4. Μιγαδική Ολοκλήρωση. Το Θεώρημα Cauchy και εφαρμογές.

Καμπύλες στο Μιγαδικό επίπεδο.

Ορισμός 4.1 *Αν* $x, y : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι* ***συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις*** *τότε κάθε απεικόνιση*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} : \ \gamma(t) = x(t) + iy(t),$$

καλείται ***(προσανατολισμένη) καμπύλη*** *στο μιγαδικό επίπεδο (ή* ***δρόμος****) με φορά διαγραφής προς την κατεύθυνση αύξησης των* t *. Το σημείο* $\gamma(a)$ *καλείται αρχικό σημείο της καμπύλης και το σημείο* $\gamma(b)$ *καλείται τελικό σημείο. Εάν* $\gamma(a) = \gamma(b)$ *τότε η καμπύλη καλείται* ***κλειστή****, αλλιώς καλείται* ***ανοικτή****. Η* γ *καλείται* ***απλή*** *αν για κάθε* $a < t_1 < t_2 < b$ *ισχύει* $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$*, δηλαδή μια απλή καμπύλη δεν τέμνει τον εαυτό της. Η εικόνα μιας καμπύλης στο μιγαδικό επίπεδο καλείται* ***ίχνος*** *της καμπύλης.*

Ορισμός 4.2 *Μια καμπύλη* $\gamma(t) = x(t) + iy(t), \ t \in [a,b]$ *καλείται* ***λεία*** *αν η* γ *είναι παραγωγίσιμη με* ***συνεχή*** *και* ***μη*** *μηδενική παράγωγο* $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ *για κάθε* $t \in [a,b]$*. Με άλλα λόγια η* γ *είναι λεία αν*

- *υπάρχουν οι παράγωγοι* $x'(t), y'(t)$ *και είναι συνεχείς για κάθε* $t \in [a,b]$
- *οι* $x'(t), y'(t)$ *δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα για κάθε* $t \in [a,b]$*.*

Αν η $\gamma'(t)$ *είναι τμηματικά συνεχής στο* $[a,b]$ *τότε λέμε ότι η* γ *είναι* ***τμηματικά λεία καμπύλη*** *(ή αλλιώς* ***βρόχος****).*

Παρατήρηση. Δύο διαφορετικές καμπύλες μπορεί να έχουν το ίδιο ίχνος. Για παράδειγμα οι καμπύλες

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi)$$

και

$$\gamma_2(t) = e^{-it}, \ \ t \in [0, 2\pi)$$

έχουν το ίδιο ίχνος (το μοναδιαίο κύκλο) αλλά αντίθετες φορές διαγραφής. Αν λοιπόν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι μια καμπύλη ορίζουμε ως **αντίθετη** καμπύλη της γ να είναι η καμπύλη

$$-\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}:\ (-\gamma)(t)=\gamma(a+b-t),\ t\in[a,b].$$

Δηλαδή η $-\gamma$ έχει το ίδιο ίχνος με την γ αλλά αντίθετο προσανατολισμό.

Επιπρόσθετα αν $\begin{cases}\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{C}\\ \gamma_2:[b,c]\to\mathbb{C}\end{cases}$ είναι δύο καμπύλες με $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ τότε ορίζουμε ως **άθροισμα** αυτών να είναι μια νέα καμπύλη

$$\gamma_1+\gamma_2:[a,c]\to\mathbb{C}:\ \gamma_1+\gamma_2(t)=\begin{cases}\gamma_1(t), & t\in[a,b]\\ \gamma_2(t), & t\in[b,c]\end{cases}.$$

Ορισμός 4.3 Προσανατολισμός απλής κλειστής καμπύλης. *Θα λέμε ότι μια απλή κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ είναι **θετικά προσανατολισμένη (ή διαγράφεται με τη θετική φορά)** αν κινούμενοι κατά μήκος της έχουμε πάντα στο αριστερό χέρι μας **το εσωτερικό** της γ.*

Ορισμός 4.4 *Εστω $D\subset\mathbb{C}$ είναι τόπος (δηλαδή ανοικτό και συνεκτικό σύνολο). Ο τόπος D καλείται **απλά συνεκτικός** αν δεν έχει «τρύπες» στο εσωτερικό του. Ισοδύναμα ο D καλείται **απλά συνεκτικός** τόπος αν κάθε κλειστή καμπύλη στο εσωτερικό του D μπορεί να συσταλλεί με συνεχή τρόπο σε σημείο του D παραμένοντας εξ ολοκλήρου στο D. Σε αντίθετη περίπτωση ο D καλείται **πολλαπλά συνεκτικός τόπος**.*

Ας αναφέρουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα καμπύλων.

- **Κύκλος** κέντρου z_0 και ακτίνας r (θετική φορά):

$$z(t)=z_0+re^{it},\ t\in[0,2\pi).$$

- **Έλλειψη** κέντρου z_0 με μήκη ημιαξόνων $a,b>0$ (θετική φορά).

$$z(t)=z_0+a\cdot\sigma\upsilon\nu t+i\cdot b\cdot\eta\mu t,\ t\in[0,2\pi).$$

- **Ευθύγραμμο τμήμα** με άκρα z_0, z_1 (φορά $z_0\to z_1$):

$$z(t)=z_0+t(z_1-z_0),\ t\in[0,1].$$

Επικαμπύλια ολοκληρώματα.

Στο εξής όταν γράφουμε καμπύλη θα εννοούμε πάντα μια προσανατολισμένη καμπύλη. Ετσι αν $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$: $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ είναι μια καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο τότε ορίζουμε

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\cdot\int_a^b y(t)\,dt .$$

Ορισμός 4.5 *Έστω f είναι μια **συνεχής** μιγαδική συνάρτηση πάνω σε μια **τμηματικά λεία** καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$. Τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της καμπύλης γ ως εξής:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt .$$

Σημείωση: Στο παραπάνω ολοκλήρωμα θεωρούμε

$$dz = d\gamma(t) = \gamma'(t)dt = x'(t)dt + iy'(t)dt = dx + idy .$$

Οι ιδιότητες του επικαμπυλίου ολοκληρώματος περιγράφονται στην ακόλουθη:

Πρόταση 4.1 *Εστω $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι μια τμηματικά λεία καμπύλη και f,g είναι συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις πάνω στο ίχνος της γ_1.*

(α) *Αν $\phi:[c,d]\to[a,b]$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση με $\phi(c)=a$, $\phi(d)=b$ και $\phi'(t)>0$ για κάθε $t\in[c,d]$ τότε*

$$\int_{\gamma_1\circ\phi} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz .$$

Με άλλα λόγια κάθε αναπαραμέτρηση της καμπύλης που διατηρεί τον προσανατολισμό της δε μεταβάλλει την τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος.

(β) $\int_{\gamma_1}\left(c_1 f(z)+c_2 g(z)\right)dz = c_1\int_{\gamma_1} f(z)dz + c_2\int_{\gamma_1} g(z)dz,\ \left(c_1,c_2\in\mathbb{C}\right).$

(γ) $\int_{-\gamma_1} f(z)dz = -\int_{\gamma_1} f(z)dz .$

(δ) Αν $\gamma_2:[b,c]\to\mathbb{C}$ *είναι μια τμηματικά λεία καμπύλη με* $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ *τότε*

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz\,,$$

υπό την προϋπόθεση ότι η f *είναι συνεχής πάνω στο ίχνος της* $\gamma_1+\gamma_2$ *.*

(ε) *Αν* $M=\sup\left\{\left|f(z)\right|:z\in\gamma_1\left(\left[a,b\right]\right)\right\}$ *και* L *είναι το μήκος της καμπύλης* γ_1 *τότε*

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right|\ \le\ \int_{\gamma_1}\left|f(z)\right|\cdot\left|dz\right|\ \le\ M\cdot L\,.$$

Απόδειξη: (α) $\int_{\gamma_1\circ\phi} f(z)\,dz=\int_c^d f\left(\gamma_1\circ\phi(t)\right)\left(\gamma_1\circ\phi\right)'(t)\,dt$

$$=\int_c^d f\left(\gamma_1\left(\phi(t)\right)\right)\gamma_1'\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\,dt\overset{\omega=\phi(t)}{=}\int_a^b f\left(\gamma_1(\omega)\right)\gamma_1'(\omega)\,d\omega=\int_{\gamma_1} f(z)dz\,.$$

(β) $\int_{\gamma_1}\left(c_1f(z)+c_2g(z)\right)dz=\int_a^b\left(c_1f(\gamma_1(t))+c_2g(\gamma_1(t))\right)\gamma_1'(t)dt$

$$=c_1\int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt+c_2\int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt=c_1\int_{\gamma_1} f(z)dz+c_2\int_{\gamma_1} g(z)dz\,.$$

(γ) $\int_{-\gamma_1} f(z)\,dz=\int_a^b f\left(\gamma_1(a+b-t)\right)\left(\gamma_1(a+b-t)\right)'dt$

$$=\int_b^a f\left(\gamma_1(\omega)\right)\gamma_1'(\omega)d\omega=-\int_a^b f\left(\gamma_1(\omega)\right)\gamma_1'(\omega)d\omega=-\int_{\gamma_1} f(z)dz\,.$$

(δ) Όπως στην (α).

(ε) $\left|\int_{\gamma_1} f(z)dz\right|=\left|\int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt\right|\le\int_a^b\left|f(\gamma_1(t))\right|\ \left|\gamma_1'(t)\right|dt$

$$\le M\int_a^b\left|\gamma_1'(t)\right|dt=M\int_a^b\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=M\cdot L\,.\qquad\square$$

Πρόταση 4.2 *Εστω* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *είναι συνεχής μιγαδική συνάρτηση σε τμηματικά λεία καμπύλη* $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$: $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$*. Τότε*

$$\int_\gamma f(z)dz=\left(\int_\gamma u(x,y)dx-v(x,y)dy\right)+i\left(\int_\gamma u(x,y)dy+v(x,y)dx\right).$$

Απόδειξη. $\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma (u+iv)\cdot(dx+idv)=\left(\int_\gamma udx-vdy\right)+i\left(\int_\gamma udy+vdx\right).$□

Σημείωση: Η Πρόταση 4.2 δίνει μια ερμηνεία της τιμής του επικαμπυλίου ολοκληρώματος μέσω των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων τύπου έργου πεδίων του $\mathbb{R}^2$. **Πράγματι το πραγματικό μέρος του $\int_\gamma f(z)dz$ μπορεί να ερμηνευθεί ως το έργο του πεδίου $\overline{f}=\left(u(x,y),-v(x,y)\right)$ κατά μήκος της καμπύλης γ. Ομοίως το φανταστικό μέρος της τιμής του $\int_\gamma f(z)dz$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η ροή του πεδίου $\overline{f}=\left(u(x,y),-v(x,y)\right)$ δια μέσου της καμπύλης γ.**

Ορισμός 4.6 *Έστω E είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f:E\to\mathbb{C}$. Αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $F:E\to\mathbb{C}$ που ικανοποεί την $F'(z)=f(z)$ για κάθε $z\in E$ τότε η F καλείται* ***παράγουσα*** *ή* ***αντιπαράγωγος*** *της f στο E.*

Θεώρημα 4.1 (Παράγουσα και ανεξαρτησία δρόμου) *Έστω $E\subset\mathbb{C}$ είναι* ***τόπος*** *και $f:E\to\mathbb{C}$ είναι* ***συνεχής****. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

- *Η f έχει μοναδική παράγουσα στο E (με προσέγγιση σταθεράς).*
- *Για κάθε κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη γ με ίχνος στο E ισχύει*

$$\int_\gamma f(z)dz=0.$$

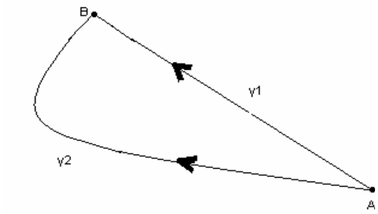
Απόδειξη. Εστω F είναι παράγουσα της f. Τότε $F'(z)=f(z)$, άρα

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma F'(z)dz=\int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt=\int_a^b \left(F\circ\gamma\right)'(t)dt$$

$$=\left(F\circ\gamma\right)(b)-\left(F\circ\gamma\right)(a)=F\left(\gamma(b)\right)-F\left(\gamma(a)\right)=0.$$

Αντιστρόφως έστω $\int_\gamma f(z)dz=0$ για κάθε κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη γ

στο E. Αν Α και Β είναι δυο σημεία στο E όπως στο σχήμα



και γ_1, γ_2 είναι δυο οποιεσδήποτε τμηματικά λείες καμπύλες με κοινή αρχή το Α και πέρας το Β θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz .$$

Από το σχήμα έχουμε ότι η $\gamma_1 - \gamma_2$ είναι κλειστή καμπύλη και λόγω υπόθεσης παίρνουμε

$$\int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0 .$$

Αρα η συνάρτηση

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

είναι καλά ορισμένη ($z_0, z \in E$, z_0 σταθερό) με την έννοια ότι η παραπάνω γραφή δηλώνει ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη της επιλογής καμπύλης ζ με άκρα τα z_0 και z. Εστω $\zeta + h \in E,\ h \in \mathbb{C}$. Αφού η τιμή της $F(z)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή καμπύλης μπορούμε να υποθέσουμε (χωρίς περιορισμό της γενικότητας) ότι η καμπύλη ζ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα z_0 και z. Τότε:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta .$$

Εφόσον $f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)d\zeta$, έχουμε

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{z}^{z+h}\left(f(\zeta) - f(z)\right)d\zeta\right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\sup\left|f(\zeta) - f(z)\right||h| \to 0,\ \zeta \to z$$

λόγω συνέχειας της f. Άρα $F'(z)=f(z)$. Αν $G(z)$ ήταν μια άλλη παράγουσα της f, τότε προφανώς θα ίσχυε $F'(z)=G'(z)\Leftrightarrow (F-G)'(z)=0$. Από τη σχέση αυτή και την υπόθεση ότι E είναι τόπος προκύπτει ότι $F-G=c$. □

Παρατήρηση: (α) Συνήθως γράφουμε:

- $\int f(z)dz$ για να δηλώσουμε το σύνολο των αντιπαραγώγων της f.
- $\int_a^b f(z)dz$ για να δηλώσουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f είναι ανεξάρτητο του δρόμου και εξαρτάται μόνον από το αρχικό σημείο a και τελικό σημείο b.
- $F(z)=\int_a^z f(\zeta)d\zeta + f(a)$ για να δηλώσουμε μια παράγουσα της f.
- $\oint_\gamma f(z)dz$ για να δηλώσουμε ολοκλήρωση πάνω σε κλειστή καμπύλη (χωρίς ο τελευταίος συμβολισμός να τηρείται απαρέγκλιτα).

(β) Οι αντιπαράγωγοι ολόμορφων συναρτήσεων υπολογίζονται όπως οι αντιπαράγωγοι στις πραγματικές συναρτήσεις (στο πεδίο όπου είναι ολόμορφες). Έτσι έχουμε:

- $\int z^a dz=\dfrac{z^{a+1}}{a+1}+c,\ a\neq -1,\ a\in\mathbb{C}$,
- $\int \dfrac{1}{z}dz=Log(z)+c$ στο πεδίο αναλυτικότητας του Log.
- $\int e^z dz=e^z+c,$
- $\int \eta\mu z dz=-\sigma\upsilon\nu z+c,$
- $\int \sigma\upsilon\nu z dz=\eta\mu z+c,$
- $\int \sinh z dz=\cosh z+c,$
- $\int \cosh z dz=\sinh z+c,$ κλπ.

Το Θεώρημα του Cauchy.

Θεώρημα 4.2 (Cauchy) *Αν f είναι ολόμορφη συνάρτηση πάνω και στο εσωτερικό μιας απλής κλειστής τμηματικά λείας καμπύλης γ, τότε*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Παρατήρηση. (α) Αν υπάρχει έστω και ένα σημείο στο εσωτερικό της γ όπου η f δεν είναι ολόμορφη τότε το Θεώρημα Cauchy δεν ισχύει εν γένει. Για παράδειγμα έστω $f(z)=\frac{1}{z}$ και $\gamma(t)=e^{it}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Τότε η f δεν είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου (διότι δεν είναι ολόμορφη στο $z=0$) και έχουμε

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} d\left(e^{it}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \left(e^{it}\right)' dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \left(e^{it}\right)' dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i \cdot e^{it} dt = 2\pi i.$$

(β) Το Θεώρημα Cauchy ισχύει και για μη απλές καμπύλες. Αυτό αποδεικνύεται με χρήση της έννοιας της ομοτοπίας. Δεν θ′ αναφερθούμε περαιτέρω στην έννοια αυτή σ′ αυτές τις σημειώσεις.

(γ) Αν στις υποθέσεις του Θεωρήματος Cauchy απαιτήσουμε η f' να είναι συνεχής πάνω και στο εσωτερικό της γ τότε η απόδειξη του Θεωρήματος Cauchy γίνεται εύκολα με χρήση του Θεωρήματος Green για το επίπεδο. Σ′ αυτή την περίπτωση γράφοντας $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy)$ βρίσκουμε εύκολα ότι οι μερικές παράγωγοι $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$. Τότε από την Πρόταση 4.2 και το Θεώρημα Green για το επίπεδο παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \left(\int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy\right) + i\left(\int_\gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx\right)\\ &= -\iint_E \left(v_x+u_y\right)dxdy + i\iint_E \left(u_x - v_y\right)dxdy = 0.\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η επιπλέον υπόθεση της συνέχειας της f' μπορεί μεν να απλοποιεί την απόδειξη του Θεωρήματος Cauchy παρά ταύτα είναι αχρείαστη διότι όπως θα δούμε παρακάτω κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι απειροδιαφορίσιμη, άρα η f' είναι συνεχής. Η απόδειξη του Θεωρήματος Cauchy χωρίς τη συνθήκη συνέχειας της f' δεν είναι τόσο απλή. Πρώτος ο Goursat απέδειξε το Θεώρημα 4.2 μόνον για ορθογώνιες καμπύλες και στη συνέχεια από το Θεώρημα Goursat και με χρήση της έννοιας των ομοτοπικών καμπύλων απεδείχθη ότι οι ορθογώνιες καμπύλες μπορούν να αντικατασταθούν από οποιαδήποτε κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη.

Για το αντίστροφο του Θεωρήματος Cauchy έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.3 (Morera) *Αν f είναι συνεχής σε τόπο E και ισχύει*

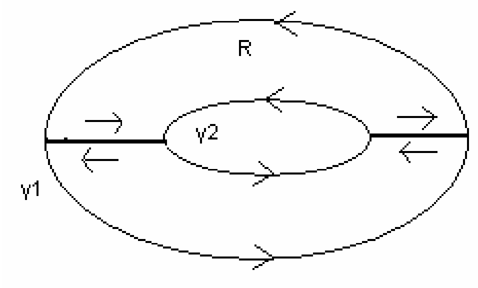
$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

για κάθε κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη γ με ίχνος στο E, τότε η f είναι ολόμορφη στο E.

Πόρισμα 4.1 (Παράγουσα και Θεώρημα Cauchy) *Αν f είναι ολόμορφη επί ενός **απλά** συνεκτικού τόπου E τότε η f έχει μοναδική παράγουσα στο E (με προσέγγιση σταθεράς).*

Απόδειξη. Λαμβάνοντας υπόψη ότι σε κάθε απλά συνεκτικό τόπο E κάθε απλή κλειστή καμπύλη γ στον τόπο E έχει το εσωτερικό της επίσης στο E και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1 παίρνουμε το αποτέλεσμα για απλές κλειστές καμπύλες. Γενικότερα για κλειστές καμπύλες θεωρούμε ότι μπορούμε να τις γράψουμε ως ένωση απλών κλειστών καμπύλων. □

Θεώρημα 4.4 (Παραμόρφωση δρόμων) *Εστω γ_1, γ_2 είναι δυό απλές, κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες **με ίδιο προσανατολισμό** έτσι ώστε η μια εκ των γ_1, γ_2 να βρίσκεται στο εσωτερικό της άλλης (βλέπε ενδεικτικό σχήμα):*



Αν f είναι ολόμορφη σε χωρίο R και στο σύνορο του $\partial R = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (βλέπε σχήμα) τότε

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz\,.$$

Απόδειξη. Εστω R είναι το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων γ_1 και γ_2 και έστω L_1, L_2 είναι οι καμπύλες με ίχνη τα γραμμοσκιασμένα ευθύγραμμα σχήματα με τη φορά του σχήματος. Τότε το R διαμερίζεται σε δύο χωρία (έστω R_1 και R_2) που φράσσονται από δύο απλές κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες, συνεπώς το θεώρημα Cauchy εφαρμόζεται σε κάθε μία από αυτές. Αν τα τμήματα των καμπύλων γ_1 και γ_2 που αποτελούν σύνορο για τα χωρία R_1 και R_2 συμβολίζονται με $\gamma_{1,R_1}, \gamma_{2,R_1}$ και $\gamma_{1,R_2}, \gamma_{2,R_2}$ γ_Δ αντιστοίχως, τότε έχουμε

$$\int_{\gamma_{1,R_1}+L_1-\gamma_{2,R_1}+L_2} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_{1,R_1}} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz$$

$$-\int_{\gamma_{2,R_1}} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz = 0.$$

Ομοίως: $\int_{\gamma_{1,R_2}-L_2-\gamma_{2,R_2}-L_1} f(z)dz = 0 \;\Leftrightarrow \int_{\gamma_{1,R_2}} f(z)dz - \int_{L_2} f(z)dz$

$$-\int_{\gamma_{2,R_2}} f(z)dz - \int_{L_2} f(z)dz = 0.$$

Αθροίζοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\left(\int_{\gamma_{1,R_1}} f(z)dz + \int_{\gamma_{1,R_2}} f(z)dz\right) - \left(\int_{\gamma_{2,R_1}} f(z)dz + \int_{\gamma_{2,R_2}} f(z)dz\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$ □

Θεώρημα 4.5 (Γενικευμένο Θεώρημα Cauchy). *Εστω f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση σε κλειστό τόπο G με σύνορο ∂G. Αν το σύνορο ∂G αποτελείται από μια απλή κλειστή τμηματικά λεία και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη γ η οποία περιέχει στο εσωτερικό της πεπερασμένο αριθμό απλών κλειστών τμηματικά λείων και θετικά προσανατολισμένων καμπύλων $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ έτσι ώστε κάθε καμπύλη γ_j να βρίσκεται στο εξωτερικό κάθε άλλης καμπύλης γ_k $(k, j = 1, \ldots, n,\ k \neq j)$, τότε*

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz}.$$

Απόδειξη. Οπως στο Θεώρημα 4.4. □

Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy

Θεώρημα 4.6 (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy) *Έστω f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό μιας απλής, κλειστής και **<u>θετικά προσανατολισμένης</u>** τμηματικά λείας καμπύλης γ. Εάν z_0 είναι οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό της γ, τότε*

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz}.$$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Προφανώς η g είναι ολόμορφη στο εσωτερικό της γ εκτός (ενδεχομένως) του σημείου z_0. Αφού z_0 είναι σημείο στο εσωτερικό της γ, υπάρχει κύκλος γ_1: $z = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$ εντός του G και από το Θεώρημα παραμόρφωσης δρόμων έχουμε

$$\oint_\gamma g(z) dz = \oint_{\gamma_1} g(z) dz \Leftrightarrow \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Τότε:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$= f(z_0) \cdot \int_{|z - z_0| = r} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$= f(z_0) \cdot 2\pi i + \oint_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο z_0 (εξ ορισμού), θα ισχύει

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall z \in G: \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε αμελητέο $\varepsilon > 0$ και κατά συνέπεια ακτίνα $r < \delta(\varepsilon)$ ώστε

$$\left|\oint_{\gamma_1}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|\le\oint_{\gamma_1}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz|\le\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r=2\pi\varepsilon .$$

Αρα η τιμή του $\oint_{\gamma_1}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$ είναι αμελητέα και συνεπώς

$$\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\cdot f(z_0). \qquad \square$$

Σημείωση: (α) Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy είναι πολύ σημαντικός. Με απλά λόγια μας λέει ότι **αν μια συνάρτηση είναι ολόμορφη στο εσωτερικό ενός απλά συνεκτικού τόπου, τότε όλες οι τιμές της συνάρτησης στο εσωτερικό του τόπου καθορίζονται πλήρως από τις τιμές της συνάρτησης πάνω στο σύνορο του τόπου**. Προφανώς μια τέτοια ιδιότητα δεν ισχύει στις πραγματικές συναρτήσεις.

(β) Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy γενικεύεται εύκολα για μη απλά συνεκτικούς τόπους. Με τις συνθήκες του Θεωρήματος 4.5 έχουμε

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz .$$

(γ) Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy γενικεύεται και για <u>μη απλές</u> κλειστές καμπύλες με χρήση του τύπου

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i\cdot I(\gamma,z_0)}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz ,$$

όπου η ποσότητα $I(\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{1}{z-z_0}dz$ καλείται **δείκτης στροφής της καμπύλης γ γύρω απ' το σημείο** z_0. Αποδεικνύεται ότι ο δείκτης στροφής είναι ακέραιος αριθμός και μετρά πόσες φορές περιστρέφεται η καμπύλη γ γύρω απ' το σημείο z_0. Αν z_0 δεν ανήκει στο εσωτερικό της γ τότε $I(\gamma,z_0)=0$.

Θεώρημα 4.7 (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους) *Έστω f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό μιας απλής, κλειστής και* ***<u>θετικά προσανατολισμένης</u>*** *τμηματικά λείας καμπύλης γ. Τότε η*

f έχει παραγώγους κάθε τάξεως σε σημείο z_0 στο εσωτερικό της γ και ισχύει

$$\boxed{f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz}.$$

Σημείωση: (α) Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους είναι επίσης πολύ σημαντικός. Με απλά λόγια μας λέει ότι **αν μια συνάρτηση είναι ολόμορφη στο εσωτερικό ενός απλά συνεκτικού τόπου G, τότε η f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο G, δηλαδή είναι απειροδιαφορίσιμη στο G**. Προφανώς μια τέτοια ιδιότητα δεν ισχύει στις πραγματικές συναρτήσεις.

(β) Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους γενικεύεται τόσο για πολλαπλά συνεκτικούς τόπους όσο και για μη απλές κλειστές καμπύλες όπως παραπάνω.

Εφαρμογές

Πόρισμα 4.2 (Θεώρημα Μέσης Τιμής Gauss) *Έστω f είναι ολόμορφη στον κλειστό δίσκο $\overline{D}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-z_0\right|\le r\right\}$. Τότε*

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta}.$$

Απόδειξη. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}}\cdot i\cdot re^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta.$$ □

Πόρισμα 4.3 (Ανισότητα Cauchy) *Έστω $r>0$, $z_0\in\mathbb{C}$ και f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου C_r : $\left|z-z_0\right|=r$. Αν ισχύει $\left|f(z)\right|\le M_r$ για κάθε z πάνω στον κύκλο C_r, τότε*

$$\boxed{\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{M_r \cdot n!}{r^n},\ n \in \mathbb{N}}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Cauchy για παραγώγους έχουμε:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M_r}{r^{n+1}} \int_{|z-z_0|=r} |dz| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M_r}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r. \quad \square$$

Πόρισμα 4.4 (Θεώρημα Liouville) *Αν μια ακεραία συνάρτηση f είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Εστω f ακεραία (δηλ. ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και $|f(z)| \leq C$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε η f είναι απειροδιαφορίσιμη στο $\mathbb{C}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Θεωρούμε τυχαίο $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε από την ανισότητα Cauchy έχουμε

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M_r}{r} \leq \frac{C}{r} \text{ για κάθε } r > 0.$$

Αφήνοντας το $r \to +\infty$ παίρνουμε $|f'(z_0)| \to 0 \Rightarrow f'(z_0) \to 0$. Αφού το z_0 είναι αυθαίρετο έχουμε $f'(z) = 0 \ \ z \in \mathbb{C}$, άρα η f είναι σταθερή. $\square$

Πόρισμα 4.5 (Αρχή μεγίστου) *Αν f είναι ολόμορφη και μη σταθερή σε τόπο E τότε η $|f(z)|$ δεν έχει μέγιστο στο E.*

Απόδειξη. Εστω ότι υπάρχει $z_0 \in E$ έτσι ώστε $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ για κάθε $z \in E$. Αφού το E είναι τόπος είναι ανοικτό σύνολο άρα υπάρχει $\varepsilon-$περιοχή του z_0 της μορφής $D_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ στο εσωτερικό του E. Τότε απ' το Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss παίρνουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Εξ υποθέσεως έχουμε $\left|f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta}\right)\right| \leq |f(z_0)|$. Αν υπάρχει τουλάχιστον ένα θ_0 τέτοιο ώστε $\left|f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta_0}\right)\right| < |f(z_0)|$, τότε η ανισότητα αυτή θα ισχύει (λόγω συνεχείας της f) για κάθε $\theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ για κατάλληλο μικρό δ. Δηλαδή η ανισότητα ισχύει για όλες τις τιμές $f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta}\right)$ σε κάποιο τόξο του κύκλου που αντιστοιχεί στις τιμές $\theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$. Επιλέγουμε τώρα ένα άλλο σημείο $\left|f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta_1}\right)\right| < \left|f(z_0)\right|$ όπου $\theta_1 \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ και εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία εντοπίζοντας συνολικά ένα μεγαλύτερο τόξο του κύκλου που αντιστοιχεί στις τιμές $\theta \in (\theta_0 - \delta_0, \theta_1 + \delta_1)$ για το οποίο να ισχύει $\left|f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta}\right)\right| < \left|f(z_0)\right|$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο τελικά «σαρώνουμε» όλο τον κύκλο βρίσκοντας ότι

$$\left|f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta}\right)\right| < \left|f(z_0)\right| \ \forall \theta \in [0, 2\pi).$$

Τότε

$$\left|f(z_0)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta}\right) d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta}\right)\right| d\theta$$

$$< \left|f(z_0)\right| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = \left|f(z_0)\right|, \text{ (άτοπο).}$$

Αρα αναγκαστικά $\left|f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta}\right)\right| = \left|f(z_0)\right| \ \forall \theta \in [0, 2\pi)$ και αφού το ίδιο ισχύει για όλους τους κύκλους $|z - z_0| = r < \varepsilon$ προκύπτει ότι

$$\left|f\left(z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\theta}\right)\right| = \left|f(z_0)\right| \text{ για κάθε } \overline{D_\varepsilon(z_0)} = \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}.$$

Εστω τώρα A είναι το σύνολο όλων των σημείων $z \in E$ έτσι ώστε $f(z) = f(z_0)$. Εφόσον (όπως ήδη δείξαμε) γύρω από κάθε σημείο του A υπάρχει μια ανοικτή περιοχή που ανήκει στο A, αναγκαστικά το A είναι ανοικτό σύνολο. Απ' την άλλη μεριά η εικόνα του A μέσω της $|f|$ που είναι συνεχής είναι το μονοσύνολο $\left|f(z_0)\right|$ που είναι κλειστό σύνολο, άρα το A πρέπει να είναι κλειστό σύνολο. Αρα το A είναι και ανοικτό και κλειστό και αφού το E είναι συνεκτικό τα μόνα ανοικτά και κλειστά σύνολα του E είναι το κενό σύνολο ή ο εαυτός του. Αρα $A = \varnothing$ (άτοπο) ή $A = E$. Τελικά $A = E$ δηλαδή η f είναι σταθερή στο E, άτοπο. Αρα η $|f|$ δεν έχει μέγιστο στο E. □

Πόρισμα 4.6 (Αρχή μεγίστου) *Αν f είναι ολόμορφη και μη σταθερή σε* ***φραγμένο*** *τόπο E και η f είναι συνεχής στο σύνορό του ∂E, τότε η $\left|f(z)\right|$ παίρνει μέγιστη τιμή πάνω στο σύνορο ∂E.*

Απόδειξη. Εφαρμογή του Πορίσματος 4.5 και θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών. □

Πόρισμα 4.7 (Αρχή ελαχίστου) *Αν f είναι ολόμορφη και μη σταθερή σε τόπο E και $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in E$ τότε η $\left|f(z)\right|$ δεν παίρνει ελάχιστη τιμή στο E.*

Απόδειξη. Εφαρμογή της αρχής του μεγίστου για τη συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$. □

Πόρισμα 4.8 (Αρχή ελαχίστου). *Αν f είναι ολόμορφη και μη σταθερή σε* ***φραγμένο*** *τόπο E με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in E$ και αν η f είναι συνεχής στο σύνορό του ∂E, τότε η $\left|f(z)\right|$ παίρνει ελάχιστη τιμή πάνω στο σύνορο ∂E.*

Λυμένες ασκήσεις

1. Αν $a,b,c \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $\int_a^b e^{ict}dt = \dfrac{e^{icb} - e^{ica}}{ic}$.

Λύση. $\int_a^b e^{ict}dt = \int_a^b \left(\sigma\upsilon\nu(ct) + i\eta\mu(ct)\right)dt = \int_a^b \sigma\upsilon\nu(ct)dt + i\int_a^b \eta\mu(ct)dt$

$$= \left.\frac{\eta\mu(ct) - i\sigma\upsilon\nu(ct)}{c}\right|_a^b = \left.\frac{\sigma\upsilon\nu(ct) + i\eta\mu(ct)}{ic}\right|_a^b = \left.\frac{e^{ict}}{ic}\right|_a^b = \frac{1}{ic}\left(e^{icb} - e^{ica}\right).$$

2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(α) $\int_0^1 (3 - it)^2 dt$, **(β)** $\int_1^2 e^{-3it}dt$, **(γ)** $\int_0^1 \dfrac{1}{t - e^{i\pi/3}}dt$.

Λύση. (α) $\int_0^1 (3-it)^2\,dt = \int_0^1 \left(9-6it-t^2\right)dt = 9t - 3it^2 - \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1$

$$= 9 - 3i - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} - 3i\,.$$

(β) $\int_1^2 e^{-3it}dt = -\frac{1}{3i}e^{-3it}\Big|_1^2 = -\frac{1}{3i}\left(e^{-6i} - e^{-3i}\right).$

(γ) $\int_0^1 \frac{1}{t-e^{i\pi/3}}\,dt \;=\; \int_0^1 \frac{t-e^{-i\pi/3}}{\left|t-e^{i\pi/3}\right|^2}\,dt \;=\; \int_0^1 \frac{t-e^{-i\pi/3}}{t^2-t+1}\,dt$

$$= \int_0^1 \frac{t}{t^2-t+1}\,dt - e^{-i\pi/3}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t-1+1}{t^2-t+1}\,dt - e^{-i\pi/3}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt + \left(\frac{1}{2} - e^{-i\pi/3}\right)\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\left(t^2-t+1\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2} - e^{-i\pi/3}\right)\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= \left(\frac{1}{2} - e^{-i\pi/3}\right)\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt = i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt\,.$$

Αλλά:

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\omega^2+\frac{3}{4}}\,d\omega$$

$$= \frac{4}{3}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{2\omega}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,d\omega = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{\zeta^2+1}\,d\zeta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Τελικά: $\int_0^1 \frac{1}{t-e^{i\pi/3}}\,dt \;=\; i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{\pi i}{3}.$

3. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α) $\int_\gamma \bar{z}\,dz$, επί της καμπύλης $\gamma(t)=t^2+it$ από το $z=0$ έως το $z=4+2i$.

(β) $\int_\gamma |z|^2\,dz$ πάνω στην τεθλασμένη γραμμή με φορά $(2,0)\to(2,2)\to(0,2)$

(γ) $\int_\gamma z\left(\bar{z}+2\right)\,dz$, επί της καμπύλης $y=x^3-3x^2+4x-1$ από το σημείο $(1,1)$ στο $(2,3)$.

(δ) Υπολογίστε το $\oint_\gamma f(z)dz$, όπου $f(z)=\pi e^{\pi\bar{z}}$ και γ είναι η περίμετρος τετραγώνου με κορυφές τα σημεία $0,\ 1,\ 1+i,\ i$ με θετική φορά διαγραφής.

Λύση. (α) Παρατηρούμε ότι το $z=0$ είναι η εικόνα της καμπύλης γ στο $t=0$ ενώ το $z=4+2i$ είναι η εικόνα της καμπύλης γ στο $t=2$. Αρα:

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz=\int_0^2\overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt=\int_0^2\left(t^2-it\right)\left(2t+i\right)dt$$

$$=\int_0^2\left(2t^3+t\right)-it^2dt=\frac{t^4}{2}+\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^2-i\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^2=10-\frac{8i}{3}.$$

(β) Η παραμετροποίηση του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $z_0=(2,0)$ και $z_1=(2,2)=2+2i$ είναι

$$z = z_0 + t(z_1 - z_0) \Leftrightarrow z = 2 + t(2 + 2i - 2) \Leftrightarrow z = 2 + 2it,\ t \in [0,1].$$

Ομοίως η παραμετροποίηση του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $z_1 = (2,2) = 2 + 2i$ και $z_2 = (0,2) = 2i$ είναι

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \Leftrightarrow z = 2 + 2i + t(2i - 2 - 2i) \Leftrightarrow z = 2 + 2i - 2t,\ t \in [0,1].$$

Αρα:

$$\int_\gamma |z|^2\,dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2} |z|^2\,dz = \int_{\gamma_1} |z|^2\,dz + \int_{\gamma_2} |z|^2\,dz = \int_{\gamma_1} |\gamma_1(t)|^2\,\gamma_1'(t)\,dt + \int_{\gamma_2} |\gamma_2(t)|^2\,\gamma_2'(t)\,dt$$

$$= \int_{\gamma_1} |2 + 2it|^2 \cdot 2i\,dt + \int_{\gamma_2} |2 - 2t + 2i|^2 \cdot (-2)\,dt = 2i\int_0^1 (4 + 4t^2)\,dt - 2\int_0^1 \left((2-2t)^2 + 4\right)dt$$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{32i}{3}.$$

(γ) Μια προφανής παραμετροποίηση της καμπύλης $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ από το σημείο $(1,1)$ στο $(2,3)$ προκύπτει θέτοντας $x(t) = t$. Τότε $y(t) = t^3 - 3t^2 + 4t - 1$, οπότε παίρνουμε

$$\gamma(t) = t + i\left(t^3 - 3t^2 + 4t - 1\right),\ t \in [1,2]$$

και έχουμε

$$\int_\gamma z\left(\overline{z} + 2\right)\,dz = \int_1^2 \gamma(t)\left(\overline{\gamma(t)} + 2\right)\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_1^2 \left(t + i\left(t^3 - 3t^2 + 4t - 1\right)\right)\cdot\left(t - i\left(t^3 - 3t^2 + 4t - 1\right) + 2\right)\cdot\left(1 + i\left(3t^2 - 6t + 4\right)\right)dt$$

$$= \frac{149}{210} + \frac{i \cdot 241}{10}.$$

(δ) Η παραμετροποίηση του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $z_0 = (0,0)$ και $z_1 = (1,0) = 1$ είναι

$$\gamma_1(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \Leftrightarrow \gamma_1(t) = 0 + t(1 - 0) \Leftrightarrow \gamma_1(t) = t,\ t \in [0,1].$$

Ομοίως η παραμετροποίηση του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $z_1=(1,0)=1$ και $z_2=(1,i)=1+i$ είναι

$$\gamma_2(t)=z_1+t(z_2-z_1)\Leftrightarrow \gamma_2(t)=1+t(1+i-1)\Leftrightarrow \gamma_2(t)=1+it,\ t\in[0,1].$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει:

$$\gamma_3(t)=1+i-t,\ t\in[0,1] \text{ και } \gamma_4(t)=i-it,\ t\in[0,1].$$

Αρα

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz+\int_{\gamma_3} f(z)dz+\int_{\gamma_4} f(z)dz$$

$$=\int_0^1 \pi e^{\pi t}dt+\int_0^1 \pi e^{\pi(1-it)}idt+\int_0^1 \pi e^{\pi(1-i-t)}(-1)dt+\int_0^1 \pi e^{\pi(it-i)}(-i)dt$$

$$=e^{\pi t}\Big|_0^1-e^{\pi(1-it)}\Big|_0^1+e^{\pi(1-i-t)}\Big|_0^1-e^{\pi(ti-i)}\Big|_0^1=4\left(e^{\pi}-1\right).$$

4. Υπολογίστε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

(α) $2z^2+3z+2$, **(β)** $z\cdot e^{z^2+1}$, **(γ)** ze^{2z}, **(δ)** $z^2\eta\mu(4z)$.

Λύση. (α) Η συνάρτηση $f(z)=2z^2+3z+2$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ ως πολυωνυμική. Αρα:

$$F(z)=\int\left(2z^2+3z+2\right)dz=\frac{2z^3}{3}+\frac{3z^2}{2}+2z+c$$

είναι το σύνολο των αντιπαραγώγων της f σε κάθε απλά συνεκτικό τόπο. Γενικά αν f είναι ολόμορφη σε απλά συνεκτικό τόπο E τότε το σύνολο των αντιπαραγώγων της f είναι της μορφής $F(z)+c$ και η F υπολογίζεται όπως το αόριστο ολοκλήρωμα στις πραγματικές συναρτήσεις. Ετσι λοιπόν βρίσκουμε εύκολα ότι:

(β) $F(z)=\dfrac{e^{z^2+1}}{2}+c$, (διότι $F'(z)=f(z)$).

(γ) $\int ze^{2z}dz = \frac{1}{2}\int z\left(e^{2z}\right)' dz = \frac{1}{2}ze^{2z} - \frac{1}{2}\int (z)' e^{2z}dz = \frac{1}{2}ze^{2z} - \frac{1}{2}\int e^{2z}dz$

$$= \frac{1}{2}ze^{2z} - \frac{1}{4}e^{2z} + c.$$

Δηλαδή μπορούμε να εφαρμόσουμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση

$$\int f'(z)g(z)dz = f(z)g(z) - \int f(z)g'(z)dz$$

υπό την προϋπόθεση ότι οι f, g είναι ολόμορφες.

(δ) $\int z^2\eta\mu(4z)dz = -\frac{1}{4}\int z^2\left(\sigma\upsilon\nu(4z)\right)' dz = -\frac{1}{4}z^2\sigma\upsilon\nu(4z) + \frac{1}{2}\int z\sigma\upsilon\nu(4z)dz$

$$= -\frac{1}{4}z^2\sigma\upsilon\nu(4z) + \frac{1}{8}z\eta\mu(4z) - \frac{1}{8}\int \eta\mu(4z)dz$$

$$= -\frac{1}{4}z^2\sigma\upsilon\nu(4z) + \frac{1}{8}z\eta\mu(4z) + \frac{1}{32}\sigma\upsilon\nu(4z) + c.$$

5. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α) $\int_\gamma \left(z^2 + 3z\right)dz$, πάνω στην τεθλασμένη γραμμή $(2,0) \to (2,2) \to (0,2)$.

(β) $\int_\gamma \left(12z^2 - 4iz\right) dz$, διαμέσου της καμπύλης $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ από το σημείο $(1,1)$ στο $(2,3)$.

(γ) Υπολογίστε το $\oint_\gamma f(z)dz$, όπου $f(z) = \pi e^{\pi z}$ και γ είναι η περίμετρος τετραγώνου με κορυφές τα σημεία $0,\ 1,\ 1+i,\ i$ με τη θετική φορά διαγραφής.

Λύση. Σχόλιο. Η άσκηση θα μπορούσε να λυθεί με παραμετροποίηση καμπύλων όπως η λυμένη άσκηση 3 (βλέπε παραπάνω). Η διαφορά αυτής της άσκησης με την άσκηση 3 είναι ότι **τώρα όλες οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι ολόμορφες τουλάχιστον σε κάποιο απλά συνεκτικό τόπο που περιέχει τις καμπύλες πάνω στις οποίες ολοκληρώνουμε**. Επομένως σ' αυτήν την άσκηση έχουμε ένα επιπλέον ισχυρό εργαλείο (**το εργαλείο της αντιπαραγώγου**) που δεν είχαμε στην άσκηση 3 όπου **όλες οι**

προς ολοκλήρωση συναρτήσεις δεν είναι ολόμορφες (ελέγξτε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann). Αφού λοιπόν όλες οι συναρτήσεις στα (α), (β) και (γ) σ' αυτή την άσκηση είναι ολόμορφες τουλάχιστον σε απλά συνεκτικό τόπο που περιβάλλει τις καμπύλες πάνω στις οποίες ολοκληρώνουμε **υπάρχει μοναδική παράγουσα (με προσέγγιση σταθεράς)** <u>**και επιπρόσθετα η ολοκλήρωση είναι ανεξάρτητη του δρόμου και εξαρτάται μόνον από το αρχικό και τελικό σημείο**</u>). Αρα έχουμε:

(α) $\int_\gamma \left(z^2+3z\right)dz = \int_2^{2i}\left(z^2+3z\right)dz = \left.\frac{z^3}{3}+\frac{3z^2}{2}\right|_2^{2i} = -\frac{44}{3}-\frac{8i}{3}$.

(β) $\int_\gamma \left(12z^2-4iz\right)\,dz = \int_{1+i}^{2+3i}\left(12z^2-4iz\right)\,dz = \left.4z^3-2iz^2\right|_{1+i}^{2+3i} = -156+38i$.

(γ) $\oint_\gamma \pi e^{\pi z}\,dz = 0$, διότι η προς ολοκλήρωση καμπύλη είναι απλή και κλειστή.

6. Αν γ είναι το άνω μέρος του μοναδιαίου κύκλου δείξτε

$$\textbf{(α)}\ \left|\int_\gamma \frac{\eta\mu z}{z^2}dz\right| \le \frac{\pi\left(e+e^{-1}\right)}{2},\quad \textbf{(β)}\ \left|\int_\gamma \frac{dz}{4+3z}dz\right| \le \frac{3\pi}{5}.$$

Λύση. Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 4.1 (ε), δηλαδή $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M\cdot L$, όπου M είναι άνω φράγμα της f επί της καμπύλης γ και L είναι το μήκος της καμπύλης γ. Εχουμε:

(α) $\left|\frac{\eta\mu z}{z^2}\right| = \frac{|\eta\mu z|}{|z|^2} \overset{|z|=1}{=} |\eta\mu z| = \frac{1}{2}\left|e^{iz}-e^{-iz}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right|$

$$=\frac{1}{2}\left|e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}\right| = \left|i\cdot\eta\mu x\cdot\cosh y - \sigma\upsilon\nu x\cdot\sinh y\right|$$

$$=\sqrt{\eta\mu^2 x\cdot\cosh^2 y+\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sinh^2 y}$$

$$=\sqrt{\eta\mu^2 x\cdot\cosh^2 y+\left(1-\eta\mu^2 x\right)\cdot\sinh^2 y}$$

$= \sqrt{\sinh^2 y + \eta\mu^2 x} \le \sqrt{\sinh^2 y + 1} = \cosh(y) \le \cosh(1)$, διότι $|y| \le 1$.

Εφόσον το μήκος του ημικυκλίου είναι π έχουμε:

$$\left|\int_\gamma \frac{\eta\mu z}{z^2} dz\right| \le \cosh(1) \cdot \pi = \frac{\pi\left(e + e^{-1}\right)}{2}.$$

(β) $\left|\dfrac{1}{4+3z}\right| = \dfrac{1}{\left|4+3e^{it}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{25+24\sigma\upsilon\nu t}} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{24}{25}\sigma\upsilon\nu t}}$. Αλλά:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{24}{25}\sigma\upsilon\nu t}} \le \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi/2] \\ 5 & t \in [\pi/2, \pi] \end{cases},$$

συνεπώς $\left|\int_\gamma \dfrac{dz}{4+3z} dz\right| \le \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\pi}{2} + 1 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{5}$.

7. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α) $\oint_\gamma \dfrac{e^z}{z} dz$, **(β)** $\oint_\gamma \dfrac{\cosh(z)}{z-2} dz$, **(γ)** $\oint_\gamma \dfrac{\eta\mu z}{(z-\pi/4)^3} dz$, **(δ)** $\oint_\gamma \dfrac{e^{iz}}{z^2} dz$,

επί του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ με τη θετική φορά.

Λύση. Σχόλιο. Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις **(α)-(δ) η προς ολοκλήρωση συνάρτηση δεν είναι ολόμορφη παντού στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης πάνω στην οποία ολοκληρώνουμε.** Αρα οι δυνατότητες επίλυσης είναι οι εξής:

(1) μέσω ορισμού επικαμπυλίου ολοκληρώματος ή

(2) με χρήση του ολοκληρωτικού τύπου Cauchy (βλέπε Θεωρήματα 4.6 και 4.7) που είναι ένα πολύ χρήσιμο και πρακτικό εργαλείο.

(3) Επιπλέον έχουμε και το εργαλείο της παράγουσας. Σημειώνουμε ότι η χρήση παράγουσας σε μη απλά συνεκτικό τόπο θέλει προσοχή διότι αν η συνάρτησή μας είναι ολόμορφη σε πολλαπλά συνεκτικό τόπο τότε μπορεί να μην έχει μονότιμα ορισμένη παράγουσα.

(α) Χρησιμοποιούμε το ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy. Ορίζουμε $f(z)=e^z$ και θεωρούμε $z_0=0$. Προφανώς η f είναι ολόμορφη πάνω και εντός του μοναδιαίου κύκλου ο οποίος περιέχει το $z_0=0$, άρα από τον τύπο του Cauchy έχουμε $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$. Ετσι λοιπόν:

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z}dz=\oint_\gamma \frac{e^z}{z-0}dz=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\cdot e^0=2\pi i.$$

(β) $\oint_\gamma \dfrac{\cosh(z)}{z-2}dz=0$, διότι η συνάρτηση $g(z)=\dfrac{\cosh z}{z-2}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}-\{2\}$. Συνεπώς η g είναι ολόμορφη πάνω και εντός του μοναδιαίου κύκλου (διότι το $z_0=2$ δεν βρίσκεται εντός αλλά εκτός του μοναδιαίου κύκλου).

(γ) Ορίζουμε $f(z)=\eta\mu z$ και θεωρούμε $z_0=\pi/4$. Προφανώς η f είναι ολόμορφη πάνω και εντός του μοναδιαίου κύκλου ο οποίος περιέχει το $z_0=\pi/4$, άρα από τον τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Θέτουμε $n=2$ και εφόσον $f''(z_0)=-\eta\mu(\pi/4)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ παίρνουμε

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\eta\mu z}{(z-z_0)^3}dz$$

$$\Leftrightarrow \oint_\gamma \frac{\eta\mu z}{(z-z_0)^3}dz=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

(δ) Χρησιμοποιούμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους με $f(z)=e^{iz}$, $z_0=0$ και $n=1$. Προφανώς η f είναι ολόμορφη πάνω και εντός του μοναδιαίου κύκλου ο οποίος περιέχει το $z_0 = 0$ και εφόσον $f'(z_0) = ie^{i\cdot 0} = i$ παίρνουμε

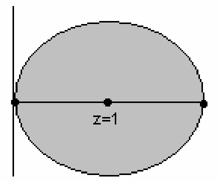
$$f'(0) = \frac{1!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^2}dz \Leftrightarrow i = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}dz \Leftrightarrow \oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}dz = -2\pi .$$

8. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz$, όπου

(α) γ είναι ο κύκλος $|z-1| = 1$ με τη θετική φορά.

(β) γ είναι ο κύκλος $|z| = 3$ με τη θετική φορά.

Λύση. (α) $\oint_\gamma \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz = \oint_\gamma \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)^2}dz$. Από το σχήμα έχουμε:



Ορίζουμε $f(z) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z+1)^2}$. Τότε η f είναι ολόμορφη πάνω και εντός του κύκλου γ, οπότε απ' τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους με $z_0 = 1$ και $n = 1$ έχουμε:

$$\oint_\gamma \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz = \oint_\gamma \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)^2}dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz = 2\pi i \cdot f'(1).$$

Εφόσον $f'(z) = \frac{-\pi\eta\mu(\pi z)(z+1)^2 - 2(z+1)\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z+1)^4}$ για $z_0 = 1$ παίρνουμε

$$\oint_\gamma \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}.$$

(β) Σ′ αυτή την περίπτωση από το γενικευμένο Θεώρημα Cauchy (Θεώρημα 4.5 σελ. 101) έχουμε:

$$\oint_{\gamma} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz$$

όπου οι γ_1, γ_2 είναι οποιεσδήποτε απλές κλειστές θετικά προσανατολισμένες καμπύλες στο εσωτερικό των οποίων βρίσκονται τα σημεία $z_0=-1$ και $z_0=+1$ αντιστοίχως έτσι ώστε οι γ_1,γ_2 να μην τέμνονται μεταξύ τους και να βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου γ. Στο εσωτερικό της γ_1 η συνάρτηση $g(z)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z-1)^2}$ είναι ολόμορφη, συνεπώς από τον τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz = 2\pi i\cdot g'(-1) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-\pi i}{2} \Leftrightarrow \oint_{\gamma_1} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz = \frac{\pi i}{2}.$$

Ομοίως πάνω και στο εσωτερικό της γ_2 η συνάρτηση $h(z)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z+1)^2}$ είναι ολόμορφη, συνεπώς εργαζόμενοι όπως παραπάνω έχουμε

$$\oint_{\gamma_2} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz = 2\pi i\cdot h'(1) = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi i}{2} \Leftrightarrow \oint_{\gamma_2} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz = -\frac{\pi i}{2}.$$

Τελικά $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$.

9. Αν f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό μιας απλής κλειστής θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ και αν z_0 είναι απλή ρίζα f στο εσωτερικό της γ δείξτε ότι

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz.$$

Λύση. Εφόσον z_0 είναι απλή ρίζα f μπορούμε να γράψουμε $f(z)=(z-z_0)h(z)$, όπου $h(z)$ είναι ολόμορφη με $h(z_0)\neq 0$. Τότε έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{zf'(z)}{(z-z_0)h(z)}dz=\frac{z_0 f'(z_0)}{h(z_0)}$$

λόγω της ισχύος του ολοκληρωτικού τύπου Cauchy. Εφόσον

$$f'(z)=h(z)+(z-z_0)h'(z)\Leftrightarrow f'(z_0)=h(z_0)$$

προκύπτει το ζητούμενο.

10. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\cosh(\eta\mu\theta)d\theta=2\pi .$$

Λύση. Εστω $f(z)=\sigma\upsilon\nu z$ και $z_0=0$. Τότε η f είναι ολόμορφη στον κλειστό δίσκο $\overline{D}_1(0)=\{z:|z|\leq 1\}$ και από το Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\left(z_0+e^{i\theta}\right)d\theta\overset{z_0=0}{\Leftrightarrow}\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\left(e^{i\theta}\right)d\theta=2\pi$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)d\theta=2\pi$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{2\pi}\left(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(i\eta\mu\theta)-\eta\mu(\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu(i\eta\mu\theta)\right)d\theta=2\pi$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{2\pi}\left(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\cosh(\eta\mu\theta)-i\cdot\eta\mu(\sigma\upsilon\nu\theta)\sinh(\eta\mu\theta)\right)d\theta=2\pi .$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη παίρνουμε το ζητούμενο.

11. Αν η συνάρτηση f είναι ακεραία και αν $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=0$ δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}$: $g(z)=\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}$. Η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}-\{0\}$ και επεκτείνεται συνεχώς στο $\mathbb{C}$ διότι $\lim\limits_{z\to 0} g(z)=f'(0)$. Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο $z=0$ διότι $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{g(z)-g(0)}{z-0}=f''(0)$, άρα είναι ακεραία. Εφόσον $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z}=0$ προφανώς θα ισχύει και $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$ οπότε υπάρχει $R>0$ έτσι ώστε για κάθε $|z|>R$ έχουμε $|g(z)|<1$. Επιπρόσθετα η g είναι φραγμένη στον κλειστό δίσκο $|z|\le R$ ως συνεχής. Συνεπώς η g είναι ακεραία και φραγμένη στο $\mathbb{C}$, άρα από το Θεώρημα Liouville (βλέπε Πόρισμα 4.4) η g είναι σταθερά. Αρα

$$g(z)=\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=c\Rightarrow \lim_{z\to\infty}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=c\Rightarrow c=0,$$

δηλαδή $f(z)=f(0)$.

12. Αν η συνάρτηση f είναι ακεραία και αν $|f(z)|\le M$ για κάθε $z:|z|=R$, δείξτε ότι $\left|f^{(k)}\left(re^{i\theta}\right)\right|\le\dfrac{Mk!}{(R-r)^k}$ για κάθε $0<r\le R$.

Λύση. Εστω $z_0=re^{i\theta}$ έτσι ώστε $\gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=R-r\}$. Τότε $\gamma\subset\{z:|z|\le R\}$ οπότε από την αρχή μεγίστου θα πρέπει να ισχύει $|f(z)|\le M$ για κάθε z στον κλειστό δίσκο $|z|\le R$. Με εφαρμογή της ανισότητας του Cauchy παίρνουμε το ζητούμενο $\left|f^{(k)}\left(re^{i\theta}\right)\right|\le\dfrac{M\cdot k!}{(R-r)^k}$.

13. Αν για μια ακεραία συνάρτηση h και για κάθε $|z|<1$ ισχύει $|zh(z)|\le M$, δείξτε ότι $|h(z)|\le M$ για κάθε $|z|<1$.

Λύση. Η συνάρτηση $zh(z)$ είναι συνεχής στον κλειστό δίσκο $|z|\le 1$ και πάνω στο δίσκο προφανώς ισχύει $|zh(z)|\le M\overset{|z|=1}{\Rightarrow}|h(z)|\le M$. Αρα από την αρχή του μεγίστου θα πρέπει να ισχύει $|h(z)|\le M$ για κάθε $|z|<1$.

14. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $|f|$ επί του χωρίου $A=\{x+iy:|x|\leq 1,\ |y|\leq 1\}$ αν $f(z)=z^2$.

Λύση. Προφανώς $|f|=|z|^2=x^2+y^2$. Από την αρχή μεγίστου η $|f|$ παίρνει μέγιστη τιμή επί του συνόρου του χωρίου A. Το A είναι τετράγωνο με πλευρές τις ευθείες $x=\pm 1,\ y=\pm 1$. Εχουμε λοιπόν

- Για $x=1$: $|f|(1,y)=1+y^2$ η οποία έχει μέγιστη τιμή για $y=\pm 1$.
- Για $y=1$: $|f|(x,1)=x^2+1$ η οποία έχει μέγιστη τιμή για $x=\pm 1$.
- Για $x=-1$: $|f|(-1,y)=1+y^2$ η οποία έχει μέγιστη τιμή για $y=\pm 1$.
- Για $y=1$: $|f|(x,-1)=x^2+1$ η οποία έχει μέγιστη τιμή για $x=\pm 1$.

Αρα η $|f|$ παίρνει μέγιστη τιμή στα σημεία $\pm 1\pm i$ με τιμή 2.

15. Αν f είναι μια ακεραία συνάρτηση έτσι ώστε $|f(z)|\geq 5$ για κάθε $|z|=2$ και $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$ δείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο δίσκο $|z|<2$.

Λύση. Αν η f δεν είχε ρίζα στο δίσκο $|z|<2$ τότε θα ίσχυε η αρχή ελαχίστου δηλαδή θα έπρεπε η $|f|$ να έχει ελάχιστη τιμή πάνω στον κύκλο $|z|=2$, άτοπο διότι $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$ ενώ $|f(z)|\geq 5$ για κάθε $|z|=2$ λόγω υπόθεσης. Αρα η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο δίσκο $|z|<2$.

Αλυτες ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(α) $\int_0^{2\pi}\left(\frac{t}{t^2+1}+i\cdot(\sigma\upsilon\nu t-it)^2\right)dt$, **(β)** $\int_0^{2\pi}(2t+1)e^{-3i(t^2+t)}dt$,

(γ) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t-e^{i\pi/4}}}dt,\ \left(\sqrt{1}=1\right)$, **(δ)** $\int_0^1 Log(2+it)dt$.

Απάντ. (α) $\frac{1}{2}\ell n\left(1+4\pi^2\right)+i\left(\pi-\frac{8\pi^3}{3}\right)$, **(β)** $-\frac{i}{3}\left(1-e^{-12i\pi^2}\right)$,

(γ) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}e^{-i\theta/2}-2e^{\frac{3\pi i}{8}}$, $\left(\varepsilon\phi\theta=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$,

(δ) $\left(\frac{1}{2}\ell n(5)+2\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)+i\left(-\ell n(5)+\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{1}{2}\right)+2Log(2)\right)$

2. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α) $\oint_\gamma z\bar{z}\,dz$, διαμέσου της περιμέτρου τετραγώνου με κορυφές $0,\ 1,\ 1+i,\ i$ με θετική φορά διαγραφής.

(β) $\int_\gamma e^{i\bar{z}}dz$, κατά μήκος της ευθείας $y=3x$ από το σημείο $(0,0)$ στο σημείο $(1,3)$.

(γ) $\int_\gamma f(z)\,dz$, διαμέσου της καμπύλης $y=x^3$ από το σημείο $-1-i$ στο σημείο $1+i$, όπου $f(x+iy)=\begin{cases}1, & y<0\\ 4y & y>0\end{cases}$.

Απάντ. (α) $-1+i$, **(β)** $\frac{3+9i}{10}\left(1-e^{9+3i}\right)$, **(γ)** $2+3i$.

3. Υπολογίστε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

(α) $(z+2)e^{2z}$, **(β)** $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, **(γ)** $\sinh(3z)$, **(δ)** $\frac{1}{(z+3)^2}$.

Απάντ. (α) $\frac{(2z+3)e^{2z}}{4}+c$, **(β)** $Arc\sin(z)$ **(**στο $\mathbb{C}-\{x+iy:\ |x|\geq 1,\ y=0\}$ υπό την προϋπόθεση ότι έχουμε επιλέξει συγκεκριμένο κλάδο της ρίζας**)** ,
(γ) $\frac{1}{3}\cosh(3z)$, **(δ)** $-\frac{1}{z+3}$ **(**στο $\mathbb{C}-\{-3\}$**)**.

4. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α) $\int_\gamma \left(5z^4 + 3\sinh(z)\right)dz$, πάνω στην τεθλασμένη γραμμή με φορά $(0,0) \to (1,1) \to (3,2)$.

(β) Υπολογίστε το $\int_\gamma \frac{1}{z+2}dz$, όπου γ είναι η περίμετρος ρόμβου με κορυφές τα σημεία $\pm 1,\ \pm i$ και θετική φορά διαγραφής.

Απάντ. (α) $(3+2i)^5 + 3\cosh(3+2i)$, **(β)** 0 .

5. Αν γ είναι το πάνω μέρος του μοναδιαίου κύκλου (με τη θετική φορά) δείξτε ότι $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \le \pi e$.

6. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α) $\int_{|z-2|=5} \frac{dz}{z-3}$, **(β)** $\int_{|z-1|=4} \frac{e^{3z}}{z-\pi i}dz$, **(γ)** $\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^4}dz$,

(δ) $\int_{|z|=1} \frac{\eta\mu^6 z}{(z-\pi/6)^3}dz$, **(ε)** $\int_{|z-2|+|z+2|=6} \frac{e^{3z}}{z-\pi i}dz$.

Ολες οι καμπύλες διαγράφονται με τη θετική φορά.

Απάντ. (α) $2\pi i$, **(β)** $-2\pi i$, **(γ)** $\pi/3$, **(δ)** $21\pi i/16$, **(ε)** 0.

7. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz \ (t>0)$, όπου γ είναι ο κύκλος $|z| = 3$ με τη θετική φορά. **Απάντ.** $2\pi i \eta\mu t$.

8. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi z)}{z^2-1}dz$ γύρω απ' το ορθογώνιο με πλευρές $\pm 2 \pm i$. **Απάντ.** 0.

9. Εστω $P(z)=az+b,\ (a,b\in\mathbb{C})$. Αν ισχύει $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{P(z)}{z}dz=2$ και $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{P(z)}{z-\iota}dz=3i$, όπου γ είναι ο κύκλος $|z-i|=2$ υπολογίστε τις τιμές των a,b. **Απάντ.** $a=3+2i,\ b=2$.

10. Αν f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό μιας απλής κλειστής και τμηματικά λείας καμπύλης γ με τη θετική φορά και αν z_0 είναι σημείο που δεν ανήκει πάνω στην καμπύλη γ δείξτε ότι $n!\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\oint_{\gamma}\frac{f^{(n)}(z)}{z-z_0}dz$.

11. Αν f είναι ολόμορφη στο δίσκο $|z|<R_1$ και αν $|a|<R<R_1$ δείξτε ότι

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\left(R^2-|a|^2\right)f(z)}{(z-a)\left(R^2-\overline{a}z\right)}dz,$$

όπου γ είναι ο κύκλος $|z|=R$ (με τη θετική φορά).

12. Επαληθεύστε το Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss για τη συνάρτηση

$$f(z)=2-3z-2z^2$$

στον κλειστό δίσκο $D_{\rho}(2)=\{z:|z-2|\leq\rho\}$.

13. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi}\eta\mu(\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\sinh(\eta\mu\theta)\,d\theta=0.$$

14. Υπολογίστε το $\int_0^{2\pi}\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε κατάλληλα το Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss. **Απάντ.** $\pi/2$.

15. Βρείτε τα σημεία όπου η συνάρτηση $|z+1|^2$ παίρνει μέγιστη τιμή πάνω και στο εσωτερικό τριγώνου με κορυφές τα σημεία $0,\ 2,\ i$. **Απάντ.** $z=2$.

16. Βρείτε τα σημεία όπου η συνάρτηση $\left|z^2-3z+2\right|$ παίρνει μέγιστη τιμή πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=1$.

Υπόδειξη: Γράψτε $z^2-3z+2=(z-1)(z-2)$. **Απάντ.** $z=-1$.

17. (Θεμελιώδες θεώρημα άλγεβρας) Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{C}$. Στη συνέχεια δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο $n-$βαθμού έχει ακριβώς $n-$ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ότι το πολυώνυμο $P(z)=a_0+...+a_nz^n$ δεν έχει ρίζες. Τότε η $\dfrac{1}{P(z)}$ είναι ακεραία και $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{P(z)}=0$. Στη συνέχεια εργασθείτε όπως στη λυμένη άσκηση 11 για να καταλήξετε σε άτοπο. Για το δεύτερο σκέλος γράψτε $P(z)=(z-z_0)Q(z)$ όπου Q πολυώνυμο $n-1$ βαθμού.

18. Αν f ακεραία και $\mathrm{Re}(f)\le M$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ δείξτε ότι $\mathrm{Re}(f)$ είναι σταθερή στο επίπεδο.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Liouville για τη συνάρτηση $e^{f(z)}$.

19. Αν f ακεραία και $|f(z)|\le A|z|$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$ όπου A είναι θετική σταθερά δείξτε ότι $f(z)=c\cdot z,\ c\in\mathbb{R}$.