ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

7.1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΣΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Ορισμός. 7.1 Έστω D είναι **τόπος** του $\mathbb{R}^2$ και

$$\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

είναι μια **συνεχής** διανυσματική συνάρτηση πάνω στο D. Τότε η εικόνα $\mathbf{r}(D)$ καλείται **επιφάνεια** Σ με παραμετροποίηση $\mathbf{r}$. Αν η $\mathbf{r}$ είναι συνάρτηση 1-1 τότε η επιφάνεια Σ καλείται **απλή**.

<u>Στο εξής ασχολούμαστε μόνον με απλές επιφάνειες</u>.

Εστω Σ είναι επιφάνεια με παραμετροποίηση $\mathbf{r}$ και $P_0 = (u_0, v_0) \in D$. Σταθεροποιούμε προς στιγμή τη μεταβλητή u θέτοντας $u = u_0$. Τότε

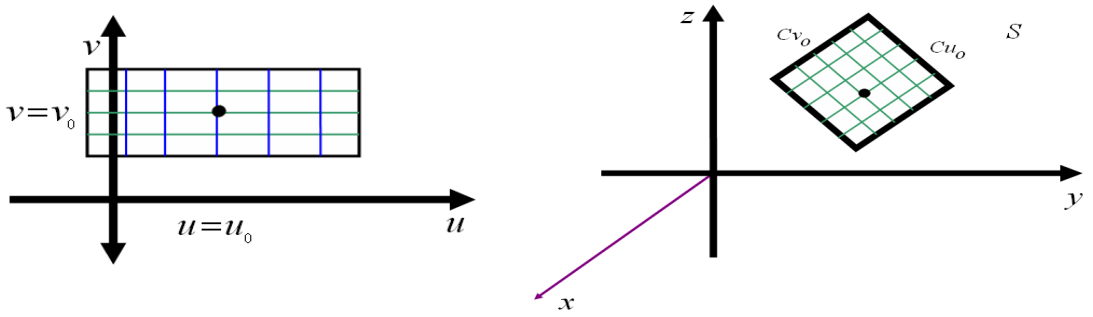
$$\mathbf{r}(u_0, v) = \big(x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)\big) \tag{1}$$

και εφόσον η $\mathbf{r}$ είναι συνεχής και η (1) εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή v, τότε η (1) ορίζει μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$. Ετσι για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής u, η (1) ορίζει μια οικογένεια καμπύλων στο χώρο **<u>πάνω στην επιφάνεια Σ</u>**, συμβολικά c_u. Ομοίως, αν σταθεροποιήσουμε τη μεταβλητή v θέτοντας $v = v_0$, τότε έχουμε

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \big(x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)\big), \tag{2}$$

άρα η (2) ορίζει για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής v μια οικογένεια καμπύλων στο χώρο **<u>πάνω στην επιφάνεια Σ</u>**, συμβολικά c_v. Εστω $Q_0 = \mathbf{r}(P_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ είναι σημείο της επιφάνειας Σ. Τότε από το σημείο Q_0 διέρχεται τόσο η καμπύλη c_{u_0} όσο και η καμπύλη c_{v_0}. Ετσι μπορούμε να πούμε ότι οι δυο οικογένειες καμπύλων c_u και c_v σχηματίζουν πάνω στην επιφάνεια Σ ένα δίκτυο παραμετρικών γραμμών και οι παράμετροι u και v καλούνται **καμπυλόγραμμες συντεταγμένες** των σημείων της επιφάνειας Σ. Κάθε σημείο Q_0 της επιφάνειας Σ μπορεί να ορισθεί μονοσήμαντα ως η τομή των καμπύλων c_{u_0} και c_{v_0},

όπως ακριβώς κάθε σημείο $P_0 \in D$ στο επίπεδο των u και v ορίζεται μονοσήμαντα ως η τομή των ευθειών $u = u_0$ και $v = v_0$.



Σχήμα 1

Στο εξής υποθέτουμε ότι η παραμετροποίηση $\mathbf{r}$ μιας επιφάνειας Σ είναι **διαφορίσιμη** συνάρτηση πάνω στον τόπο D. Αν $P_0 = (u_0, v_0) \in D$, τότε το εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathbf{r}$ στο σημείο $Q_0 = \mathbf{r}(P_0)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{T}(P) = \mathbf{r}(P_0) + J_{\mathbf{r}}(P_0)\cdot(P - P_0) = \begin{bmatrix} x(u_0,v_0) \\ y(u_0,v_0) \\ z(u_0,v_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \\ z_u(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x(u_0,v_0) \\ y(u_0,v_0) \\ z(u_0,v_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_u(u_0,v_0)(u-u_0) + x_v(u_0,v_0)(v-v_0) \\ y_u(u_0,v_0)(u-u_0) + y_v(u_0,v_0)(v-v_0) \\ z_u(u_0,v_0)(u-u_0) + z_v(u_0,v_0)(v-v_0) \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathbf{T}(P) = \mathbf{r}(P_0) + \mathbf{r}_u(P_0)(u-u_0) + \mathbf{r}_v(P_0)(v-v_0), \qquad (3)$$

όπου $\mathbf{r}_u(P_0) = (x_u(P_0), y_u(P_0), z_u(P_0))$, $\mathbf{r}_v(P_0) = (x_v(P_0), y_v(P_0), z_v(P_0))$ είναι οι παράγωγοι (δηλαδή τα εφαπτόμενα διανύσματα) στο σημείο $Q_0 = \mathbf{r}(P_0)$ των καμπύλων c_{u_0} και c_{v_0} αντιστοίχως. Ετσι το διάνυσμα

$$\boxed{\mathbf{n}(P_0) = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(P_0)}$$

είναι κάθετο επί του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο Q_0 της επιφάνειας Σ υπό την προϋπόθεση ότι $\mathbf{n}(P_0) \neq \mathbf{0}$.

Ορισμός 7.2. Εστω Σ είναι μια **διαφορίσιμη** συνάρτηση πάνω σε **τόπο** D με παραμετροποίηση $\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Ένα σημείο $Q_0 = \mathbf{r}(P_0)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{n}(P_0) = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(P_0) \neq \mathbf{0}$$

καλείται **ομαλό σημείο** της επιφάνειας Σ, αλλιώς **ανώμαλο**. Η επιφάνεια Σ καλείται **ομαλή** αν ισχύει $\mathbf{n}(P) \neq \mathbf{0} \quad \forall P \in D$. Η επιφάνεια Σ καλείται **λεία** αν είναι ομαλή και επιπλέον αν η $\mathbf{r}$ είναι **διαφορίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο** επί του D.

Ορισμός 7.3 Εστω Σ είναι μια **ομαλή** επιφάνεια με παραμετροποίηση $\mathbf{r}$ όπως παραπάνω. Η Σ καλείται **προσανατολίσιμη** αν το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ είναι **συνεχής συνάρτηση** σε κάθε σημείο της επιφάνειας Σ. **<u>Προφανώς αν η Σ είναι λεία είναι και προσανατολίσιμη</u>**.

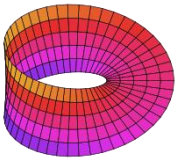
Εστω λοιπόν Σ είναι μια λεία επιφάνεια, άρα και προσανατολίσιμη. Τότε υπάρχουν δυο διαφορετικοί τρόποι προσανατολισμού: ο ένας τρόπος καθορίζεται από τη κατεύθυνση της διανυσματικής μονάδας $\mathbf{n}_0 = \dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ και ο άλλος από την κατεύθυνση της διανυσματικής μονάδας $-\mathbf{n}_0$. Γι' αυτό λέμε ότι μια προσανατολίσιμη επιφάνεια έχει **δυο όψεις**.

Ορισμός 7.4 Θα λέμε ότι μια λεία επιφάνεια Σ είναι **προσανατολισμένη** αν έχει ορισθεί ένας προσανατολισμός πάνω σ' αυτή (είτε η κατεύθυνση του $\mathbf{n}_0$ είτε η κατεύθυνση του $-\mathbf{n}_0$).

Ορισμός 7.5 Εστω Σ είναι μια λεία επιφάνεια. Τότε ορίζουμε ως **σύνορο** της Σ να είναι η καμπύλη (ή καμπύλες ή σημεία ή το $\varnothing$) μέσω της οποίας (των οποίων) μεταβαίνουμε από τη μια όψη της επιφάνειας στην άλλη. Αν το σύνορο της Σ είναι το $\varnothing$, τότε λέμε ότι η Σ είναι **κλειστή επιφάνεια** αλλιώς λέμε ότι η **Σ** είναι **ανοικτή**.

Παρατηρήσεις. (α) Με μια μη αυστηρή ερμηνεία μπορούμε να πούμε ότι σε μια κλειστή ομαλή επιφάνεια Σ μπορούμε να μεταβούμε από τη μια όψη της στην άλλη «διατρυπώντας» την επιφάνεια σε κάποιο σημείο της.

(β) Κάθε ομαλή επιφάνεια δεν είναι κατ' ανάγκην προσανατολίσιμη. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η λωρίδα Mobius.



Ορισμός 7.6 (Προσανατολισμός συνόρου επιφάνειας) Εστω Σ είναι μια απλή, **λεία** ανοικτή και **προσανατολισμένη** επιφάνεια με το σύνορό της γ να είναι μια **απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη**. Θα λέμε ότι η γ **διαγράφεται με τη θετική φορά** αν κινούμενοι κατά μήκος της καμπύλης γ με το κεφάλι μας να δείχνει προς την κατεύθυνση του προσανατολισμού της Σ που έχουμε ορίσει, τότε η όψη της επιφάνειας Σ που καθορίζεται από τον προσανατολισμό που έχουμε ορίσει μένει πάντα στο αριστερό μας χέρι.

Ορισμός 7.7 Θα λέμε ότι μια επιφάνεια Σ είναι **τμηματικά λεία** αν είναι ένωση πεπερασμένου αριθμού λείων επιφανειών $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$ που ανά δυο τέμνονται κατά μήκος μιας λείας καμπύλης και η τομή τριών οποιονδήποτε επιφανειών είναι το πολύ ένα σημείο.

Ορισμός 7.8 Εστω Σ είναι μια **τμηματικά λεία επιφάνεια** που συντίθεται από την ένωση απλών, λείων και προσανατολισμένων επιφανειών $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$. Θα λέμε ότι η Σ είναι **προσανατολίσιμη** αν η φορά διαγραφής της καμπύλης πάνω στην οποία περατώνεται η καμπύλη Σ_i είναι αντίθετη με τη φορά διαγραφής στην οποία περατώνεται η Σ_j για κάθε ζεύγος επιφανειών $\left(\Sigma_i,\Sigma_j\right)$ που τέμνονται πάνω σε λεία καμπύλη c_{ij}.

Ορισμός 7.9 Εστω Σ είναι μια **κλειστή, προσανατολίσιμη και τμηματικά λεία επιφάνεια**. **Εξωτερική όψη** της Σ λέμε την όψη που υποδεικνύεται από την κάθετο επί της Σ με κατεύθυνση προς το μη φραγμένο στερεό με σύνορο τη Σ, αλλιώς μιλούμε για την **εσωτερική όψη** της Σ.

Εστω

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{r}_1(u,v) = \left(x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v)\right) \\ \mathbf{r}_2 : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{r}_2(u,v) = \left(x_2(u,v), y_2(u,v), z_2(u,v)\right) \end{cases}$$

είναι παραμετροποιήσεις δυο λείων επιφανειών Σ_1, Σ_2 όπου D, E είναι τόποι του $\mathbb{R}^2$ με σύνορα τμηματικά λείες καμπύλες $\partial D, \partial E$. Οι επιφάνειες καλούνται **ισοδύναμες** αν υπάρχει ένας **συνεχώς διαφορίσιμος μετασχηματισμός** $\varphi : E \to D : \ \varphi(u,v) = \left(a(u,v), b(u,v)\right)$ τέτοιος ώστε

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \circ \varphi .$$

Τα ίχνη δυο ισοδυνάμων επιφανειών ταυτίζονται. Η μόνη διαφορά τους συνίσταται στον προσανατολισμό τους. Ετσι αν η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\frac{D(a,b)}{D(u,v)} > 0 \quad \forall (u,v) \in D ,$$

τότε ο μετασχηματισμός φ διατηρεί τον ίδιο προσανατολισμό, αλλιώς αν η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι αρνητική τότε ο προσανατολισμός αλλάζει.

7.1.1. Παραδείγματα παραμετροποιημένων επιφανειών

1. Επιφάνειες της μορφής $z = f(x,y),\ (x,y) \in D$.

Τότε μια παραμετροποίηση αυτής δίνεται από την

$$\boxed{\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y)),\ (x,y) \in D.}$$

Τότε $\mathbf{r}_x = (1,0,f_x)$, $\mathbf{r}_y = (0,1,f_y)$, συνεπώς:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1).$$

Εφόσον $|\mathbf{n}| = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$, παίρνουμε

$$\boxed{\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.}$$

Κάθε σημείο μιας τέτοιας επιφάνειας είναι ομαλό διότι $\mathbf{n}_0 \neq \mathbf{0}$ σε κάθε σημείο της. Επιπλέον αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε η $\mathbf{n}_0$ είναι συνεχής, άρα η επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη.

Σημείωση. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να παραμετροποιήσουμε επιφάνειες της μορφής $y = y(x,z)$ ή $x = x(y,z)$.

2. Επιφάνειες $\Phi(x,y,z)=0$ σε πλεγμένη μορφή.

Εστω $z=f(x,y)$ είναι μια επιφάνεια που δίνεται σε πλεγμένη μορφή από την ισότητα $\Phi(x,y,z)=0$ στην περιοχή D κάποιου σημείου. Τότε έχουμε πάλι (όπως παραπάνω)

$$\boxed{\mathbf{r}(x,y)=\left(x,y,f(x,y)\right),\ (x,y)\in D.}$$

Από το Θεώρημα πλεγμένων συναρτήσεων παίρνουμε

$$\mathbf{r}_x=(1,0,f_x)=\left(1,0,-\frac{\Phi_x}{\Phi_z}\right) \text{ και } \mathbf{r}_y=(0,1,f_y)=\left(0,1,-\frac{\Phi_y}{\Phi_z}\right),$$

συνεπώς:

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & f_x\\ 0 & 1 & f_y\end{vmatrix}=(-f_x,-f_x,1)=\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_z},\frac{\Phi_y}{\Phi_z},1\right).$$

Εφόσον $|\mathbf{n}|=|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_z}\right)^2+\left(\frac{\Phi_y}{\Phi_z}\right)^2+1}$, παίρνουμε

$$\boxed{\mathbf{n}_0=\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}=\frac{\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_z},\frac{\Phi_y}{\Phi_z},1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_z}\right)^2+\left(\frac{\Phi_y}{\Phi_z}\right)^2+1}}.}$$

Κάθε σημείο μιας τέτοιας επιφάνειας είναι ομαλό διότι $\mathbf{n}_0\neq\mathbf{0}$ σε κάθε σημείο της. Επιπλέον αν η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη (δηλαδή οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς συναρτήσεις) τότε η $\mathbf{n}_0$ είναι συνεχής, άρα η επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη.

3. Σφαίρα: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

1ος τρόπος: Η σφαίρα είναι πλεγμένη συνάρτηση. Λύνοντας π.χ. ως προς z παίρνουμε δυο παραμετρήσεις για το άνω και κάτω ημισφαίριο ως

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1(x,y) = \left(x,\ y,\ c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\right) \\ \mathbf{r}_2(x,y) = \left(x,\ y,\ c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\right) \end{cases},$$

όπου $\left\{(x,y):\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2\right\}$.

2ος τρόπος. Παραμετροποίηση μέσω σφαιρικών συντεταγμένων.

Μπορούμε να παραμετροποιήσουμε την παραπάνω σφαίρα με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων ως εξής:

$$\begin{cases} x = a + R\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi \\ y = b + R\eta\mu\theta\eta\mu\phi\ ,\ \theta \in [0, 2\pi),\ \phi \in [0, \pi] \\ z = c + R\sigma\upsilon\nu\phi \end{cases}$$

Τότε

$$\boxed{\mathbf{r}(\theta,\phi) = (a + R\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi,\ b + R\eta\mu\theta\eta\mu\phi,\ c + R\sigma\upsilon\nu\phi).}$$

Τότε οι καμπύλες των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων είναι τα γεωγραφικά πλάτη $(\theta = \theta_0)$ και μήκη $(\phi = \phi_0)$. Επίσης:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi &= \left(-R^2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\varphi, -R^2\eta\mu\theta\eta\mu^2\varphi, R^2\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi\right) \\ &= (a,b,c) - R\eta\mu\varphi\ \mathbf{r}(\theta,\varphi) \end{aligned}$$

Δηλαδή, με αυτή την παραμετροποίηση το διάνυσμα $\mathbf{n}$ έχει τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης με φορά στο εσωτερικό της σφαίρας.

4. Κύλινδρος $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,\ (z \in \mathbb{R})$.

1ος τρόπος: Λύνοντας π.χ. ως προς y παίρνουμε δυο παραμετρήσεις για $y > 0$ και $y < 0$ ως

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1(x,z) = \left(x,\ b + \sqrt{R^2 - (x-a)^2}, z\right) \\ \mathbf{r}_2(x,z) = \left(x, b - \sqrt{R^2 - (x-a)^2}, z\right) \end{cases},\ D = \left\{(x,y):\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2\right\}$$

.

2ος τρόπος. Παραμετροποίηση μέσω κυλινδρικών συντεταγμένων.

Μπορούμε να παραμετροποιήσουμε τον κύλινδρο με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων ως εξής:

$$\begin{cases} x = a + R\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = b + R\eta\mu\theta \ , \ \theta \in [0, 2\pi), \ z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

Τότε

$$\boxed{\mathbf{r}(\theta, z) = (a + R\sigma\upsilon\nu\theta, \ b + R\eta\mu\theta, \ z), \ \theta \in [0, 2\pi), \ z \in \mathbb{R}}$$

και

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = (R\sigma\upsilon\nu\theta, R\eta\mu\theta, 0) = R \ \mathbf{r}_{\pi\rho o\beta}(\theta, z)$$

$$\boxed{\mathbf{n}_0(\theta, \varphi) = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta, 0)}$$

Δηλαδή, με αυτή την παραμετροποίηση το διάνυσμα $\mathbf{n}$ έχει φορά στο εξωτερικό του κυλίνδρου.

5. Ελλειψοειδές $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1, \ (a, b, c > 0)$.

Μια παραμέτρηση του ελλειψοειδούς προκύπτει ως εξής:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi \\ y = y_0 + b\eta\mu\theta\eta\mu\phi \ , \ \theta \in [0, 2\pi), \ \phi \in [0, \pi] \\ z = z_0 + c\sigma\upsilon\nu\phi \end{cases}$$

Τότε

$$\boxed{\mathbf{r}(\theta, \phi) = (x_0 + a\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi, \ y_0 + b\eta\mu\theta\eta\mu\phi, \ z_0 + c\sigma\upsilon\nu\phi).}$$

7.2. ΕΜΒΑΔΟΝ ΛΕΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.

Εστω Σ είναι μια λεία επιφάνεια με παραμετροποίηση

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \ (u, v) \in D,$$

και έστω $P_0 = (u_0, v_0) \in D$ και $Q_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Τότε το εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathbf{r}$ στο P_0 δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{T}(P) = \mathbf{r}(P_0) + \mathbf{r}_u(P_0) \cdot (u - u_0) + \mathbf{r}_v(P_0) \cdot (v - v_0).$$

Αυτό σημαίνει ότι ένα στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $P_0P_1P_2P_3$ στο επίπεδο uv (εντός του D) με $P_0=(u_0,v_0)$, $P_1=(u_0+du,v_0)$, $P_2=(u_0,v_0+dv)$, $P_3=(u_0+du,v_0+dv)$ απεικονίζεται μέσω της $\mathbf{r}$ σε κάποιο στοιχειώδες χωρίο της επιφάνειας Σ το οποίο προσεγγίζεται μέσω της $\mathbf{T}$ από ένα άλλο παραλληλόγραμμο $Q_0Q_1'Q_2'Q_3'$, όπου $Q_0=\mathbf{r}(u_0,v_0)$ και $Q_i'=\mathbf{T}(P_i)$, $i=1,2$. Τότε

$$\overline{Q_0Q_1'}\approx\mathbf{r}_u(P_0)\cdot du \text{ και } \overline{Q_0Q_2'}\approx\mathbf{r}_v(P_0)\cdot dv.$$

Ετσι το εμβαδόν E του παραλληλογράμμου $Q_0Q_1'Q_2'Q_3'$ προσεγγίζεται από τη σχέση

$$E=\left|\overline{Q_0Q_1'}\times\overline{Q_0Q_2'}\right|\approx\left|\mathbf{r}_u(P_0)\cdot du\times\mathbf{r}_v(P_0)\cdot dv\right|$$

$$=\left|\mathbf{r}_u(P_0)\times\mathbf{r}_v(P_0)\right|dudv=\left|\mathbf{n}(P_0)\right|dudv.$$

Δηλαδή το εμβαδόν E προσεγγίζει το εμβαδόν της επιφάνειας Σ σε μια μικρή περιοχή του σημείου Q_0 της Σ.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού της επιφάνειας Σ είναι ένα ορθογώνιο D, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε μια διαμέριση Δ του D από ένα ορθογώνιο πλέγμα γραμμών σε στοιχειώδη ορθογώνια εμβαδού $E_{ij}=du_idv_j$. Εστω P_{ij} η τομή δύο κάθετων γραμμών του πλέγματος αυτού. Λαμβάνοντας υπόψην την παραπάνω διαδικασία και τη συνέχεια της συνάρτησης $\left|\mathbf{n}(P)\right|$, μπορούμε να πούμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας Σ είναι ίσο κατά προσέγγιση με

$$E(\Sigma)\approx\sum_i\sum_j\left|\mathbf{n}(P_{ij})\right|du_idv_j\,.$$

Το παραπάνω είναι ένα άθροισμα Riemann, συνεπώς αφήνοντας το πλάτος της διαμέρισης Δ να τείνει στο μηδέν παίρνουμε

$$E(\Sigma)=\iint_D\left|\mathbf{n}(u,v)\right|dudv,$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{E(\Sigma)=\iint_D\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|dudv.}$$

Παρατηρήσεις. (α) Ο παραπάνω τύπος επεκτείνεται και σε <u>μη ορθογώνια φραγμένα χωρία D</u> υπό την προϋπόθεση το σύνορο ∂D αυτών να είναι σύνολο αμελητέου εμβαδού, π.χ. να είναι μια κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη. Επίσης αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητος της παραμετροποίησης που χρησιμοποιούμε για την επιφάνεια Σ.

(β) Αν η επιφάνεια είναι τμηματικά λεία, τότε το συνολικό εμβαδόν της προκύπτει από το άθροισμα των εμβαδών των λείων επιφανειών που την απαρτίζουν.

3.3. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΘΜΩΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ.

Αν αντί μιας καμπύλης θέλουμε να ολοκληρώσουμε πάνω σε μια επιφάνεια Σ, πως πρέπει να ορίσουμε το ολοκλήρωμα ως μια φυσική γενίκευση των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων;

Για παράδειγμα, έστω ότι αντί της μάζας καλωδίου που τοποθετείται κατά μήκος καμπύλης, αναζητούμε τη μάζα ενός μεταλλικού πιάτου με πυκνότητα μάζας $f:\Sigma\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:\ z=f(Q)\ \forall Q\in\Sigma$ που κατανέμεται συνεχώς ώστε να καλύπτει ακριβώς μια απλή και λεία επιφάνεια Σ με παραμετροποίηση:

$$\mathbf{r}(u,v)=\big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big),\ (x,y)\in D,$$

όπου D είναι ορθογώνιο. Ορίζουμε ένα δίκτυο παραμετρικών γραμμών $c_{u_i},c_{v_j}\ \ i=1,\dots,N,\ j=1,\dots,M$ (όπως κάναμε παραπάνω) πάνω στην επιφάνεια Σ οι οποίες προκύπτουν από μια διαμέριση Δ του ορθογωνίου D σε στοιχειώδη ορθογώνια D_{ij}. Το δίκτυο αυτό διαμερίζει την επιφάνεια Σ σε στοιχειώδη χωρία E_{ij} εμβαδού

$$\Delta E_{ij}\approx\left|\mathbf{r}_u\left(P_{ij}\right)\times\mathbf{r}_v\left(P_{ij}\right)\right|du_idv_j=\left|\mathbf{n}\left(P_{ij}\right)\right|du_idv_j.$$

Αν οι ποσότητες ΔE_{ij} είναι αρκετά μικρές μπορούμε να θεωρήσουμε με μικρό σφάλμα ότι η μάζα του πιάτου ισούται με:

$$M\approx\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}f\left(Q_{ij}\right)\Delta E_{ij}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}f\left(\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)\right)\left|\mathbf{n}\left(P_{ij}\right)\right|du_idv_j.$$

Εφόσον η f είναι συνεχής συνάρτηση το παραπάνω είναι ένα άθροισμα Riemann και τείνει σ' έναν πραγματικό αριθμό όταν το πλάτος της διαμέρισης Δ τείνει στο μηδέν, δηλαδή $N,M\to+\infty$. Ετσι ορίζεται το **διπλό ολοκλήρωμα**

$$\iint_D f\left(\mathbf{r}(P)\right)\left|\mathbf{n}(P)\right|dudv=\lambda\in\mathbb{R},\quad \left(P=(u,v)\in D\right).$$

Το ολοκλήρωμα αυτό καλείται **επιφανειακό ολοκλήρωμα του βαθμωτού πεδίου** $f:\Sigma\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:\ z=f(Q)\ \forall Q\in\Sigma$ **επί της επιφάνειας Σ**. Συμβολικά γράφουμε

$$\iint_\Sigma f\ dS,$$

όπου η ποσότητα

$$\boxed{dS=\left|\mathbf{n}(u,v)\right|dudv}$$

στο εξής θα καλείται διαφορικό εμβαδού της επιφάνειας Σ με παραμετροποίηση $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$. Τελικά έχουμε

$$\boxed{\iint_\Sigma f\ dS=\iint_D f\left(\mathbf{r}(u,v)\right)\left|\mathbf{n}(u,v)\right|dudv.}$$

Προσοχή. (α) Ο παραπάνω τύπος επεκτείνεται και σε **<u>μη ορθογώνια φραγμένα χωρία *D*</u>** υπό την προϋπόθεση το σύνορο ∂D αυτών να είναι σύνολο αμελητέου εμβαδού, π.χ. να είναι μια κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη.

(β) Ο ορισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος βαθμωτών πεδίων μπορεί να επεκταθεί και για μη κατ' ανάγκην λείες επιφάνειες. Στο εξής ασχολούμαστε αποκλειστικά με λείες ή τμηματικά λείες επιφάνειες.

Ορισμός 7.10 Εστω $\mathbf{r}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ είναι μια παραμετροποίηση μιας απλής και λείας επιφάνειας Σ πάνω σε τόπο D και έστω $f:\Sigma\to\mathbb{R}$ είναι συνεχές βαθμωτό πεδίο επί της Σ. Ορίζουμε ως ***επιφανειακό ολοκλήρωμα του βαθμωτού πεδίου*** f ***επί της επιφάνειας Σ*** (ή **1ου είδους**) να είναι ο αριθμός

$$\boxed{\iint_\Sigma f\ dS=\iint_D f\left(\mathbf{r}(u,v)\right)\left|\mathbf{n}(u,v)\right|dudv=\lambda\in\mathbb{R}.}$$

Προφανώς:

$$\boxed{\iint_\Sigma f\ dS=\iint_D f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\cdot\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v(u,v)\right|dudv.}$$

Θεώρημα 7.1 Εστω $\mathbf{r}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ είναι μια παραμετροποίηση μιας απλής και λείας επιφάνειας Σ πάνω σε τόπο D και έστω $f,g:\Sigma\to\mathbb{R}$ είναι συνεχή βαθμωτά πεδία επί της Σ. Τότε

(α) ***Ο προσανατολισμός της επιφάνειας <u>δεν</u> επηρεάζει την τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος.***

(β) $\iint_\Sigma (c_1 f + c_2 g)\, dS = c_1 \iint_\Sigma f\ dS + c_2 \iint_\Sigma g\ dS,\ (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

(γ) Αν η Σ είναι λεία επιφάνεια και συντίθεται από π..χ. δυο λείες επιφάνειες Σ_1 και Σ_2, τότε

$$\iint_\Sigma f\ dS = \iint_{\Sigma_1} f\ dS + \iint_{\Sigma_2} f\ dS\ .$$

(δ) Αν $M = \sup\{|f(Q)|:\ Q \in \Sigma\}$ και αν $E(\Sigma)$ είναι το εμβαδόν της Σ, τότε

$$\left| \iint_\Sigma f\ dS \right| \le M \cdot E(\Sigma).$$

Παρατηρήσεις: (α) Αν η επιφάνεια Σ ορίζεται μέσω της σχέσης $z = g(x,y),\ (x,y) \in D$, τότε μια προφανής παραμετροποίηση αυτής είναι η $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, g(x,y))$, οπότε

$$\iint_\Sigma f\ dS = \iint_D f(x, y, g(x,y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dxdy\ .$$

(β) Εάν $f(Q) = 1$, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_\Sigma 1\ dS$ ισούται με το ***εμβαδόν της επιφάνειας*** Σ.

(γ) Οπως είδαμε στο παραπάνω παράδειγμα αν θεωρήσουμε συνεχώς κατανεμημένη μάζα με πυκνότητα $z = f(Q)$ επί απλής και λείας επιφάνειας Σ, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_\Sigma f\ dS$ μας δίνει τη συνολική μάζα επί της επιφάνειας Σ.

Γενικότερα, ***η τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος μπορεί κάλλιστα να είναι και αρνητικός αριθμός ή και το μηδέν***.

7.4.ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ.

Έστω τώρα Σ είναι μία απλή και λεία επιφάνεια με εξίσωση:

$$\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 :\ \mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

όπου D είναι ορθογώνιο και έστω $\mathbf{F} : \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι ένα **συνεχές** διανυσματικό πεδίο επί της επιφανείας Σ. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι δια μέσου της επιφάνειας Σ διέρχεται ρευστό με ταχύτητα

$\mathbf{F}=\mathbf{F}(Q)\ \forall Q\in\Sigma$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροή (όγκο) του ρευστού που διέρχεται δια μέσου της επιφάνειας Σ στη μονάδα του χρόνου. Ορίζουμε ένα δίκτυο παραμετρικών γραμμών $c_{u_i}, c_{v_j}\ \ i=1,...,N,\ j=1,...,M$ πάνω στην επιφάνεια Σ, οι οποίες προκύπτουν από μία διαμέριση Δ του ορθογωνίου D σε στοιχειώδη ορθογώνια D_{ij}. Το δίκτυο αυτό διαμερίζει την επιφάνεια Σ σε στοιχειώδη χωρία E_{ij} εμβαδού

$$\Delta E_{ij}=\left|\mathbf{r}_u\left(P_{ij}\right)du_i\times\mathbf{r}_v\left(P_{ij}\right)dv_j\right|=\left|\mathbf{n}\left(P_{ij}\right)\right|du_i dv_j,\ P_{ij}\in D_{ij},$$

όπου $\mathbf{n}\left(P_{ij}\right)=\mathbf{r}_u\left(P_{ij}\right)\times\mathbf{r}_v\left(P_{ij}\right)$ είναι το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας στο σημείο $Q_{ij}=\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)$. Τότε είναι γνωστό ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{r}_u\left(P_{ij}\right)du_i,\ \mathbf{r}_v\left(P_{ij}\right)dv_j$ και $\mathbf{F}\left(Q_{ij}\right)=\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)\right)$ ισούται με την απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)\right)\cdot\left(\mathbf{r}_u\left(P_{ij}\right)du_i\times\mathbf{r}_v\left(P_{ij}\right)dv_j\right)=\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)\right)\cdot\mathbf{n}\left(P_{ij}\right)du_i dv_j.$$

Το γινόμενο $\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)\right)\cdot\mathbf{n}\left(P_{ij}\right)$ είναι θετικό ή αρνητικό αναλόγως αν τα διανύσματα $\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v,\ \mathbf{F}$ συνιστούν ένα δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο σύστημα συντ/νων με αρχή το σημείο $Q_{ij}=\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)$. Συνεπώς με τη φυσική ερμηνεία που δώσαμε, ο αριθμός $\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)\right)\cdot\mathbf{n}\left(P_{ij}\right)du_i dv_j$ ισούται με τον όγκο του ρευστού που διέρχεται από το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο Q_{ij} με την παρατήρηση ότι αν $\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)\right)\cdot\mathbf{n}\left(P_{ij}\right)>0$ τότε το ρευστό ρέει προς την κατεύθυνση του $\mathbf{n}$ και αντιστρόφως σε μια περιοχή του σημείου Q_{ij}. Αν οι ποσότητες ΔE_{ij} είναι αρκετά μικρές μπορούμε να θεωρήσουμε με μικρό σφάλμα ότι η ολική ροή του ρευστού που διέρχεται δια της επιφανείας Σ ισούται με:

$$\Phi\approx\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\mathbf{F}\left(Q_{ij}\right)\cdot\left(\mathbf{r}_u\left(P_{ij}\right)du_i\times\mathbf{r}_v\left(P_{ij}\right)dv_j\right)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(P_{ij}\right)\right)\cdot\mathbf{n}\left(P_{ij}\right)du_i dv_j.$$

Εφόσον το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συνεχές και η επιφάνεια λεία, το παραπάνω είναι ένα άθροισμα Riemann και τείνει σ' έναν πραγματικό αριθμό όταν το πλάτος της διαμέρισης Δ του πεδίου ορισμού τείνει στο μηδέν. Τότε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(u,v)\right)\cdot\mathbf{n}(u,v)\,du dv=\lambda\in\mathbb{R}$$

καλείται επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}:\Sigma\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ επί της επιφάνειας Σ, ή αλλιώς **ροή** του πεδίου $\mathbf{F}$ δια μέσου της επιφάνειας Σ, συμβολικά

$$\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

όπου γράφουμε

$$\boxed{d\mathbf{S}=\mathbf{n}(u,v)\,dudv.}$$

Αν $\mathbf{n_0}=\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας Σ (που προήλθε μέσω της παραμετροποίησης της επιφάνειας Σ), λαμβάνοντας υπόψη ότι η ποσότητα $dS=|\mathbf{n}(u,v)|\,dudv$ είναι το γνωστό διαφορικό εμβαδού της επιφάνειας Σ, τότε μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω επιφανειακό ολοκλήρωμα με χρήση του επιφανειακού ολοκληρώματος του βαθμωτού πεδίου $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_0$ ως εξής:

$$\boxed{\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_0 dS}\,.$$

Ορισμός 7.11 Εστω $\mathbf{r}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ είναι μια παραμετροποίηση μιας απλής και λείας επιφάνειας Σ πάνω σε τόπο D και έστω $\mathbf{n}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ είναι η κάθετος της επιφάνειας σε κάθε σημείο της. Αν $\mathbf{F}:\Sigma\to\mathbb{R}^3$ είναι συνεχές διανυσματικό πεδίο επί της Σ, τότε ορίζουμε ως ***επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου*** **F** ***επί της επιφάνειας Σ*** ή ισοδύναμα τη **ΡΟΗ** του πεδίου **F** ***επί της επιφάνειας Σ*** να είναι ο αριθμός

$$\boxed{\Phi=\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_D \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\mathbf{n}(u,v)\,dudv=\lambda\in\mathbb{R}.}$$

Λαμβάνοντας υπόψην τον τύπο $\mathbf{n}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ προκύπτει άμεσα:

$$\boxed{\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_D \mathbf{F}\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\cdot\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v(u,v)\,dudv.}$$

Προσοχή. (α) Ο παραπάνω τύπος επεκτείνεται και σε **μη ορθογώνια φραγμένα χωρία *D*** υπό την προϋπόθεση το σύνορο ∂D αυτών να είναι σύνολο αμελητέου εμβαδού, π.χ. να είναι μια κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη.

(β) Αν στον παραπάνω τύπο έχουμε $\Phi>0$ σημαίνει ότι το «ρευστό ρέει » προς την κατεύθυνση της καθέτου $\mathbf{n}$, ενώ αν $\Phi<0$ το «ρευστό ρέει » προς την κατεύθυνση της καθέτου $-\mathbf{n}$.

(γ) Αν η επιφάνεια Σ είναι εκ των προτέρων προσανατολισμένη από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{N}_0$, τότε $\mathbf{N}_0 = \pm\mathbf{n}_0$, άρα:

$$\boxed{\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot \mathbf{N}_0 dS = \pm\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}_0 dS}$$

όπου $\mathbf{n_0}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που προήλθε από την παραμετροποίηση της επιφάνειας. Ετσι το πρόσημο δείχνει τη ροή σε σχέση με την κάθετο $\mathbf{N}_0$.

Παρατήρηση: Αν η επιφάνεια Σ είναι **κλειστή** (βλέπε ορ. 7.5), τότε χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\oiint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

Θεώρημα 7.2 Εστω $\mathbf{r}: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ είναι μια παραμετροποίηση μιας απλής και λείας επιφάνειας πάνω σε τόπο D και έστω $\mathbf{F},\mathbf{G}:\Sigma\to\mathbb{R}^3$ είναι δυο συνεχή διανυσματικά πεδία πάνω στην επιφάνεια Σ. Τότε

(α) ***Η τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος*** $\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ ***εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας.***

(β) $\iint_\Sigma (c_1\mathbf{F}+c_2\mathbf{G})\cdot d\mathbf{S} = c_1\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + c_2\iint_\Sigma \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S},\ (c_1,c_2\in\mathbb{R})$.

(γ) Αν η Σ είναι λεία επιφάνεια και συντίθεται π.χ. από δυο λείες επιφάνειες Σ_1 και Σ_2, τότε

$$\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S_1} + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S_2} = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F}\cdot \mathbf{n_{0,1}} dS_1 + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F}\cdot \mathbf{n_{0,2}} dS_2\ .$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Οι κάθετες $\mathbf{n_{0,1}}$ και $\mathbf{n_{0,2}}$ εκλέγονται έτσι ώστε να ταυτίζονται με τον προσανατολισμό της επιφάνειας Σ.

(δ) Αν $M = \sup\{|\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}| : P\in\Sigma\}$ και αν $E(\Sigma)$ είναι το εμβαδόν της Σ, τότε

$$\left|\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\right| \le M\cdot E(\Sigma).$$

(ε) Αν $\phi: D\to R:\ \phi(P) = (a(P), b(P)),\ (D, R\subset\mathbb{R}^2)$ είναι ένα συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο με $\dfrac{D(a,b)}{D(x,y)} > 0\ \forall P\in D$, τότε

$$\iint_{\Sigma\circ\phi}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}_{\Sigma\circ\phi} = \iint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}_{\Sigma}\,.$$

Παρατηρήσεις: (α) Αν η επιφάνεια Σ ορίζεται μέσω της σχέσης $z=g(x,y),\ (x,y)\in D$, τότε μια προφανής παραμετροποίηση αυτής είναι η $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,g(x,y))$, οπότε

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{D}\mathbf{F}(x,y,g(x,y))\cdot(-g_x,-g_y,1)dxdy\,.$$

(β) Εστω $\mathbf{F}:\Sigma\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\ \mathbf{F}(Q)=(f_1(Q),f_2(Q),f_3(Q))$ είναι ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο επί απλής και λείας επιφάνειας Σ με παραμετροποίηση $\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας Σ ικανοποιεί την

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$$

συνεπώς

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{n},\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{n},\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{n},$$

όπου $\mathbf{i}=(1,0,0),\ \mathbf{j}=(0,1,0),\ \mathbf{k}=(0,0,1)$. Αρα

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

$$=\iint_{D}\left(f_1(\mathbf{r}(P))\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+f_2(\mathbf{r}(P))\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+f_3(\mathbf{r}(P))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)dudv\,,$$

όπου $P=(u,v)\in D$, ή

$$\boxed{\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{\Sigma}f_1\cdot(\mathbf{i}\cdot\mathbf{n_0})dS+\iint_{\Sigma}f_2\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n_0})dS+\iint_{\Sigma}f_3\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_0})dS}\,.$$

Θέτοντας

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}dudv=dydz,\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)}dudv=dzdx,\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv=dxdy\,,$$

η παραπάνω γράφεται επίσης ως

$$\boxed{\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_\Sigma f_1 dydz + f_2 dzdx + f_3 dxdy}\,.$$

Γενικότερα, η ποσότητα

$$f_1 dydz + f_2 dzdx + f_3 dxdy$$

καλείται ***διαφορική μορφή 2ης τάξης*** και τα επιμέρους ολοκληρώματα $\iint_\Sigma f_1 dydz$, $\iint_\Sigma f_2 dzdx$, $\iint_\Sigma f_3 dxdy$ που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{cases} \iint_\Sigma f_1 dydz = \iint_\Sigma f_1 \cdot (\mathbf{i}\cdot\mathbf{n_0})\, dS \\ \iint_\Sigma f_2 dzdx = \iint_\Sigma f_2 \cdot (\mathbf{j}\cdot\mathbf{n_0})\, dS \\ \iint_\Sigma f_3 dxdy = \iint_\Sigma f_3 \cdot (\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_0})\, dS \end{cases},$$

καλούνται **επιφανειακά ολοκληρώματα 2ου είδους**. Αν η επιφάνεια Σ είναι εκ των προτέρων προσανατολισμένη από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{N}_0$, τότε $\mathbf{N}_0 = \pm\mathbf{n}_0$ και

$$\begin{cases} \iint_\Sigma f_1 dydz = \iint_\Sigma f_1 \cdot (\mathbf{i}\cdot\mathbf{N_0})\, dS = \pm\iint_\Sigma f_1 \cdot (\mathbf{i}\cdot\mathbf{n_0})\, dS \\ \iint_\Sigma f_2 dzdx = \iint_\Sigma f_2 \cdot (\mathbf{j}\cdot\mathbf{N_0})\, dS = \pm\iint_\Sigma f_2 \cdot (\mathbf{j}\cdot\mathbf{n_0})\, dS \\ \iint_\Sigma f_3 dxdy = \iint_\Sigma f_3 \cdot (\mathbf{k}\cdot\mathbf{N_0})\, dS = \pm\iint_\Sigma f_3 \cdot (\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_0})\, dS \end{cases}.$$

7.5. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ (GAUSS)

Το Θεώρημα της απόκλισης μας λέει ότι η ροή ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ που διέρχεται από μια ***κλειστή*** επιφάνεια Σ (με την έννοια του ορισμού 7.5) ισούται με το τριπλό ολοκλήρωμα της απόκλισης $\nabla\cdot\mathbf{F}$ επί του στερεού του $\mathbb{R}^3$ που έχει ως σύνορο την κλειστή επιφάνεια Σ. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

Θεώρημα 7.3 (Απόκλισης Gauss) Εστω Ω είναι ένα φραγμένο ***κανονικό*** στερεό του $\mathbb{R}^3$ (με την έννοια που δόθηκε στο Κεφ. 5) με το σύνορό του $\partial\Omega$ να είναι μία ***απλή, κλειστή, τμηματικά λεία επιφάνεια με την κάθετο αυτής να έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική όψη της*** και έστω $\mathbf{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω και στο εσωτερικό της επιφάνειας $\partial\Omega$. Τότε η ροή του πεδίου $\mathbf{F}$ διαμέσου της επιφάνειας $\partial\Omega$ είναι

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega \nabla\cdot\mathbf{F}(x,y,z)\; dxdydz.}$$

Απόδειξη. Εστω Ω είναι ένα **κανονικό** στερεό Ω του $\mathbb{R}^3$ και $\mathbf{F} = \left(K(P), L(P), M(P)\right)$. Τότε έχουμε

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\partial\Omega} K \cdot \left(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n_0}\right) dS + \oiint_{\partial\Omega} L \cdot \left(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n_0}\right) dS + \oiint_{\partial\Omega} M \cdot \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n_0}\right) dS .$$

Απ' την άλλη πλευρά, εφόσον $\nabla \cdot \mathbf{F} = K_x + L_y + M_z$ παίρνουμε

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}\ dxdydz = \iiint_{\Omega} K_x\ dxdydz + \iiint_{\Omega} L_y\ dxdydz + \iiint_{\Omega} M_z\ dxdydz .$$

Από τις παραπάνω ισότητες είναι προφανές ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{cases} \oiint_{\partial\Omega} K \cdot \left(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n_0}\right) dS = \iiint_{\Omega} K_x\ dxdydz \\ \oiint_{\partial\Omega} L \cdot \left(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n_0}\right) dS = \iiint_{\Omega} L_y\ dxdydz \\ \oiint_{\partial\Omega} M \cdot \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n_0}\right) dS = \iiint_{\Omega} M_z\ dxdydz \end{cases} .$$

Θα δείξουμε την τελευταία. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες. Εξ υποθέσεως το στερεό Ω είναι κανονικό, άρα είναι κανονικό και ως προς *x* και ως προς *y* και ως προς *z*. Αφού το Ω είναι κανονικό ως προς *z* υπάρχουν δυο συνεχείς συναρτήσεις $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ επί φραγμένου χωρίου $D_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ που είναι η προβολή του χωρίου Ω πάνω στο επίπεδο *Oxy* έτσι ώστε

$$\Omega = \left\{(x,y,z):\ (x,y) \in D,\ f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\right\} .$$

Αρα από τη θεωρία του Κεφ. 5 έχουμε:

$$\iiint_{\Omega} M_z\ dxdydz = \iint_{D_{xy}} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} M_z dzdxdy = \iint_{D_{xy}} M\left(x, y, f_2(x,y)\right) dxdy$$

$$- \iint_{D_{xy}} M\left(x, y, f_1(x,y)\right) dxdy .$$

Από την άλλη πλευρά, το σύνορο $\partial\Omega$ της επιφάνειας μπορεί να αναλυθεί σε ένωση $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ τριών ξένων μεταξύ τους επιφανειών, όπου Σ_1 είναι η επιφάνεια με εξίσωση $z = f_1(x,y)$, Σ_2 είναι η επιφάνεια με εξίσωση $z = f_2(x,y)$ και Σ_3 είναι η παράπλευρη επιφάνεια του χωρίου, δηλαδή η κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες στον άξονα των *z*. Υπενθυμίζουμε ότι η επιφάνεια $\partial\Omega$ είναι προσανατολισμένη. Τότε:

$$\oiint_{\partial\Omega} M\cdot\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_0}\right)dS=\iint_{\Sigma_1} M\cdot\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_{1,0}}\right)dS+\iint_{\Sigma_2} M\cdot\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_{2,0}}\right)dS+\iint_{\Sigma_3} M\cdot\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_{3,0}}\right)dS$$

Αλλά εξ υποθέσεως η κάθετος της $\partial\Omega$ έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική όψη της επιφάνειας, άρα $\mathbf{n_{2,0}}=-\mathbf{n_{1,0}}$ και $\mathbf{n_{3,0}}\perp\mathbf{k}$. Ετσι:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} M\cdot\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_{1,0}}\right)dS&=-\iint_{\Sigma_1} M\cdot\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_{2,0}}\right)dS\\&=-\iint_{D_{xy}} M\left(x,y,f_1(x,y)\right)\cdot\left((0,0,1)\cdot\left(-f_{2x},-f_{2y},1\right)\right)dxdy\\&=-\iint_{D_{xy}} M\left(x,y,f_1(x,y)\right)dxdy.\end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} M\cdot\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_{2,0}}\right)dS&=\iint_{D_{xy}} M\left(x,y,f_2(x,y)\right)\cdot\left((0,0,1)\cdot\left(-f_{2x},-f_{2y},1\right)\right)dxdy\\&=\iint_{D_{xy}} M\left(x,y,f_2(x,y)\right)dxdy\end{aligned}$$

και τέλος

$$\iint_{\Sigma_3} M\cdot\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_{3,0}}\right)dS=0.$$

Αθροίζοντας τις τρεις τελευταίες ισότητες παίρνουμε το ζητούμενο.

Πόρισμα 7.1 Εστω $\mathbf{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους επί ***κανονικού*** στερεού Ω του $\mathbb{R}^3$ με το σύνορο αυτού $\partial\Omega$ να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Gauss. Αν το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι ***ασυμπίεστο*** (δηλαδή $\nabla\cdot\mathbf{F}(P)=0\ \forall P\in\Omega$), τότε η ροή του $\mathbf{F}$ διαμέσου της επιφάνειας $\partial\Omega$ είναι ***μηδενική***, δηλαδή

$$\oiint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=0.$$

Παρατηρήσεις: (α) Το Θεώρημα της απόκλισης **<u>γενικεύεται και σε μη κανονικά στερεά</u>** του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι, έστω $\Omega_1,...,\Omega_n$ είναι κανονικά στερεά, ξένα μεταξύ τους ανά δύο που περιέχονται εντός άλλου κανονικού στερεού Ω_0 και έστω

$$\Omega=\Omega_0-\left(\cup_{i=1}^{n}\Omega_i\right).$$

Αν $\partial\Omega_0,\partial\Omega_1,...,\partial\Omega_n$ είναι απλές, κλειστές, λείες επιφάνειες με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα αυτών να δείχνει προς την εξωτερική όψη των

στερεών Ω_i) και αν $\mathbf{F}:\Omega \to \mathbb{R}^3$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους επί του στερεού Ω, τότε

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega_0} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} \oiint_{\partial\Omega_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\mathbf{F}\left(x,y,z\right)\, dxdydz.}$$

Ειδικά στην περίπτωση κατά την οποία υπάρχει (έστω και) ένα *ανώμαλο σημείο* P_0 ***ενός ασυμπίεστου*** πεδίου $\mathbf{F}$ εντός του στερεού Ω, τότε θεωρούμε μια προσανατολισμένη σφαιρική μπάλα $S_\varepsilon(P_0)$ κέντρου P_0 και ακτίνας ε εντός του στερεού Ω και χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισότητα παίρνουμε:

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega_0} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{S} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \oiint_{\partial S_\varepsilon(P_0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.}$$

Γενικότερα, έστω $\mathbf{F}$ ***είναι ασυμπίεστο*** πεδίο σε κανονικό στερεό Ω με σύνορο $\partial\Omega$ να είναι μια απλή, κλειστή και λεία επιφάνεια. Αν

(i) Σ είναι στερεό εντός του Ω, δηλαδή $\Sigma \subset \Omega$ και

(ii) το σύνορο $\partial\Sigma$ του Σ είναι μια κλειστή, λεία και θετικά προσανατολισμένη επιφάνεια (με κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{N_0}$), τότε με εφαρμογή του Πορίσματος 7.1 παίρνουμε άμεσα ότι

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{S} = \oiint_{\partial\Sigma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \Leftrightarrow \oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n_0} dS = \oiint_{\partial\Sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N_0} dS.}$$

Με άλλα λόγια η ροή διά μέσου της Σ ισούται με τη ροή δια μέσου της Ω. Δηλαδή η ροή δεν εξαρτάται από τη μορφή της επιφάνειας.

(γ) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Gauss για να δώσουμε μια φυσική ερμηνεία της απόκλισης. Πράγματι με χρήση του Θεωρήματος μέσης τιμής για τριπλά ολοκληρώματα έχουμε

$$\iiint_{\Omega} \nabla\cdot\mathbf{F}\left(x,y,z\right)\, dxdydz = \nabla\cdot\mathbf{F}\left(P^*\right)V\left(\Omega\right)$$

για κάποιο σημείο $P^* \in \Omega$, όπου $V\left(\Omega\right)$ είναι ο όγκος του χωρίου Ω. Αρα με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss παίρνουμε

$$\nabla\cdot\mathbf{F}\left(P^*\right) = \frac{\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}}{V\left(\Omega\right)}.$$

Αν λοιπόν P_0 είναι ένα σημείο του Ω και αν θεωρήσουμε μια σφαιρική μπάλα $S_\varepsilon(P_0)$ κέντρου P_0 και μικρής ακτίνας ε, τότε από τα παραπάνω υπάρχει σημείο $P^* \in S_\varepsilon(P_0)$ έτσι ώστε

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(P^*) = \frac{\oiint_{\partial S_\varepsilon(P_0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{V(S_\varepsilon(P_0))}.$$

Αφήνοντας $\varepsilon \to 0$, έχουμε $P^* \to P_0$, οπότε:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(P_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oiint_{\partial S_\varepsilon(P_0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{V(S_\varepsilon(P_0))}.$$

Με άλλα λόγια η απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}(P_0)$ είναι η οριακή τιμή της ροής ανά μονάδα όγκου στο σημείο P_0.

7.6. ΤΥΠΟΣ STOKES

Ο τύπος Stokes είναι το ανάλογο του Θεωρήματος Green, αλλά για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$. Υπενθυμίζουμε ότι αν Σ είναι μια λεία και προσανατολισμένη επιφάνεια, c είναι μία απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη επί της Σ και $\mathbf{n}$ είναι το κάθετο διάνυσμα μιας προσανατολισμένης επιφάνειας, τότε λέμε ότι η καμπύλη c είναι θετικά προσανατολισμένη, εάν κινούμενοι κατά μήκος της καμπύλης με το κεφάλι μας στην κατεύθυνση του $\mathbf{n}$, αφήνουμε πάντα στο αριστερό μας χέρι εκείνο το τμήμα της επιφάνειας που βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης c.

Θεώρημα 7.4 (Stokes) Έστω Σ είναι μια ***<u>ανοικτή (δηλ. έχει μη κενό σύνορο</u>*** $\partial\Sigma$***), απλή, λεία και <u>προσανατολισμένη</u> επιφάνεια*** με παραμετροποίηση

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ x \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

τέτοια ώστε η $\mathbf{r}$ ***δέχεται συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης*** επί ***κανονικού*** χωρίου D. Εστω ότι μεταβαίνουμε από τη μια όψη της επιφάνειας στην άλλη μέσω μια απλής, κλειστής **<u>θετικά προσανατολισμένης</u>** και τμηματικά λείας καμπύλης c (η οποία είναι το σύνορο $\partial\Sigma$ της επιφάνειας Σ). Εάν $\mathbf{F}: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ είναι ένα **συνεχώς διαφορίσιμο πεδίο** επί της Σ, τότε:

$$\boxed{\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\Sigma \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}.$$

Απόδ. Η απόδειξη παραλείπεται.

Παρατηρήσεις: (α) Το Θεώρημα γενικεύεται και για μη κανονικά χωρία *D*.

(β) Εάν $\mathbf{F}$ είναι ένα **συνεχώς διαφορίσιμο πεδίο** επί ***κλειστής***, λείας και προσανατολισμένης επιφάνειας Σ, τότε:

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.}$$

Πράγματι, έστω ένα επίπεδο Ε που τέμνει την επιφάνεια Σ σε δύο επιφάνειες Σ_1 και Σ_2, και έστω c είναι μια απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελεί το κοινό σύνορο των επιφανειών Σ_1 και Σ_2. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Stokes παίρνουμε

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \text{ και } \oint_{-c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Αρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$0 = \iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

(γ) Αν Σ_1 και Σ_2 είναι δυο απλές, ***ανοικτές***, λείες, προσανατολισμένες επιφάνειες ***με τον ίδιο προσανατολισμό*** που έχουν **κοινό σύνορο** μια κλειστή καμπύλη c, τότε

$$\iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

(δ) Το Θεώρημα Stokes έχει την ακόλουθη φυσική ερμηνεία: Η κυκλοφορία ενός πεδίου $\mathbf{F}$ κατά μήκος κλειστής καμπύλης *c*, ισούται με τη ροή της περιστροφής του πεδίου που διέρχεται δια μέσου επιφάνειας Σ με σύνορο την καμπύλη *c*.

(δ) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Stokes για να δώσουμε μια φυσική ερμηνεία της περιστροφής πεδίου $\mathbf{F}$ σε σημείο P_0. Πράγματι με χρήση του Θεωρήματος μέσης τιμής για επιφανειακά ολοκληρώματα έχουμε

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \left(\nabla \times \mathbf{F}\left(P^*\right) \cdot \mathbf{n_0}\right) E(\Sigma)$$

για κάποιο σημείο $P^* \in \Sigma$, όπου $E(\Sigma)$ είναι το εμβαδόν της επιφάνειας Σ. Αρα με εφαρμογή του θεωρήματος Stokes παίρνουμε

$$\nabla \times \mathbf{F}\left(P^*\right) = \frac{\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{E(\Sigma)},$$

όπου c είναι κλειστή τμηματικά λεία και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη θεωρούμενης ως το σύνορο της επιφάνειας Σ. Αν λοιπόν P_0 είναι ένα σημείο της επιφάνειας Σ και αν θεωρήσουμε έναν κύκλο $D_\varepsilon\left(P_0\right)$ κέντρου P_0 και μικρής ακτίνας ε επί του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο P_0 και είναι κάθετος στο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n_0}$ της επιφάνειας Σ, τότε από τα παραπάνω υπάρχει σημείο $P^* \in S_\varepsilon\left(P_0\right)$ έτσι ώστε

$$\nabla \times \mathbf{F}\left(P^*\right) = \frac{\oint_{D_\varepsilon(P_0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\pi\varepsilon^2}.$$

Αφήνοντας $\varepsilon \to 0$, έχουμε $P^* \to P_0$, οπότε:

$$\nabla \times \mathbf{F}\left(P_0\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint_{D_\varepsilon(P_0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\pi\varepsilon^2}.$$

Με άλλα λόγια η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}\left(P_0\right)$ είναι η οριακή τιμή της κυκλοφορίας του πεδίου ανά μονάδα εμβαδού στο σημείο P_0. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ μας δίνει ένα μέτρο της συνολικής κυκλοφορίας/περιστροφής του πεδίου κατά μήκος της καμπύλης c.

7.7 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογισθεί το εμβαδόν σφαίρας Σ με εξίσωση $\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 + \left(z-c\right)^2 = R^2$.

Λύση. Αρχικά παραμετροποιούμε τη σφαίρα με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων ως εξής:

$$\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{r} = \mathbf{r}\left(\theta, \phi\right),$$

όπου

$$\mathbf{r}\left(\theta,\phi\right) = \left(a + R\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi,\ b + R\eta\mu\theta\eta\mu\phi,\ c + R\sigma\upsilon\nu\phi\right),\ \theta \in \left[0, 2\pi\right),\ \phi \in \left[0, \pi\right]$$

Από τη θεωρία ισχύει:

$$E(S)=\underbrace{\iint_S 1\,dS}_{\substack{\text{επιφανειακό ολοκλήρωμα του}\\ \text{βαθμωτού πεδίου } f(P)=1 \text{ πάνω}\\ \text{στην επιφάνεια } S}}=\underbrace{\iint_D \left|\mathbf{n}(\theta,\phi)\right| d\theta d\phi}_{\substack{\text{σύνθες διπλό ολοκλήρωμα του μέτρου } |\mathbf{n}|\\ \text{πάνω στο πεδίο ορισμού D μιας παραμετρο-}\\ \text{ποίησης } \mathbf{r} \text{ της επιφάνειας } S)}}$$

Το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ της σφαίρας S ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\phi=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -R\eta\mu\theta\eta\mu\phi & R\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi & 0\\ R\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\phi & R\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\phi & -R\eta\mu\phi\end{vmatrix}$$

$$=\left(-R^2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\phi,\ -R^2\eta\mu\theta\eta\mu^2\phi,\ -R^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\right).$$

Αρα:

$$|\mathbf{n}|=\left|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\phi\right|=\sqrt{R^4\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu^4\phi+R^4\eta\mu^2\theta\eta\mu^4\phi+R^4\eta\mu^2\phi\sigma\upsilon\nu^2\phi}=R^2\eta\mu\phi.$$

Τελικά:

$$E(S)=\iint_D\left|\mathbf{n}(\theta,\phi)\right|d\theta d\phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}R^2\eta\mu\phi\ d\theta d\phi=4\pi R^2,$$

όπου $D=\left\{(\theta,\phi):\ \theta\in[0,2\pi),\ \phi\in[0,\pi]\right\}$.

2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τμήματος του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ που αποκόπτεται από τον ελλειπτικό κύλινδρο $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=c^2,\ (a,b,c>0)$.

Λύση. Από την εκφώνηση προκύπτει ότι η προβολή στο επίπεδο Oxy της τομής του παραβολοειδούς με τον κύλινδρο είναι το χωρίο

$$D=\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2\right\}.$$

Μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του εμβαδού του τμήματος της επιφάνειας του παραβολοειδούς που όταν προβάλλεται στο επίπεδο Oxy μας δίνει το χωρίο D. Εφόσον η επιφάνεια ορίζεται ως συνάρτηση $z=f(x,y)$, μια προφανής παραμετροποίηση του παραβολοειδούς (επί του χωρίου D που μας ενδιαφέρει) είναι η εξής:

$$\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{r}(x,y) = \left(x,\ y,\ \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \right).$$

Από τη θεωρία ισχύει:

$$E(S) = \underbrace{\iint_S 1\, dS}_{\substack{\text{επιφανειακό ολοκλήρωμα του} \\ \text{βαθμωτού πεδίου } f(P)=1 \text{ πάνω} \\ \text{στην επιφάνεια } S}} = \underbrace{\iint_D \left|\mathbf{n}(x,y)\right| dxdy}_{\substack{\text{σύνηθες διπλό ολοκλήρωμα του μέτρου } |\mathbf{n}| \\ \text{πάνω στο πεδίο ορισμού } D \text{ μιας παραμετρο-} \\ \text{ποίησης } \mathbf{r} \text{ της επιφάνειας } S)}}$$

Το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ της επιφάνειας ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{x}{a} \\ 0 & 1 & \frac{y}{b} \end{vmatrix} = \left(-\frac{x}{a},\ -\frac{y}{b},\ 1 \right).$$

Αρα:

$$|\mathbf{n}| = \left|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\right| = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}\,.$$

Τελικά:

$$E(S) = \iint_D \left|\mathbf{n}(x,y)\right| dxdy = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le c^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}\ dxdy\,.$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $\begin{cases} x = a\rho\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = b\rho\eta\mu\theta \end{cases}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\rho > 0$, οπότε το χωρίο D μετασχηματίζεται στο χωρίο

$$R = \left\{ (\rho, \theta) :\ 0 < \rho \le c,\ 0 \le \theta < 2\pi \right\}$$

και έτσι έχουμε

$$E(S) = \iint_R \sqrt{\rho^2 + 1}\ |ab| \rho d\rho d\theta = ab \int_0^{2\pi} \int_0^c \rho \sqrt{\rho^2 + 1}\ d\rho d\theta$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^c \sqrt{\rho^2 + 1}\ d\left(\rho^2 + 1\right) d\theta = \frac{2\pi ab}{3} \left[\left(1 + c^2\right)^{3/2} - 1 \right].$$

3. Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_\Sigma z^2 dS$, όπου Σ είναι το τμήμα του κώνου με εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ για κάθε (x, y) στο δακτύλιο $D = \left\{ (x,y) :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \right\}$.

Λύση. Από τη θεωρία ισχύει:

$$\underbrace{\iint_{\Sigma} f(P)\, dS}_{\substack{\text{επιφανειακό ολοκλήρωμα του} \\ \text{βαθμωτού πεδίου } f(P) \text{ πάνω} \\ \text{στην επιφάνεια } \Sigma}} = \underbrace{\iint_{D} f(\mathbf{r}(P))\, |\mathbf{n}(P)|\, dP}_{\substack{\text{σύνηθες διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης } f(\mathbf{r}(P))|\mathbf{n}(P)| \\ \text{πάνω στο πεδίο ορισμού } D \text{ μιας παραμετροποίησης } \mathbf{r} \text{ της} \\ \text{επιφάνειας } \Sigma)}}$$

Εφόσον η Σ ορίζεται μέσω συνάρτησης $z = f(x, y)$, μια προφανής παραμετροποίηση της Σ είναι η

$$\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{r}(x, y) = \left(x,\ y,\ \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

για κάθε σημείο *P* επί του δακτυλίου *D*. Το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ της επιφάνειας Σ ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ 1 \right).$$

Αρα $|\mathbf{n}| = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{2}$, οπότε

$$\iint_{\Sigma} z^2 dS = \iint_{D} \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^3 d\rho d\theta$$

$$= \sqrt{2} \cdot 2\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_1^2 = 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{15\pi}{\sqrt{2}}.$$

4. Να υπολογισθεί η μάζα που κατανέμεται επί του ημισφαιρίου $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $a > 0$ αν η πυκνότητα μάζας δίνεται από τη συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Λύση. Η μάζα ισούται με την τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος 1ου είδους

$$M = \iint_{\Sigma} f(P)\, dS = \iint_{D} f(\mathbf{r}(P))\, |\mathbf{n}(P)|\, dP.$$

Μια προφανής παραμετροποίηση του ημισφαιρίου Σ είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{r}(x,y)=\left(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right),$$

για κάθε $(x,y)\in D=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le a^2\right\}$. Το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ της επιφάνειας ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\\ 0 & 1 & \dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\end{vmatrix}=\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ 1\right).$$

Αρα $|\mathbf{n}|=|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y|=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, οπότε

$$M=\iint_D f\left(\mathbf{r}(P)\right)\ |\mathbf{n}(P)|dP=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=a\iint_D 1dxdy=a\cdot E(D)=a\cdot\pi a^2=\pi a^3.$$

5. Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα 2ου είδους $\oiint_\Sigma zdxdy$ πάνω στην επιφάνεια σφαίρας με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Λύση. Αρχικά παραμετροποιούμε τη σφαίρα με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων ως εξής:

$$\mathbf{r}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(\theta,\phi),$$

όπου

$$\mathbf{r}(\theta,\phi)=(a\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi,\ a\eta\mu\theta\eta\mu\phi,\ a\sigma\upsilon\nu\phi),\ \theta\in[0,2\pi),\ \phi\in[0,\pi]$$

Από την παρατήρηση στο τέλος της παραγράφου 4 αυτού του κεφαλαίου έχουμε

$$\oiint_\Sigma zdxdy=\iint_D a\sigma\upsilon\nu\phi\frac{D(x,y)}{D(\theta,\phi)}d\theta d\phi$$

$$= \iint_D a\sigma\upsilon\nu\phi \begin{vmatrix} -a\eta\mu\theta\eta\mu\phi & a\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\phi \\ a\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\phi & a\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\phi \end{vmatrix} d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} -a^3\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu^2\phi d\theta d\phi = 2\pi a^3 \left.\frac{\sigma\upsilon\nu^3\phi}{3}\right|_0^{\pi} = -\frac{4\pi a^3}{3}.$$

Σημείωση. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ της σφαίρας ορίζεται μέσω της σχέσης (βλέπε λυμένη άσκηση 1):

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = \left(-a^2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\phi,\ -a^2\eta\mu\theta\eta\mu^2\phi,\ -a^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\right)$$

$$= -a\eta\mu\phi\left(a\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi,\ a\eta\mu\theta\eta\mu\phi,\ a\sigma\upsilon\nu\phi\right)$$

$$= -a\eta\mu\phi\cdot\left(x, y, z\right) = -a\eta\mu\phi\cdot\mathbf{r},$$

καθώς επίσης και τη σχέση $\oiint_\Sigma z dxdy = \iint_D \mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n_0}\right)dS$, όπου $\mathbf{F} = \left(0, 0, z\right)$ η φυσική ερμηνεία του επιφανειακού ολοκληρώματος είναι ότι έχουμε εκροή από τη σφαίρα κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{k}$ με ρυθμό $4\pi a^3/3$ μονάδες όγκου ανά μονάδα χρόνου.

6. Να υπολογισθεί η ροή Φ του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = y\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}$, δια μέσου του τμήματος Σ της επιφάνειας παραβολοειδούς $z = 4 - x^2 - y^2$ που βρίσκεται στα θετικά z.

Λύση. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$\Phi = \iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(u,v\right)\right)\cdot\mathbf{n}\left(u,v\right)dudv.$$

Η επιφάνεια Σ είναι απλή και λεία, άρα και προσανατολίσιμη. Μια προφανής παραμετροποίηση αυτής είναι η:

$$\mathbf{r}: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3:\ \mathbf{r}\left(x,y\right) = \left(x, y, 4 - x^2 - y^2\right),$$

όπου $D = \left\{\left(x, y\right):\ x^2 + y^2 \le 4\right\}$ είναι η προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο Oxy. Το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ της επιφάνειας ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \left(2x,\ 2y,\ 1\right).$$

Τότε:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{S} = \iint_{D} \left(0, y, 4 - x^2 - y^2\right) \cdot \left(2x, 2y, 1\right) \, dxdy$$

$$= \iint_{D} \left(2y^2 + 4 - x^2 - y^2\right) \, dxdy = \iint_{D} \left(4 - x^2 + y^2\right) \, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(4 - \rho^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta + \rho^2 \eta\mu^2\theta\right) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(4\rho - \rho^3 \cdot \eta\mu\left(2\theta\right)\right) d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} 2\rho^2 - \frac{\rho^4 \eta\mu\left(2\theta\right)}{4} \Bigg|_0^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(8 - 4\eta\mu\left(2\theta\right)\right) d\theta = 16\pi \, .$$

Σημείωση: Το πρόσημο της ροής (στην προκειμένη περίπτωση θετικό) σημαίνει ότι έχουμε ροή προς την κατεύθυνση του καθέτου διανύσματος $\mathbf{n}$ της επιφάνειας.

7. Να υπολογισθεί η ροή Φ του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = \left(yz, \, xz, \, xy\right)$ που διέρχεται δια μέσου κλειστής, θετικά προσανατολισμένης επιφάνειας Σ, η οποία ορίζεται ως το σύνορο τετραέδρου Ω το οποίο φράσσεται από τα επίπεδα με εξισώσεις $x = 0, \; y = 0, \; z = 0$ και $x + y + z = a$.

Λύση. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης και έχουμε

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}\left(P\right) dP = \iiint_{\Omega} \left(K_x + L_y + M_z\right) dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(0 + 0 + 0\right) dxdydz = 0 \, .$$

8. Εάν $\mathbf{F} = \left(x^2, y^2, z^2\right)$, επαληθεύστε το θεώρημα απόκλισης για την επιφάνεια $\partial\Pi$ που αποτελεί το σύνορο του κύβου $\Pi = \left[0, a\right]^3$.

Απάντηση: Εφόσον το σύνορο $\partial\Pi$ του κύβου είναι κλειστή, τμηματικά λεία επιφάνεια και το πεδίο $\mathbf{F} = \left(K, L, M\right) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ είναι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στον κύβο Π μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης.

Επιφάνεια	Παραμετροποίηση	Κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$	Προς τα έξω προσανατολισμένο κάθετο διάνυσμα
$x = 0$	$\mathbf{r}_1=(0,y,z)$	$\mathbf{n_1}=\mathbf{i}=(1,0,0)$	$-\mathbf{n_1}=(-1,0,0)$
$x = \alpha$	$\mathbf{r}_2=(a,y,z)$	$\mathbf{n_2}=\mathbf{i}=(1,0,0)$	$\mathbf{n_2}=(1,0,0)$
$y = 0$	$\mathbf{r}_3=(x,0,z)$	$\mathbf{n_3}=-\mathbf{j}=(0,-1,0)$	$\mathbf{n_3}=(0,-1,0)$
$y = a$	$\mathbf{r}_4=(x,a,z)$	$\mathbf{n_4}=-\mathbf{j}=(0,-1,0)$	$-\mathbf{n_4}=(0,1,0)$
$z = 0$	$\mathbf{r}_5=(x,y,0)$	$\mathbf{n_5}=\mathbf{k}=(0,0,1)$	$-\mathbf{n_5}=(0,0,-1)$
$z = a$	$\mathbf{r}_6=(x,y,a)$	$\mathbf{n_6}=\mathbf{k}=(0,0,1)$	$\mathbf{n_6}=(0,0,1)$

Τότε χρησιμοποιώντας την τελευταία στήλη του παραπάνω πίνακα έχουμε:

$$\oiint_{\partial\Pi}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{D_1}\mathbf{F}\left(\mathbf{r_1}(u,v)\right)\cdot\left(-\mathbf{n_1}\right)(u,v)dudv+\iint_{D_2}\mathbf{F}\left(\mathbf{r_2}(u,v)\right)\cdot\mathbf{n_2}(u,v)dudv$$

$$+\iint_{D_3}\mathbf{F}\left(\mathbf{r_3}(u,v)\right)\cdot\mathbf{n_3}(u,v)dudv+\iint_{D_4}\mathbf{F}\left(\mathbf{r_4}(u,v)\right)\cdot\left(-\mathbf{n_4}(u,v)\right)dudv$$

$$+\iint_{D_5}\mathbf{F}\left(\mathbf{r_5}(u,v)\right)\cdot\left(-\mathbf{n_5}(u,v)\right)dudv+\iint_{D_6}\mathbf{F}\left(\mathbf{r_6}(u,v)\right)\cdot\mathbf{n_6}(u,v)dudv$$

$$=\int_0^a\int_0^a 0\ dydz+\int_0^a\int_0^a a^2\ dydz$$

$$+\int_0^a\int_0^a 0\ dxdz+\int_0^a\int_0^a a^2\ dxdz$$

$$+\int_0^a\int_0^a 0\ dxdy+\int_0^a\int_0^a a^2\ dxdy\ =a^4+a^4+a^4=3a^4.$$

Με άλλα λόγια η ροή του πεδίου εξέρχεται δια μέσου του κύβου. Απ' την άλλη πλευρά χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης παίρνουμε

$$\iiint_\Pi\nabla\cdot\mathbf{F}(P)dP=\iiint_\Pi\left(K_x+L_y+M_z\right)dxdydz=\iiint_\Pi(2x+2y+2z)dxdydz$$

$$=\int_0^a\int_0^a\int_0^a(2x+2y+2z)dzdydx=3a^4.$$

9. Εστω ότι στην αρχή καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων είναι τοποθετημένο ένα ακίνητο σημειακό φορτίο q. Υπολογίστε τη ροή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathbf{E}:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}^3:\ \mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\mathbf{r_0}$$

δια μέσου οποιασδήποτε κλειστής, λείας και θετικά προσανατολισμένης επιφάνειας που περιέχει το φορτίο q στο εσωτερικό της. Θεωρήστε $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r_0} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

Λύση. Υπενθυμίζουμε ότι το πεδίο της έντασης είναι ασυμπίεστο στον $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Εστω $K = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$. Πράγματι, μέσω της γνωστής σχέσης $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\ \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}\ \nabla f$ παίρνουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \left(\frac{K}{r^3}\mathbf{r} \right) = \nabla \left(\frac{K}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{K}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{-3K\mathbf{r}}{r^5} \cdot \mathbf{r} + \frac{3K}{r^3}$$

$$= \frac{-3K|\mathbf{r}|^2}{r^5} + \frac{3K}{r^3} = 0 .$$

Εστω Ω είναι φραγμένο στερεό με σύνορο την επιφάνεια Σ. Εφόσον το στερεό Ω περιέχει το ανώμαλο σημείο του πεδίου (δηλαδή το πεδίο δεν είναι παντού διαφορίσιμο στο εσωτερικό της επιφάνειας Σ), το Ω δεν είναι κανονικό στερεό και άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρ. 7.3.

Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε το Θεώρημα απόκλισης στο στερεό $\Omega - S_\varepsilon$, όπου S_ε είναι μια σφαιρική μπάλα ακτίνας ε επιλεγμένη έτσι ώστε να περιέχει το φορτίο q ως κέντρο της και η σφαίρα ∂S_ε είναι θετικά προσανατολισμένη. Τότε από το Θεώρημα απόκλισης για μη κανονικά στερεά συν το γεγονός ότι το πεδίο της έντασης είναι ασυμπίεστο επί του στερεού $\Omega - S_\varepsilon$ (που δεν περιέχει πλέον την ανωμαλία) έχουμε:

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.}$$

Εφόσον $d\mathbf{S} = \mathbf{n_0} dS$, όπου το $\mathbf{n_0}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της σφάιρας με φορά προς το εξωτερικό της σφαίρας, η παραπάνω ισότητα γίνεται:

$$\oiint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n_0} dS = \oiint_{\partial S_\varepsilon} |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{n_0}| \sigma\upsilon\nu(\mathbf{E}, \mathbf{n_0}) dS$$

$$= \pm \oiint_{\partial S_\varepsilon} |\mathbf{E}| dS ,$$

διότι ισχύει $\mathbf{E} // \mathbf{n_0}$ σε κάθε σημείο της σφαίρας. **<u>Επειδή όμως το μέτρο της έντασης είναι σταθερό σε κάθε σημείο της σφαίρας</u>** ∂S_ε **<u>με τιμή</u>**

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{\varepsilon^2},$$

τελικά έχουμε

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\partial S_\varepsilon} |\mathbf{E}| dS = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{\varepsilon^2}\oiint_{\partial S_\varepsilon} 1\, dS$$

$$= \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q|}{\varepsilon^2}\cdot\left(\text{Εμβ. } \sigma\phi\alpha\iota\rho\alpha\varsigma\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\pm|q|}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Δηλαδή, η ροή του πεδίου της έντασης δια μέσου της επιφάνειας Σ είναι ανάλογη του συνολικού φορτίου q που υπάρχει στο εσωτερικό της επιφάνειας Σ (**<u>συμπεριλαμβανομένου και του προσήμου του φορτίου</u>**).

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \left(\textbf{\textit{Νόμος Gauss}}\right)}.$$

Αν είχαμε ακίνητα σημειακά φορτία $q_1, q_2, ..., q_n$ σε σημεία $P_1, ..., P_n$ και αν $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_n$ είναι τα διανύσματα θέσεις των σημείων $P_1, ..., P_n$, τότε η ολική ένταση σε σημείο P με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ προκύπτει από το άθροισμα

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + ... + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r_i}|^3}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r_i}\right).$$

Τότε η ροή του πεδίου της έντασης $\mathbf{E}$ δια μέσου απλής, κλειστής και προς τα έξω προσανατολισμένης επιφάνειας Σ που περιέχει τα φορτία $q_1, q_2, ..., q_n$ είναι

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{q_1 + q_2 + ... + q_n}{\varepsilon_0} = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_0}.$$

Τέλος αν υπάρχει συνεχής κατανομή φορτίου σε στερεό Ω, τότε για τη ροή του πεδίου της έντασης $\mathbf{E}$ δια μέσου απλής, κλειστής και προς τα έξω προσανατολισμένης επιφάνειας Σ που περιέχει το Ω ισχύει πάλι ο νόμος του Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint_{\Omega}\rho dV}{\varepsilon_0}.$$

10. Να υπολογίσετε το έργο του πεδίου $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\ \mathbf{F} = \left(az,\ bx,\ \gamma y\right)$ επί του συνόρου μη κλειστής επιφάνειας Σ, όπου Σ είναι το τμήμα του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ που κείται κάτωθεν του επιπέδου $z = 2$ και άνωθεν του επιπέδου $z = 1$ με θετική την κοίλη όψη.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Stokes. Το πεδίο είναι συνεχώς διαφορίσιμο πάνω στην επιφάνεια Σ και το σύνορο της επιφάνειας έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης. Εχουμε λοιπόν

$$\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\Sigma \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S},$$

όπου $c = c_1 \cup c_2$ έτσι ώστε

- η c_1 είναι η καμπύλη με εξίσωση $x^2+y^2=1$ (που προκύπτει ως τομη της επιφάνειας $z=x^2+y^2$ και του επιπέδου $z=1$) με ωρολογιακή φορά διαγραφής και

- η c_2 είναι η καμπύλη με εξίσωση $x^2+y^2=2$ (που προκύπτει ως τομη της επιφάνειας $z=x^2+y^2$ και του επιπέδου $z=2$) με αντιωρολογιακή φορά διαγραφής.

Σημείωση. Οι φορές διαγραφής καθορίζονται έτσι ώστε οι καμπύλες να διαγράφονται με τη θετική φορά ως προς τον προσανατολισμό της επιφάνειας, βλέπε θεωρία αυτού του Κεφαλαίου.

Η επιφάνεια Σ είναι απλή και λεία με προφανή παραμετροποίηση την

$$\mathbf{r}: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3:\ \mathbf{r}(x,y) = \left(x, y, x^2+y^2\right),$$

όπου $D=\left\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 2\right\}$ είναι η προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο Oxy. Το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ της επιφάνειας ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \left(-2x,\ -2y,\ 1\right).$$

Απ' την άλλη μεριά έχουμε

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ az & bx & \gamma y \end{vmatrix} = \left(\gamma,\ a,\ b\right).$$

Αρα:

$$\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\Sigma \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \nabla\times\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(u,v)\right)\cdot\mathbf{n}(u,v)\,du\,dv$$

$$= \iint_D (\gamma, a, b) \cdot (-2x, -2y, 1) dxdy = \iint_{1 \le x^2 + y^2 \le 2} (-2\gamma x - 2ay + b) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} (-2\gamma\rho\sigma\upsilon\nu\theta - 2a\rho\eta\mu\theta + b)\rho d\rho d\theta = 3\pi b .$$

11. Να επαληθευθεί ο τύπος Stokes για το πεδίο $\mathbf{F} : \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 :\ \mathbf{F} = \left(ay^2,\ bz^2,\ \gamma x^2\right)$, όπου Σ είναι το τμήμα της κυλινδρικής επιφάνειας $x^2 + y^2 = 1$ που περιλαμβάνεται μεταξύ των επιπέδων $z = 0$ και $z = x + 1$ με θετική την εξωτερική όψη του κυλίνδρου.

Λύση. Η κυλινδρική επιφάνεια παραμετροποιείται ως εξής:

$$\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 :\ \mathbf{r}(\theta, z) = (\sigma\upsilon\nu\theta,\ \eta\mu\theta,\ z),$$

όπου $D = \left\{(\theta, z) :\ \theta \in [0, 2\pi),\ 0 \le z \le 1 + \sigma\upsilon\nu\theta\right\}$. Το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ της επιφάνειας ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\sigma\upsilon\nu\theta,\ \eta\mu\theta,\ 0).$$

Απ' την άλλη μεριά έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ay^2 & bz^2 & \gamma x^2 \end{vmatrix} = (-2bz,\ -2\gamma x,\ -2ay).$$

Αρα:

$$\iint_\Sigma \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) dudv$$

$$= \iint_D (-2bz, -2\gamma\sigma\upsilon\nu\theta, -2a\eta\mu\theta) \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta, 0) d\theta dz$$

$$= \iint_D (-2bz\sigma\upsilon\nu\theta - 2\gamma\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta) d\theta dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\sigma\upsilon\nu\theta} (-2bz\sigma\upsilon\nu\theta - 2\gamma\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta) dz d\theta$$

$$= -2b\pi .$$

Απ' την άλλη μεριά το σύνορο της επιφάνειας είναι της μορφής $c = c_1 \cup c_2$ έτσι ώστε

- η c_1 είναι η καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ (που προκύπτει ως τομη της επιφάνειας $x^2 + y^2 = 1$ και του επιπέδου $z = 0$) με αντιωρολογιακή φορά διαγραφής και παραμετροποίηση

$$\mathbf{r}_1(t) = (\sigma\upsilon\nu t,\ \eta\mu t,\ 0),\ t \in [0, 2\pi)$$

- και η c_2 είναι η καμπύλη με εξίσωση $\{x^2 + y^2 = 1,\ z = x + 1\}$ με ωρολογιακή φορά διαγραφής και παραμεροποίηση

$$\mathbf{r}_2(t) = (\sigma\upsilon\nu t,\ -\eta\mu t,\ 1 + \sigma\upsilon\nu t),\ t \in [0, 2\pi).$$

Σημείωση. Οι φορές διαγραφής καθορίζονται έτσι ώστε οι καμπύλες να διαγράφονται με τη θετική φορά ως προς τον προσανατολισμό της επιφάνειας. Αρα:

$$\oint_{c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r_1} + \oint_{c_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r_2} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r_1}(t)) \cdot \mathbf{r_1}'(t)\,dt + \int_{2\pi}^{0} \mathbf{F}(\mathbf{r_2}(t)) \cdot \mathbf{r_2}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a\eta\mu^2 t,\ 0,\ \gamma\sigma\upsilon\nu^2 t\right) \cdot (-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, 0)\,dt$$

$$-\int_0^{2\pi} \left(a\eta\mu^2 t,\ b(1 + \sigma\upsilon\nu t)^2,\ \gamma\sigma\upsilon\nu^2 t\right) \cdot (-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, -\eta\mu t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} a\eta\mu^3 t\,dt + \int_0^{2\pi} \left(a\eta\mu^3 t - b(1 + \sigma\upsilon\nu t)^2 \sigma\upsilon\nu t + \gamma\sigma\upsilon\nu^2 t\eta\mu t\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-b(1 + \sigma\upsilon\nu t)^2 \sigma\upsilon\nu t + \gamma\sigma\upsilon\nu^2 t\eta\mu t\right)dt = -2\pi b.$$

7.8. ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε το εμβαδόν:

(α) του τμήματος του παραβολοειδούς $z = 2 - x^2 - y^2$ που βρίσκεται στα θετικά z. **Απ.** $\dfrac{13\pi}{3}$

(β) του τμήματος της κυλινδρικής επιφάνειας $z=\dfrac{x^2}{2}$ που αποκόπτουν τα επίπεδα $y=0,\ y=x,\ x=2$. **Απ.** $\dfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

2. Υπολογίστε τα επιφανειακά ολοκληρώματα των βαθμωτών πεδίων

(α) $\iint_{\Sigma}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dS$,

όπου Σ είναι το ημισφαίριο $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $a>0$. **Απ.** πa^3

(β) $\iint_{\Sigma}\left(x+y+z\right)dS$,

όπου Σ είναι η επιφάνεια του συνόρου του κύβου που ορίζεται από τα επίπεδα $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$. **Απ.** 9

(γ) $\iint_{\Sigma}\left(y^2+z^2\right)dxdy$, όπου Σ είναι η κυλινδρική επιφάνεια $z=\sqrt{1-x^2}$ που αποκόπτεται από τα επίπεδα $y=0,\ y=1$. **Απ.** 2

3. (α) Υπολογίστε τη ροή του πεδίου $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=x\cdot\mathbf{i}+z\cdot\mathbf{j}+y\cdot\mathbf{k}$ δια μέσου της επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=4$, όπου $x,y,z\geq 0$. **Απ.** $\dfrac{16+4\pi}{3}$

(β) Υπολογίστε τη ροή του πεδίου $\mathbf{F}:\Sigma\to\mathbb{R}^3:\ \mathbf{F}\left(x,y,z\right)=\left(y,-z,2\right)$ δια μέσου της επιφάνειας Σ με εξίσωση $4x+2y+z=6,\ x,y,z\geq 0$.

Απ. $\dfrac{9}{2}$

4. Να επαληθευτεί το θεώρημα της απόκλισης για το πεδίο $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=x\cdot\mathbf{i}+y^2\cdot\mathbf{j}-3z\cdot\mathbf{k}$ και την κλειστή επιφάνεια Σ που συντίθεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2=9$ και τα επίπεδα $z=0,\ z=3$.

5. Αν $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=A_{3\times 3}\cdot\mathbf{r},\ A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{3}$ είναι ένα γραμμικό πεδίο, και Σ είναι μια κλειστή, λεία και θετικά προσανατολισμένη επιφάνεια, δείξτε ότι

$$\oiint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\left(a_{11}+a_{22}+a_{33}\right)\cdot V\left(\Sigma\right),$$

όπου $V\left(\Sigma\right)$ είναι ο όγκος του στερεού Σ.

6. Να επαληθευτεί ο τύπος του Stokes για το πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z) = y \cdot \mathbf{i} - 2xz \cdot \mathbf{j} + yz^2 \cdot \mathbf{k}$ και τη επιφάνεια Σ που ορίζεται απ' το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$, για $0 \le z \le 1$. Θεωρείστε τη Σ προσανατολισμένη προς την κοίλη όψη.

Απ. -3π