Σημειώσεις

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι

Νικόλαος Ατρέας

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2017

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Επισκόπηση γνωστών εννοιών. 1-8

1.1 Σειρές πραγματικών αριθμών.
1.2 Σειρές συναρτήσεων.
1.3 Γενικευμένα ολοκληρώματα.

Κεφάλαιο 2. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης. 9-52

2.1 Εισαγωγή και βασικές έννοιες.
2.2 Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης.
2.2.1 Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας για διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης και 1^{ου} βαθμού.
2.2.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης.
2.2.3 Μη Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης.
2.2.3.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.
2.2.3.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.
2.2.3.3 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις.
2.2.3.4 Ολοκληρωτικοί παράγοντες.
2.2.3.5 Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και Ricatti.
2.3 Διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης και ανώτερου βαθμού.

Κεφάλαιο 3. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης. 53-97

3.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης με μεταβλητούς συντελεστές.
3.1.1 Ομογενείς Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης.
3.1.2 Μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής δ.ε. 2^{ης} τάξης. Η μέθοδος μεταβολής των σταθερών.
3.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.
3.2.1 Ομογενείς Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.
3.2.2 Μερική λύση μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.
3.3 Η μέθοδος των δυναμοσειρών. Διαφορικές εξισώσεις Bessel.
3.4 Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης.
3.5 Εφαρμογές.

Κεφάλαιο 4. Συστήματα διαφορικών εξισώσεων. 98-112

4.1. Εισαγωγή.
4.2. Η μέθοδος απαλοιφής.
4.3. Η Μέθοδος πινάκων.

Κεφάλαιο 5. Μιγαδική Ανάλυση. 113-183

5.1. Μιγαδικοί αριθμοί.
5.2. Μιγαδικές συναρτήσεις.
5.3. Μιγαδική παράγωγος.
5.4. Μιγαδική ολοκλήρωση.
5.5. Σειρές Taylor και Laurent. Ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

Κεφάλαιο 6. Ο μετασχηματισμός Laplace. 184-215

6.1. Εισαγωγή.
6.2. Ο μετασχηματισμός Laplace.
6.3. Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.
6.4. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.
6.5. Εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων.
6.6. Ο τελεστής Dirac.

Κεφάλαιο 7. Ανάλυση Fourier. 216-235

7.1. Εισαγωγή.
7.2. Σειρά Fourier.
7.3. Μετασχηματισμός Fourier.

Κεφάλαιο 8. Συνοριακά Προβλήματα. 236-255

8.1. Αρμονικές συναρτήσεις.
8.2. Εισαγωγή στις μερικές διαφορικές εξισώσεις.
8.3. Η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών.

Βιβλιογραφία 256

Κεφάλαιο 1.

Επισκόπηση γνωστών εννοιών.

1.1 Σειρές πραγματικών αριθμών.

Εστω μια ακολουθία $a = \{a_n\},\ n \in \mathbb{N}$. Μια έκφραση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

καλείται άπειρη σειρά. $N-$ιοστό μερικό άθροισμα της σειράς καλούμε την ακολουθία

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων S_N συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό S όταν $N \to \infty$, τότε λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στο S και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Οταν η σειρά δεν συγκλίνει λέμε ότι αποκλίνει.

Παράδειγμα. (i) Αν $a_n = r^n$ όπου $|r| < 1$, τότε

$$S_N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} - 1 = r\frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \to \frac{r}{1 - r},\ \ N \to \infty$$

και άρα $S = \dfrac{r}{1 - r}$. Αν $|r| \geq 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.

(ii) Αν $a_n = (-1)^{n+1}$, τότε έχουμε

$$S_N = \begin{cases} 0 & N = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \\ 1 & N = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\grave{o}\varsigma \end{cases},$$

οπότε η σειρά αποκλίνει.

1.2 Σειρές Συναρτήσεων.

Ορισμός 1.1. *Έστω* $\{f_n\}$, $n=1,2,3,...$, *είναι μια ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται σ' ένα υποσύνολο* E *της πραγματικής ευθείας. Αν η ακολουθία πραγματικών αριθμών* $\{f_n(x)\}$ *συγκλίνει για κάθε* $x \in E$, *τότε ορίζεται η συνάρτηση*

$$f : E \to \mathbb{R} : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{1.1}$$

η οποία καλείται οριακή συνάρτηση της ακολουθίας $\{f_n\}$ *στο* E. *Αν ισχύει η (1.1) θα λέμε ότι η ακολουθία* $\{f_n\}$ *συγκλίνει σημειακά στη συνάρτηση* f *στο σύνολο* E.

Ομοίως, αν η αριθμητική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in E$, τότε ορίζεται η συνάρτηση

$$f : E \to \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{1.2}$$

Θα εξετάσουμε ποιες ιδιότητες της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}$ «κληρονομούνται» στην οριακή συνάρτηση f. Για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς, ή παραγωγίσιμες, πότε ισχύει το ίδιο και για την οριακή συνάρτηση f; Επίσης, θα εξετάσουμε πότε ισχύει η σχέση

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx,$$

υπό την προϋπόθεση φυσικά ότι η ακολουθία των συναρτήσεων f_n είναι ολοκληρώσιμη στο προς ολοκλήρωση σύνολο.

Εστω

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n,\ \ 0 \le x \le 1,\ \ \ n = 1,2,3,\ldots$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty}\left(n^k \lambda^n\right) = 0,\ |\lambda| < 1,\ k = 1,2,...,$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ \forall x \in (0,1].$$

Επίσης $f_n(0)=0$, άρα $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0,\ \forall x\in[0,1]$. Τελικά:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0\,.$$

Απ' την άλλη μεριά, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντικατάστασης παίρνουμε

$$\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n d\left(1-x^2\right) = \frac{1}{2n+2}\,,$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Κατά συνέπεια, το όριο του ολοκληρώματος δεν ισούται πάντα με το ολοκλήρωμα του ορίου, ακόμα και αν τα δυο όρια είναι πεπερασμένα.

Ορισμός 1.2. *Θα λέμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}$, $n=1,2,3,...$ *που ορίζονται σ' ένα υποσύνολο* E *της πραγματικής ευθείας συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση* f *στο* E*, αν για κάθε* $\varepsilon>0$*, υπάρχει φυσικός αριθμός* N*, τέτοιος ώστε για κάθε* $n\geq N$ *να ισχύει*

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon,\ \forall x\in E\,.$$

Ομοίως, θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση g στο σύνολο E, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο E. Τα ακόλουθα κριτήρια είναι πολύ χρήσιμα για την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων ή σειρών συναρτήσεων:

Θεώρημα 1.6. *Εστω* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ *σημειακά στο* E. *Αν*

$$M_n=\sup_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|,$$

τότε $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ *ομοιόμορφα στο* E *αν και μόνον αν* $\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$.

Θεώρημα 1.7. (M-test Weierstrass) *Εστω* $\{f_n\}$ *είναι μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο σύνολο* E. *Αν*

$$|f_n(x)| \le M_n, \ \forall\, x \in E \ , n = 1,2,3,...,$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty,$$

τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* E.

Θεώρημα 1.8. *Εστω* $\{f_n\}$ *είναι μια ακολουθία συνεχών (παραγωγίσιμων) πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο σύνολο* $E \subset \mathbb{R}$. *Αν* $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ *ομοιόμορφα στο* E, *τότε και η οριακή συνάρτηση* f *είναι συνεχής (παραγωγίσιμη) στο* E. *Μάλιστα, αν* $\{f_n\}$ *είναι ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

Θεώρημα 1.9. *Εστω* $\{f_n\}$ *είναι μια ακολουθία ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται σε κλειστό διάστημα* $[a,b]$. *Αν* $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ *ομοιόμορφα στο* $[a,b]$, *τότε και η οριακή συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

1.3. Γενικευμένα ολοκληρώματα.

Ορισμός 1.3. *Εστω* $a > 0$. *Θα λέμε ότι μια πραγματική συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,+\infty)$ *αν η* f *είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα* $[a,c] \subset [a,+\infty)$ *και το γενικευμένο (ή μη γνήσιο) ολοκλήρωμα της* f

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

υπάρχει ή όπως λέμε συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό. Τότε γράφουμε

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx < \infty .$$

Σε αντίθετη περίπτωση λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f *στο* $[a,+\infty)$ *αποκλίνει.*

Ορισμός 1.4. *Θα λέμε ότι η* f *είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο* $[a,+\infty)$ *αν*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx < \infty .$$

Για τη μελέτη της σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων υπενθυμίζουμε το ακόλουθο κριτήριο σύγκρισης:

Πρόταση 1.1. *Έστω* f,g *είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε κάθε διάστημα* $[a,c]\subset[a,+\infty)$. *Αν* $|f(x)|\le|g(x)|$ $\forall x>a$, *τότε*

$$\int_a^{+\infty} |g(x)|dx < \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx < \infty .$$

Πόρισμα 1.1. Αν f *είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο* $[a,+\infty)$ *τότε είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,+\infty)$.

Παρατηρήσεις. (α) Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $(-\infty,b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)dx,\ (b<0).$$

(β) Αν μια πραγματική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[-M,N]\subset(-\infty,\infty)$, όπου N,M είναι τυχαίοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και είναι τέτοια ώστε

$$\int_N^{+\infty} f(x)dx < \infty \text{ και } \int_{-\infty}^{-M} f(x)dx < \infty ,$$

τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < \infty$.