ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.1. Ορισμοί-Ιδιότητες

Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μία ***φραγμένη*** συνάρτηση πάνω σε ***κλειστό ορθογώνιο χωρίο***

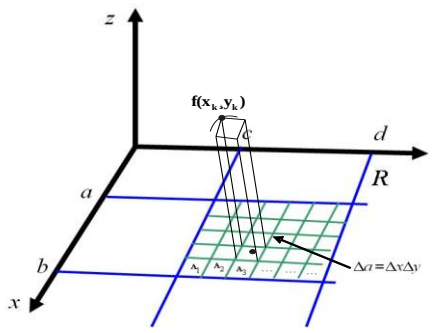
$$R = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

Εστω $\Delta = (\Delta_x, \Delta_y)$ είναι μια διαμέριση του ορθογωνίου R, όπου Δ_x και Δ_y είναι διαμερίσεις των κλειστών διαστημάτων $[\alpha,b]$ και $[c,d]$ της μορφής

$$\Delta_x = \{a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b\},\quad \Delta_y = \{c = y_1 < y_2 < \ldots < y_M = d\}.$$

Ας ορίσουμε ένα ***δίκτυο*** γραμμών $x = x_n,\ y = y_k$ ($n = 1,\ldots,N$, $k = 1,\ldots,M$) παράλληλων προς τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντιστοίχως που διαμερίζουν την ορθογώνια περιοχή R σε $N \cdot M$ το πλήθος ορθογώνια $\Omega_{n,k}$ (ξένα μεταξύ τους ανά δύο) εμβαδού

$$E_{n,k} = (x_{n+1} - x_n)(y_{k+1} - y_k) = dx_n dy_k,\ \ n = 1,\ldots,N-1,\ k = 1,\ldots,M-1.$$



Αν

$$M_{n,k} = \sup\{ f(x,y) : (x,y) \in \Omega_{n,k} \}$$

και

$$m_{n,k} = \inf\{ f(x,y) : (x,y) \in \Omega_{n,k} \},$$

ορίζουμε

$$L_f = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{M-1}\left(m_{n,k}\cdot E_{n,k}\right) : \ \Delta \text{ οποιαδήποτε διαμέριση της } R \right\}$$

και

$$U_f = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{M-1}\left(M_{n,k}\cdot E_{n,k}\right) : \Delta \text{ οποιαδήποτε διαμέριση της } R \right\}.$$

Οι αριθμοί U_f και L_f υπάρχουν πάντα και καλούνται ανώτερο και κατώτερο ολοκλήρωμα *Darboux* της f στο R. Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο

Ορισμός 4.1 Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση πάνω σε ορθογώνιο R όπως παραπάνω. Εστω U_f και L_f είναι το ανώτερο και κατώτερο ολοκλήρωμα *Darboux* της f στο R. Αν

$$L_f = U_f = \lambda \in \mathbb{R},$$

τότε λέμε ότι η f είναι ***ολοκληρώσιμη*** στο ορθογώνιο R και γράφουμε

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα λέμε ότι υπάρχει το διπλό ολοκλήρωμα της f στο R.

Πολλές φορές χρησιμοποιείται και ο ακόλουθος ισοδύναμος ορισμός ***(Riemann):***

Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση πάνω σε ορθογώνιο R, Δ είναι μια τυχαία διαμέριση του R σε στοιχειώδη ορθογώνια $\Omega_{n,k}$ και $\left(\tilde{x}_n, \tilde{y}_k\right)$ είναι οποιοδήποτε σημείο στο $\Omega_{n,k}$. Εστω

$$\delta_{n,k} = \sqrt{\left(x_{n+1} - x_n\right)^2 + \left(y_{k+1} - y_k\right)^2}$$

και

$$|\Delta| = \max\left\{ \delta_{n,k} : n = 1,\ldots,N-1,\ k = 1,\ldots,M-1 \right\}$$

είναι το μέγιστο **πλάτος** της διαμέρισης Δ. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{M-1}\left(f\left(\tilde{x}_n, \tilde{y}_k\right)\cdot E_{n,k}\right) = \lambda \in \mathbb{R}$$

ανεξάρτητα της επιλογής των σημείων $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_k)$ και της επιλογής της διαμέρισης Δ με πλάτος το πολύ ίσο με δ, τότε λέμε ότι η f είναι ***Riemann ολοκληρώσιμη*** στο ορθογώνιο R και γράφουμε

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \lambda .$$

Θεώρημα 4.1 Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση πάνω σε κλειστό ορθογώνιο χωρίο R. Αν η f είναι συνεχής στο R εκτός (ενδεχομένως) από ένα υποσύνολο $\Pi \subset R$ ***αμελητέου εμβαδού*** (δηλαδή το Π μπορεί να είναι μια τμηματικά λεία καμπύλη, ή ένωση πεπερασμένου πλήθους τμηματικά λείων καμπύλων, ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων), τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann για συναρτήσεις δύο μεταβλητών επεκτείνεται και σε μη ορθογώνια χωρία ως εξής:

Εστω $f : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση πάνω σε ***κλειστό*** και ***φραγμένο χωρίο*** T ***με το σύνορο αυτού*** ∂T ***να είναι ένα σύνολο αμελητέου εμβαδού***. Τότε υπάρχει ορθογώνιο R που καλύπτει εξ ολοκλήρου το T. Ορίζουμε την ***επέκταση*** της f στο R ως εξής:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in T \\ 0, & (x,y) \in R \setminus T \end{cases}. \qquad (1)$$

Αν η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο R, ορίζουμε

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

και αποδεικνύεται ότι η τιμή $\iint_R g(x,y)\,dxdy$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του ορθογωνίου R που καλύπτει το T. Ετσι μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο

Ορισμός 4.2 Θα λέμε ότι μια φραγμένη συνάρτηση $f : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη πάνω σε κλειστό και φραγμένο χωρίο T με σύνορο ∂T αμελητέου εμβαδού, αν η επέκταση g της f όπως στην (1) είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann πάνω σε ένα (άρα λόγω της παραπάνω σημείωσης και σε κάθε) ορθογώνιο χωρίο R που καλύπτει το T.

Ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος

Εστω $f,g:T\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις πάνω σε κλειστό και φραγμένο χωρίο T με το σύνορό του ∂T να είναι σύνολο αμελητέου εμβαδού. Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τις κάτωθι ιδιότητες:

- Η συνάρτηση $k\cdot f+\lambda\cdot g$ $(k,\lambda\in\mathbb{R})$ είναι ολοκληρώσιμη στο T και ισχύει

$$\iint_T (k\cdot f+\lambda\cdot g)(x,y)dxdy = k\cdot\iint_T f(x,y)dxdy+\lambda\cdot\iint_T g(x,y)dxdy.$$

- Οι συναρτήσεις $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ και $\sqrt{f}$ είναι ολοκληρώσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Επίσης, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο T και αν η $g:f(T)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $f(T)$, τότε και η $g\circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο T.

- Η συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο T και ισχύει

$$\left|\iint_T f(x,y)dxdy\right|\le\iint_T |f(x,y)|dxdy.$$

- Αν $f(x,y)\ge g(x,y)$ $\forall(x,y)\in T$, τότε ισχύει

$$\iint_T f(x,y)dxdy\ge\iint_T g(x,y)dxdy.$$

- Αν $T=T_1\cup T_2$ και $T_1\cap T_2=\varnothing$ (ή αν το $T_1\cap T_2$ είναι σύνολο αμελητέου εμβαδού), τότε

$$\iint_T f(x,y)dxdy=\iint_{T_1} f(x,y)dxdy+\iint_{T_2} f(x,y)dxdy.$$

Αν $T_1\cap T_2\ne\varnothing$, τότε έχουμε

$$\iint_T f(x,y)dxdy=\iint_{T_1} f(x,y)dxdy+\iint_{T_2} f(x,y)dxdy-\iint_{T_1\cap T_2} f(x,y)dxdy.$$

- Αν T είναι σύνολο αμελητέου εμβαδού, τότε $\iint_T f(x,y)dxdy = 0$.

- Αν $m \le f(x,y) \le M$, τότε

$$m \cdot E(T) \le \iint_T f(x,y)dxdy \le M \cdot E(T),$$

όπου $E(T)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου T.

Θεώρημα 4.2 (Μέσης Τιμής) Εστω $f, g : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις πάνω σε κλειστό και φραγμένο χωρίο T με σύνορο ∂T αμελητέου εμβαδού και έστω ότι η g είναι μη αρνητική συνάρτηση στο T. Τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός μ: $\inf_T f \le \mu \le \sup_T f$ έτσι ώστε

$$\iint_T (f \cdot g)(x,y)dxdy = \mu \cdot \iint_T g(x,y)dxdy .$$

Επιπλέον, αν η f είναι συνεχής στο T και το T είναι και συνεκτικό, τότε υπάρχει $P^* \in T$ έτσι ώστε $\mu = f(P^*)$ κι έτσι η παραπάνω ισότητα γράφεται ως εξής

$$\iint_T (f \cdot g)(x,y)dxdy = f\left(P^*\right) \cdot \iint_T g(x,y)dxdy .$$

4.2. Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος

<u>Α. Πάνω σε ορθογώνιο χωρίο</u>

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος πάνω σε ορθογώνιο χωρίο ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.3 (Fubini) Εστω $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια ***συνεχής*** συνάρτηση πάνω στο ορθογώνιο

$$R = \left\{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\right\}.$$

Τότε, οι συναρτήσεις

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)dy \text{ και } h(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

είναι συνεχείς στα διαστήματα *[a,b]* και *[c,d]* αντιστοίχως και ισχύει

$$\iint_R f\left(x,y\right)dxdy = \int_a^b g(x)dx = \int_c^d h(y)dy\,,$$

ή ισοδύναμα:

$$\iint_R f\left(x,y\right)dxdy = \int_c^d\left(\int_a^b f\left(x,y\right)dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f\left(x,y\right)dy\right)dx\,.$$

Απόδειξη. Αν η f είναι συνεχής στο ορθογώνιο *R*, είναι εύκολο να δείξουμε ότι οι $g(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ και $h(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ είναι συνεχείς στα διαστήματα *[a,b]* και *[c,d]* αντιστοίχως.

Εστω $\Delta=\left(\Delta_x,\Delta_y\right)$ είναι διαμέριση του R και $\xi_n\in\left[x_n,x_{n+1}\right)$, $n=0,...,N-1$. Τότε

$$g(\xi_n)=\int_a^d f(\xi_n,y)dy=\sum_{k=1}^{M-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_n,y)dy$$

συνεπώς

$$m_{n,k}\left(y_{k+1}-y_k\right)\le g(\xi_n)\le M_{n,k}\left(y_{k+1}-y_k\right),$$

όπου $m_{n,k}$ και $M_{n,k}$ όπως ορίσθηκαν στην αρχή του Κεφαλαίου. Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann έχουμε:

$$\int_a^b g(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\sum_{n=1}^{N-1} g\left(\xi_n\right)\left(x_{n+1}-x_n\right).$$

Εφόσον

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{M-1} m_{n,k}\left(x_{n+1}-x_n\right)\left(y_{k+1}-y_k\right)\le\sum_{n=1}^{N-1} g\left(\xi_n\right)\left(x_{n+1}-x_n\right)\le\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{M-1} M_{n,k}\left(x_{n+1}-x_n\right)\left(y_{k+1}-y_k\right)$$

και εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη, από θεώρημα παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{n=1}^{N-1} g\left(\xi_n\right)\left(x_{n+1}-x_n\right)=\iint_R f\left(x,y\right)dxdy\,.$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $\iint_R f\left(x,y\right)dxdy=\int_c^d h(y)dy$. □

Παρατήρηση. Το Θεώρημα 4.3 μας λέει ότι τα διπλά ολοκληρώματα ***πάνω σε ορθογώνια χωρία*** μπορούν να υπολογισθούν ως διαδοχικά ολοκληρώματα. Αυτό σημαίνει ότι ένα διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί ολοκληρώνοντας ως προς μία μεταβλητή κάθε φορά (κρατώντας την άλλη ως σταθερή) και χρησιμοποιώντας όλες τις τεχνικές ολοκλήρωσης που είναι γνωστές για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Β. Πάνω σε μη ορθογώνιο χωρίο

Ορισμός 4.3 Εστω T είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ το σύνορο του οποίου έχει αμελητέο εμβαδόν. Το χωρίο T καλείται ***κανονικό ως προς y***, εάν

(α) το εσωτερικό του T είναι ένα μη κενό συνεκτικό σύνολο και

(β) κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των y η οποία διέρχεται μέσω του εσωτερικού του χωρίου T έχει μόνον δυο κοινά σημεία με το σύνορο του Τ.

Με όμοιο τρόπο ορίζουμε το T να είναι ***κανονικό ως προς x***. Αν το T είναι κανονικό και ως προς x και ως προς y θα λέμε απλά ότι το T είναι ***κανονικό*** σύνολο.

Θεώρημα 4.4 Έστω $f : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια ***συνεχής*** συνάρτηση πάνω σε ***κλειστό και φραγμένο*** χωρίο T με σύνορο ∂T αμελητέου εμβαδού.

(i) Αν το T είναι κανονικό ως προς y χωρίο της μορφής

$$T = \left\{ (x,y) : a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \right\},$$

όπου οι f_1, f_2 είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο $[a,b]$, τότε:

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

(ii) Αν το T είναι κανονικό ως προς x χωρίο της μορφής

$$T = \left\{ (x,y) : c \le y \le d,\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \right\},$$

όπου οι g_1, g_2 είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο $[c,d]$, τότε:

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy .$$

(iii) Αν το T είναι κανονικό χωρίο και μπορεί να εκφρασθεί είτε μέσω της μορφής **(i)** είτε μέσω της μορφής **(ii)**, τότε

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy .$$

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει (από τον Ορισμό 4.2) ότι

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \iint_R g(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d g(x,y)\,dydx ,$$

όπου g είναι η επέκταση της f. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3. □

Σημείωση. Το δυσκολότερο μέρος υπολογισμού ενός διπλού ολοκληρώματος πάνω σε φραγμένο μη ορθογώνιο χωρίο, είναι η εύρεση των ορίων ολοκλήρωσης. Η μεθοδολογία προκύπτει από το Θεώρημα 4.4:

- Αν το χωρίο μας δεν είναι κανονικό ούτε ως προς x ούτε ως προς y, προσπαθούμε να το εκφράσουμε ως ένωση κανονικών χωρίων ξένων μεταξύ τους ανά δύο. Στη συνέχεια εργαζόμαστε σε κάθε κανονικό χωρίο ξεχωριστά.

Έστω *T* είναι χωρίο κανονικό ως προς *y*. Τότε:

- Παίρνουμε τυχαία ευθεία L παράλληλη με τον άξονα $y'y$ (ή κάθετη στον άξονα $x'x$) που διέρχεται από το εσωτερικό του χωρίου T με φορά προς τη διεύθυνση αύξησης των y.

- Ολοκληρώνουμε την f ως προς y από την τιμή της καμπύλης $y=f_1(x)$ όπου η ευθεία L εισέρχεται στο χωρίο T ως την τιμή της καμπύλης $y= f_2(x)$ όπου η ευθεία L εξέρχεται από το χωρίο T.

- Τα όρια του x προκύπτουν από την προβολή του χωρίου T στον άξονα $x'x$.

Με παρόμοιο τρόπο εργαζόμαστε για την περίπτωση που το χωρίο T είναι κανονικό ως προς x.

Εφαρμογές του διπλού ολοκληρώματος

(α) **<u>Ογκος στερεού</u>**. Εστω $f:T\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση πάνω σε κλειστό και φραγμένο χωρίο T με σύνορο αμελητέου εμβαδού. Αν $f(x,y)\geq 0\ \ \forall(x,y)\in T$ τότε

$$V=\iint_T f(x,y)dxdy,$$

όπου V είναι ο ***όγκος*** του στερεού που φράσσεται από την επιφάνεια $z = f(x,y)$, το επίπεδο Oxy και από την κυλινδρική επιφάνεια που έχει οδηγό το σύνορο ∂T και γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα $z'z$.

Αν $f(x,y)\geq g(x,y)\ \ \forall(x,y)\in T$, τότε

$$V=\iint_T (f(x,y)-g(x,y))dxdy,$$

όπου V είναι ο ***όγκος*** του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες $z=g(x,y)$ και $h=f(x,y)$ και από την κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό το σύνορο ∂T και γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα $z'z$.

(β) **<u>Εμβαδόν χωρίου.</u>** Εστω Ω είναι ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο με σύνορο $\partial\Omega$ αμελητέου εμβαδού. Τότε το ***εμβαδό*** του Ω δίνεται από τον τύπο:

$$E(\Omega)=\iint_T 1dxdy.$$

(γ) **<u>Μάζα.</u>** Εστω $\rho:T\subset\mathbb{R}^2\to(0,+\infty)$ παριστάνει την πυκνότητα μάζας που κατανέμεται με συνεχή τρόπο επί ενός επίπεδου τμήματος T. Τότε το διπλό ολοκλήρωμα

$$M=\iint_T \rho(x,y)dxdy$$

ισούται με τη συνολική ***μάζα*** που κατανέμεται επί του T. Επιπλέον το κέντρο βάρους (x_0,y_0) δίνεται από τις σχέσεις

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_T x\rho(x,y)dxdy}{\iint_T \rho(x,y)dxdy}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_T y\rho(x,y)dxdy}{\iint_T \rho(x,y)dxdy},$$

όπου οι $M_y = \iint_T x\rho(x,y)dxdy$ και $M_x = \iint_T y\rho(x,y)dxdy$ καλούνται ***ροπές 1ης τάξης*** του *T*.

4.3. Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Θεώρημα 4.5 Εστω $\mathbf{F}: G \to T$ είναι ένα συνεχώς διαφορίσιμο και αντιστρέψιμο πεδίο επί τόπου $G \subset \mathbb{R}^2$ της μορφής

$$\mathbf{F}(u,v) = (x,y) = \left(g_1(u,v), g_2(u,v)\right),$$

δηλαδή

$$\left|J_{\mathbf{F}}(u,v)\right| = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in G.$$

Αν $f: T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση επί του *T*, τότε

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_G f\left(g_1(u,v), g_2(u,v)\right)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες.

Στην περίπτωση που $\begin{cases} x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\varphi \\ y = \rho\,\eta\mu\varphi \end{cases}$ είναι ο συνήθης μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε:

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right| = \left| \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} \right| = \left|\rho\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \rho\,\eta\mu^2\varphi\right| = |\rho| = \rho,$$

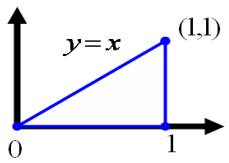
άρα:

$$\boxed{\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_G f\left(\rho\sigma\upsilon\nu\varphi, \rho\eta\mu\varphi\right)\rho d\rho d\varphi}.$$

4.5 Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί ο όγκος του πρίσματος που έχει ως βάση στο επίπεδο xy το τρίγωνο που ορίζεται από τον άξονα των x και τις ευθείες $y = x$ και $x = 1$ ενώ η κορυφή του βρίσκεται στο επίπεδο με εξίσωση $z=3 - x - y$.

Λύση. Από την εκφώνηση συνάγεται ότι η προβολή του πρίσματος στο επίπεδο Oxy είναι το τρίγωνο που ορίζεται από τον άξονα των x και τις ευθείες $y = x$ και $x = 1$, το οποίο είναι προφανώς κανονικό χωρίο. Επίσης η συνάρτηση $z=3-x-y$ είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη (και θετική) επί του τριγώνου.



Αρα:

$$V = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\,dydx$$

$$= \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(3x - x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1. \quad \square$$

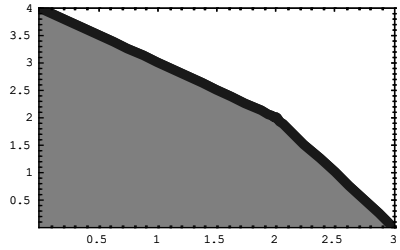
2. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_A \frac{\eta\mu x}{x} dxdy$, όπου A είναι το τρίγωνο στο επίπεδο xy που ορίζεται από τον άξονα των x, την ευθεία $y = x$ και την ευθεία $x = 1$ (βλέπε παραπάνω σχήμα).

Λύση. Εχουμε: $\iint_A \frac{\eta\mu x}{x} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\eta\mu x}{x} dy \right) dx$

$$= \int_0^1 \frac{\eta\mu x}{x} x\,dx = -\sigma\upsilon\nu x \Big|_0^1 = 1 - \sigma\upsilon\nu 1. \quad \square$$

3. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D (x + y)dxdy$, όπου D είναι το κλειστό χωρίο που περικλείεται από τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και τις ευθείες $y = 4-x$, $y = 6-2x$.

Λύση. Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος.



Αρχικά βρίσκουμε το κοινό σημείο των ευθειών που είναι το σημείο *(2,2)*. Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι κανονικό αλλά στο «εξωτερικό» σύνορο (με μαύρο χρώμα) αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης που ορίζει το σύνορο αυτό. Θα ολοκληρώσουμε λοιπόν ξεχωριστά χωρίζοντας το χωρίο ολοκλήρωσης σε δύο κανονικά χωρία ως εξής:

$$I = \iint_D (x+y)dxdy = \iint_{D_1} (x+y)dxdy + \iint_{D_2} (x+y)dxdy$$

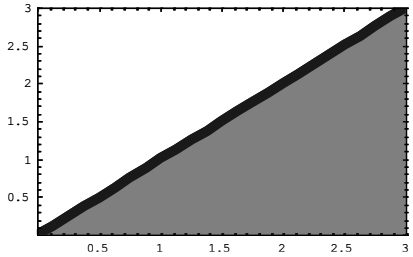
$$= \int_0^2 \int_0^{4-x} (x+y)dydx + \int_2^3 \int_0^{6-2x} (x+y)dydx$$

$$= \int_0^2 \left[(xy + y^2/2\right]_0^{4-x} dx + \int_2^3 \left[(xy + y^2/2\right]_0^{6-2x} dx$$

$$= \int_0^2 (x(4-x) + (4-x)^2/2)dx + \int_2^3 (x(6-2x) + (6-2x)^2/2)dx = \frac{53}{3}. \qquad \square$$

4. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\int_0^3 \int_y^3 e^{x^2} dxdy$.

Λύση. Το $\int_y^3 e^{x^2} dx$ δεν μπορεί να υπολογισθεί με στοιχειώδεις ολοκληρώσεις. Θα αλλάξουμε τα όρια ολοκλήρωσης προσδοκώντας σε απλούστερη μορφή. Πρώτα θα σχεδιάσουμε το χωρίο ολοκλήρωσης.



Τότε έχουμε

$$\int_0^3\int_y^3 e^{x^2}dxdy=\int_0^3\int_0^x e^{x^2}dydx=\int_0^3\left[ye^{x^2}\right]_0^x dx=\int_0^3 xe^{x^2}dx=\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^3=\frac{e^9-1}{2}. \quad \square$$

5. Υπολογίστε το $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ell nx}dx,\ 0<a\le b$**.**

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^1\int_a^b x^y dydx=\int_0^1\left[\frac{x^y}{\ell nx}\right]_a^b dx=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ell nx}dx,\ 0<a\le b.$$

Εναλλάσσοντας τα όρια ολοκλήρωσης (μπορούμε να το κάνουμε άμεσα διότι το χωρίο ολοκλήρωσης είναι ορθογώνιο) παίρνουμε

$$\int_0^1\int_a^b x^y dydx=\int_a^b\int_0^1 x^y dxdy=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy=\int_a^b\frac{1}{y+1}dy=\ell n\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

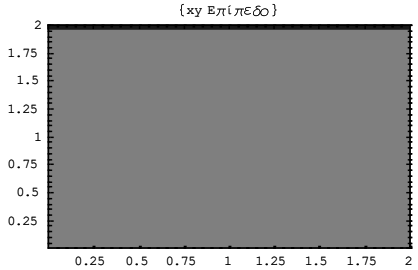
Συνεπώς: $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ell nx}dx=\ell n\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$ $\square$

6. Εστω $D=\{(x,y):|x-1|\le 1,\ |y-1|\le 1\}$.Υπολογίστε το

$$\iint_D (x-1)(y-1)dxdy$$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητής *x-1=u* και *y-1=v*.

Λύση. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το αρχικό χωρίο ολοκλήρωσης είναι το τετράγωνο $D=\{(x,y):0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$.

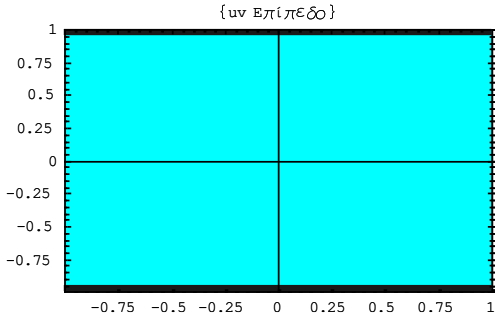


Το θέμα είναι να βρούμε πως αυτό το χωρίο μετασχηματίζεται στο επίπεδο *uv* με χρήση του μετασχηματισμού

$$\begin{cases} x-1=u \\ y-1=v \end{cases}. \qquad (1)$$

Εργαζόμαστε αποκλειστικά στο σύνορο του *D* το οποίο απαρτίζεται από 4 ευθύγραμμα τμήματα με εξισώσεις *x=0, x=2, y=0, y=2*. Εχουμε:

- Για *x=0* αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε *u=-1*.
- Για *x=2* αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε *u=1*.
- Για *y=0* αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε *v=-1*.
- Για *y=2* αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε *v=1*.



Χρησιμοποιούμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_G f\left(g_1(u,v), g_2(u,v)\right)\left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\right| dudv$$

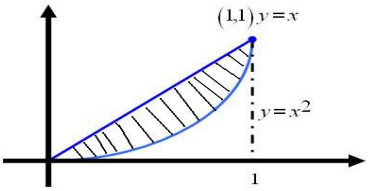
ο οποίος γίνεται

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} uv\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

Εφόσον $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = |1| = 1$, έχουμε

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} uvdvdu = \int_{-1}^{1}\left[uv^2/2\right]_{-1}^{1} du = 0. \qquad \square$$

7. Να ευρεθεί το εμβαδόν του χωρίου R που ορίζεται από την ευθεία $y = x$ και την παραβολή $y = x^2$ στο 1ο τεταρτημόριο, όταν $x \in [0,1]$.



Λύση. $E = \iint_R dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dydx = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. □

8. Να ευρεθεί το εμβαδόν του χωρίου R που περικλείεται μεταξύ της παραβολής $y = x^2$, της ευθείας $y = x + 2$ και των ευθειών $x = -1$, $x = 2$.

Λύση. Αρχικά υπολογίζουμε τα σημεία τομής των δύο καμπύλων λύνοντας την εξίσωση:

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1,$$

άρα τα σημεία τομής είναι τα $(2,4)$ και $(-1,1)$. Το χωρίο είναι κανονικό οπότε:

$$E = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dydx = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx = \left.\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}. \qquad \square$$

9. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy$ όπου R είναι το 1ο τεταρτοκύκλιο του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.

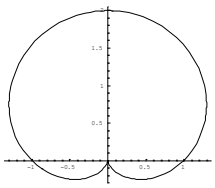
Λύση. Χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες και έχουμε

$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(\left(\rho\,\sigma\upsilon\nu\varphi\right)^2 + \left(\rho\,\eta\mu\varphi\right)^2\right) \rho\, d\varphi\, d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3 d\varphi\, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \left.\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho^4}{4}\right|_0^1 = \frac{\pi}{8}. \qquad \square$$

10. Να ευρεθεί στο επίπεδο Oxy το εμβαδόν του καρδιοειδούς $\rho(\varphi)=1+\eta\mu\varphi$ στο 1ο τεταρτημόριο.

Λύση. Το σχήμα στο επίπεδο Oxy για κάθε $\varphi\in[0,2\pi)$ είναι το ακόλουθο:



Εχουμε: $E=\iint_R dxdy=\iint_G \rho d\rho d\varphi$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{1+\eta\mu\varphi}\rho d\rho\right)d\varphi=\int_0^{\pi/2}\frac{(1+\eta\mu\varphi)^2}{2}d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1+2\eta\mu\varphi+\eta\mu^2\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\left([\varphi]_0^{\pi/2}-[2\sigma\upsilon\nu\varphi]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\varphi}{2}d\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left([\varphi]_0^{\pi/2}-[2\sigma\upsilon\nu\varphi]_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}[\varphi]_0^{\pi/2}-\frac{1}{4}[\eta\mu 2\varphi]_0^{\pi/2}\right)=\frac{3\pi}{8}+1. \qquad \square$$

11. Υπολογίστε το $\iint_D\left(x^2+y^2\right)^2 dxdy$, όπου D είναι ο δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους $x^2+y^2=1$ και $x^2+y^2=4$.

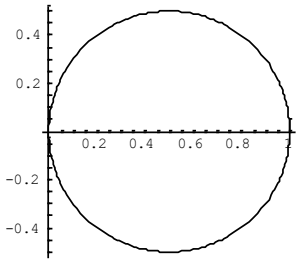
Λύση. Χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες και έχουμε

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)^2 dxdy=\int_0^{2\pi}\int_1^2\left(\rho^2\right)^2\rho d\rho d\varphi=2\pi\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_1^2=21\pi. \qquad \square$$

12. Υπολογίστε το $\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από τον κύκλο $x^2+y^2=x$.

Λύση. Προφανώς με συμπλήρωση τετραγώνων το χωρίο D είναι το εσωτερικό κύκλου κέντρου (1/2, 0) και ακτίνας ½, διότι

$$x^2+y^2=x \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$



Θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\eta\mu\theta$. Τότε η $x^2+y^2=x$ γίνεται

$$\rho^2=\rho\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \rho=\sigma\upsilon\nu\theta\,.$$

Ετσι το χωρίο του σχήματος γράφεται με πολικές συντεταγμένες ως

$$D=\left\{(\rho,\theta):-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le\sigma\upsilon\nu\theta\right\}$$

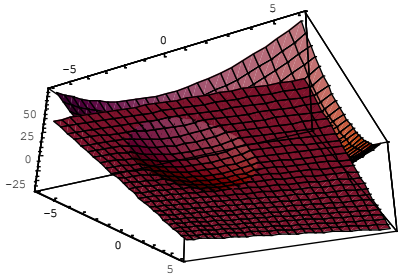
συνεπώς

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\sigma\upsilon\nu\theta}\frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^{\sigma\upsilon\nu\theta}d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta})d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-|\eta\mu\theta|)d\theta=\pi-2\int_0^{\pi/2}\eta\mu\theta d\theta=\pi-2\,.$$

13. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες $z=x^2+y^2$ και $z=4-2x-4y$.

Λύση. Η 1η επιφάνεια είναι κυκλικό παραβολοειδές και η 2η επιφάνεια είναι ένα επίπεδο τα οποία τέμνονται όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Εστω c είναι η καμπύλη τομής των δύο επιφανειών. Ξεκινούμε πάντα βρίσκοντας το χωρίο πάνω στο οποίο ολοκληρώνουμε. Αυτό το χωρίο είναι η προβολή στο επίπεδο Oxy της καμπύλης c και προκύπτει απαλείφοντας το z από τις εξισώσεις των δύο επιφανειών. Ετσι προκύπτει εύκολα ότι η προβολή της c είναι η

$$x^2+y^2=4-2x-4y \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=9$$

δηλαδή κύκλος κέντρου *(-1,-2)* και ακτίνας *3*. Αρα το χωρίο ολοκλήρωσης είναι ο κυκλικός δίσκος

$$D=\left\{(x,y):(x+1)^2+(y+2)^2\le 9\right\}.$$

Για ευκολία χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες της μορφής

$$\begin{cases} x+1=\rho\sigma\upsilon\nu\theta \\ y+2=\rho\eta\mu\theta \end{cases}$$

οπότε $D=\left\{(\rho,\theta):\theta\in[0,2\pi),\ 0\le\rho\le 3\right\}$ (τώρα ο πόλος θεωρείται το κέντρο του κύκλου *(-1,-2)*). Εχουμε λοιπόν

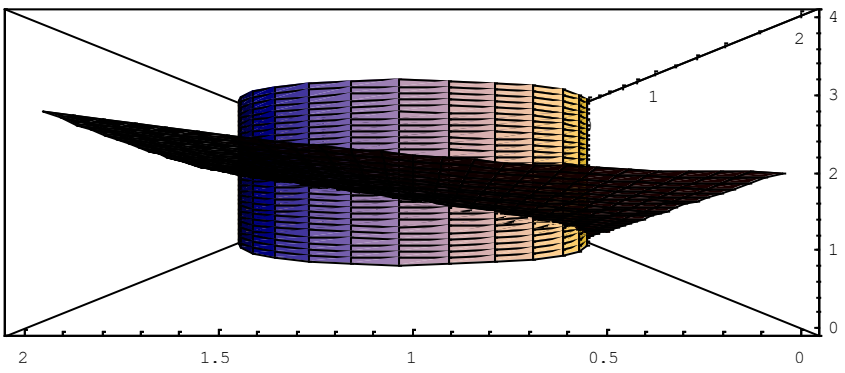
$$V=\iint_{\mathrm{T}}\left((4-2x-4y)-\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3\left[\left(4-2(\rho\sigma\upsilon\nu\theta-1)-4(\rho\eta\mu\theta-2)\right)-(\rho\sigma\upsilon\nu\theta-1)^2-(\rho\eta\mu\theta-2)^2\right]\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3\left(9\rho-\rho^3\right)d\rho d\theta=\frac{81\pi}{2}.$$ □

14. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=2ax$, $z=0$, όπου $a>0$.

Λύση. Η $z=\sqrt{x^2+y^2}$ είναι κωνική επιφάνεια ενώ η $(x-a)^2+y^2=a^2$ είναι κυκλική κυλινδρική επιφάνεια. Οι επιφάνειες τέμνονται όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



(Η οπτική γωνία του σχήματος είναι από την πλευρά του άξονα $y'y$)

Αρχικά βρίσκουμε το χωρίο πάνω στο οποίο ολοκληρώνουμε. Στην προκειμένη περίπτωση είναι σαφές ότι το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το

$$D=\left\{(x,y):(x-a)^2+y^2\le a^2\right\}.$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες $\begin{cases} x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta \\ y=\rho\eta\mu\theta \end{cases}$. Τότε το χωρίο D εκφράζεται σε πολικές συντ/νες ως

$$T=\left\{(\rho,\theta):\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ 0\le\rho\le 2a\sigma\upsilon\nu\theta\right\}.$$

Τότε:

$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\sigma\upsilon\nu\theta}\rho^2 d\rho d\theta=\frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^3\theta d\theta=\frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2\theta d\eta\mu\theta$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\eta\mu^2\theta)d\eta\mu\theta=\frac{8a^3}{3}\left[\eta\mu\theta-\frac{\eta\mu^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{32a^3}{9}. \qquad \square$$

15. Να υπολογισθεί το (μη γνήσιο) ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dxdy.$$

Λύση. Θεωρούμε ακολουθία κλειστών χωρίων της μορφής

$$D_n=\left\{\left(\rho,\theta\right):\theta\in\left[0,2\pi\right),\ 0\le\rho\le R_n\right\}$$

όπου $R_n \to +\infty,\ n \to +\infty$. Τότε έχουμε:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\left(1+\rho^2\right)^{3/2}} \rho d\rho d\theta = -\int_0^{2\pi} \int_0^{R_n} d\left(1+\rho^2\right)^{-1/2} d\theta$$

$$= -2\pi \left[\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \right]_0^{R_n} = 2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{1+R_n^2}} \to 2\pi,\ n \to \infty. \qquad \square$$

16. Να υπολογισθεί το (μη γνήσιο) ολοκλήρωμα

$$\iint_D \frac{1}{\left(x-y\right)^{2/3}} dxdy,$$

όπου D είναι το χωρίο μεταξύ των ευθειών $y=0$, $y=x$ και $x=1$.

Λύση. Η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{1}{\left(x-y\right)^{2/3}}$ είναι μη αρνητική στο D και μη φραγμένη σε μια περιοχή της ευθείας $y=x$. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε μία ακολουθία κλειστών χωρίων της μορφής

$$D_n = \left\{ \left(x,y\right) : x \in [0,1], 0 \le y \le x - \varepsilon_n \right\}$$

όπου $\varepsilon_n \to 0^+,\ n \to +\infty$. Τότε έχουμε

$$\iint_{D_n} \frac{1}{\left(x-y\right)^{2/3}} dxdy = \int_0^1 \int_0^{x-\varepsilon_n} (x-y)^{-2/3} dydx = \int_0^1 \left[-3(x-y)^{1/3} \right]_0^{x-\varepsilon_n} dx$$

$$= -3\int_0^1 \left(\varepsilon_n^{1/3} - x^{1/3} \right) dx = -3\varepsilon_n^{1/3} + 3\left[\frac{3}{4} x^{4/3} \right]_0^1 = \frac{9}{4} - 3\varepsilon_n^{1/3} \underset{\varepsilon_n \to 0^+}{\to} \frac{9}{4}. \qquad \square$$

4.6 Αλυτες ασκήσεις

1. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D (y-2x)dxdy$, όπου $D = \{(x,y): 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 3\}$. **Απάντ.** -2

2. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D ye^x dxdy$, όπου $D = \{(x,y): 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y^2\}$. **Απάντ.** $\frac{e-2}{2}$

3. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \int_{2\sqrt{x}}^2 \frac{12\sqrt{4-y^2}}{y} dydx$.

Υπόδ. Εναλλάξτε τα όρια ολοκλήρωσης. **Απάντ.** 8

4. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D xy^2 dxdy$, όπου D είναι η κλειστή περιοχή που περικλείεται από το θετικό ημιάξονα Ox, την ευθεία $y = x$ και το ημικύκλιο $y = \sqrt{1-x^2}$ που αντιστοιχεί στο 1ο τεταρτημόριο.

Απάντ. $\frac{\sqrt{2}}{60}$

5. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ όπου D είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 \le 1$. **Απάντ.** $\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |x+y| dxdy$. **Απάντ.** $\frac{8}{3}$

7. Υπολογίστε το εμβαδόν των επιπέδων χωρίων που περικλείονται από τις καμπύλες με εξισώσεις:

(a) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$, **Απάντ.** $\frac{16}{3}$

(b) $r = a(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\alpha>0$, **Απάντ.** $\frac{3\pi a^2}{2}$

(γ) $r = a(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$, και $r = a\sigma\upsilon\nu\theta$, $\alpha>0$. **Απάντ.** $\frac{5\pi a^2}{4}$

(δ) $r^2 = a^2\sigma\upsilon\nu(2\theta)$ $\alpha>0$. **Απάντ.** a^2

8. Να υπολογίσετε το $\iint_D \frac{y}{e^{x+y}}dxdy$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x+y=u$ και $y=uv$, όπου D είναι το χωρίο που περικλείεται από τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=2$. **Απάντ.** $\frac{5(e-2)}{2e^2}$

9. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D (x+y)dxdy$, όπου D είναι το κλειστό χωρίο που περικλείεται από το παραλληλόγραμμο $2x+3y=3$, $2x+3y=8$, $2x-7y=4$ *και* $2x-7y=6$.

Υπόδειξη: Κάντε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής. **Απάντ.** $\frac{109}{80}$

10. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες $z=3x^2$ *και* $z=4-x^2-y^2$. **Απάντ.** 4π

11. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$. **Απάντ.** $\frac{16a^3}{3}$

12. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=2$, $y^2=1-z$, $(y>0)$. **Απάντ.** $\frac{49}{60}$

13. Να υπολογισθεί το μη γνήσιο ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $I_0 = I^2$ όπου $I_0 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

Απάντ. $\sqrt{\pi}$

14. Να υπολογισθεί το μη γνήσιο ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{dxdy}{e^x\sqrt{y}}$ όπου $D=\{(x,y): x>0, 1\le y\le 2\}$. **Απάντ.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

15. Να υπολογισθεί το μη γνήσιο ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{y\,d\,x\,d}{\sqrt{x}}$ όπου $D=[0,1]^2$. **Απάντ.** 1