^2}\left(c + \frac{2x^6}{3}\right)$$

Εφόσον $u = y^{-4}$ τελικά έχουμε $y^{-4} = \frac{1}{x^2}\left(c + \frac{2x^6}{3}\right)$. □

Ορισμός 2.18. *Διαφορικές εξισώσεις της μορφής*

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)\cdot y + R(x) \qquad (2.22)$$

καλούνται δ.ε. ***Ricatti***, *όπου* P, Q, R *γνωστές πραγματικές συναρτήσεις.*

Σημειώνουμε ότι δεν υπάρχει τύπος λύσης για την (2.22). Αν όμως γνωρίζουμε μία μερική λύση της, έστω $u = u(x)$, τότε η αντικατάσταση

$$y(x) = u(x) + \frac{1}{z(x)}$$

μετασχηματίζει την (2.22) σε μια γραμμική δ.ε. 1ης τάξης της μορφής

$$z' + \left(2P(x)u(x) + Q(x)\right)\cdot z = -P(x).$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $y' = \frac{y^2 - y - 2}{x}$.

Λύση. Η παραπάνω είναι μια δ.ε. Ricatti. Με παραγοντοποίηση προκύπτει

$$y' = \frac{(y-1)(y+2)}{x},$$

απ' όπου είναι προφανές ότι οι $y = 1,\ y = 2$ είναι δυο μερικές λύσεις της δ.ε. Ας θεωρήσουμε τη λύση $y = 1$. Αντικαθιστούμε στη δ.ε.

$$y = 1 + \frac{1}{z},$$

οπότε μετά από στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει η γραμμική δ.ε.

$$z' + \frac{3}{x} z = -\frac{1}{x}$$

με γενική λύση

$$z = \frac{c}{x^3} z' - \frac{1}{3}.$$

Αρα η γενική λύση της δ.ε. είναι η

$$y = 1 + \frac{1}{\frac{c}{x^3} z' - \frac{1}{3}}. \qquad \square$$

Ασκήσεις.

1. Να λυθεί η δ.ε. $y' + \frac{2}{x} y = y^2 \frac{\ln x}{x}$.

Απ. $y = \frac{4}{1 + cx^2 + 2\ln x}$

2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = y^2 + \frac{y}{x} - \frac{3}{x^2},\ y(1) = 0$.

(**Υπόδειξη:** Βρείτε αρχικά μια μερική λύση της μορφής $y = ax^k$)

Απ. $y = \frac{1}{x} - \frac{4x^3}{3 + x^4}$

3. Να λυθεί η δ.ε $t^2 y' + 2ty - y^3 = 0,\ (t > 0)$. **Απ.** $y^2 = \frac{5t}{2 + ct^5}$

4. Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των κύκλων $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$, όπου g είναι μια παράμετρος και c είναι σταθερά. **Απ.** $x^2 + y^2 - c - ay = 0$, (a σταθερά).

5. Να λυθεί η δ.ε $x^2 y' = (y-1)(x + y - 1)$. **Απ.** $y = 1 + \frac{|x|}{c - \ln|x|}$

2.3. Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης ανώτερου βαθμού.

Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα εξετάσουμε μέσω παραδειγμάτων κάποιες ειδικές περιπτώσεις επίλυσης δ.ε. ανωτέρου βαθμού. Σημειώνουμε ότι η επίλυση τέτοιων δ.ε. στη γενική τους μορφή είναι δύσκολη και συνήθως επιτυγχάνεται με αριθμητικές μεθόδους.

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $(y')^2 - 5y' + 6 = 0$.

Λύση. Θέτοντας $y' = p$, αναγόμαστε στην επίλυση της αλγεβρικής συναρτησιακής εξίσωσης $p^2 - 5p + 6 = 0 \Leftrightarrow p = 2$ ή $p = 3$. Αρα

$$\begin{cases} y' = 2 \\ y' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + c_1 \\ y = 3x + c_2 \end{cases},$$

ή ισοδύναμα

$$(y - 2x - c_1)(y - 3x - c_2) = 0, \ (c_1, c_2 \text{ σταθερές}). \qquad \square$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η δ.ε. $(y')^2 + (xy - x^2)y' - x^3 y = 0$.

Λύση. Παραγοντοποιώντας παίρνουμε

$$(y' - x^2)(y' + xy) = 0,$$

συνεπώς

$$\begin{cases} y' = x^2 \\ y' + xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^3}{3} + c_1 \\ y = c_2 e^{-x^2/2} \end{cases},$$

ή ισοδύναμα

$$\left(y - \frac{x^3}{3} - c_1\right)\left(y - c_2 e^{-x^2/2}\right) = 0, \ (c_1, c_2 \text{ σταθερές}). \qquad \square$$

Γενικά για διαφορικές εξισώσεις της μορφής $F(x, y') = 0$ που μπορούν να λυθούν αλγεβρικά ως προς y', δηλαδή

$$F(x, y') = 0 \Leftrightarrow y' = f(x)$$

η γενική λύση προκύπτει με απευθείας ολοκλήρωση

$$y = \int f(x)dx + c\,.$$

Παρομοίως διαφορικές εξισώσεις της μορφής $F\left(y, y'\right) = 0$ που μπορούν να λυθούν αλγεβρικά ως προς y', δηλαδή

$$F\left(x, y'\right) = 0 \Leftrightarrow y' = f(y)$$

έχουν γενικό ολοκλήρωμα της μορφής

$$y' = f\left(y\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(y\right) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{f\left(y\right)} = x + c,\ \left(f\left(y\right) \neq 0\right).$$