ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1.1. <u>ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ</u> ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

Ορισμός 1.1 Μια πραγματική συνάρτηση f πολλών μεταβλητών (ή αλλιώς βαθμωτό ή αριθμητικό πεδίο) αποτελείται από το πεδίο ορισμού της που είναι ένα υποσύνολο E του ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$ και από ένα κανόνα ο οποίος σε κάθε σημείο $P=(x_1,x_2,...,x_n)$ του E αντιστοιχεί ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό $z\in\mathbb{R}$, δηλαδή:

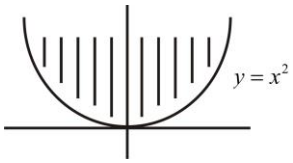
$$f:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:\ \ z=f(P)=f(x_1,...,x_n).$$

Το πεδίο ορισμού E ορίζεται ως το σύνολο σημείων $(x_1,x_2,...,x_n)$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ για τα οποία ο τύπος της συνάρτησης έχει νόημα. Οι τιμές $f(P)$ καλούνται ***εικόνες*** και είναι πραγματικοί αριθμοί που συχνά εκφράζουν τις τιμές μιας βαθμωτής ποσότητας, π.χ. θερμοκρασίας σε κάθε σημείο του χώρου.

Παράδειγμα. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\textbf{(i)}\ \ f(x,y)=\sqrt{y-x^2}\ ,\ \ \textbf{(ii)}\ f(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

Λύση: (i) Πρέπει $y-x^2\geq 0\ \Leftrightarrow\ y\geq x^2$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f (το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$) είναι το κάτωθι γραμμοσκιασμένο σχήμα:



(ii) Πρέπει $x^2-y^2\neq 0\ \Leftrightarrow\ y\neq\pm x$. Αρα το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}^2$ εάν εξαιρέσουμε τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$.

Έστω $f:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:\ \ z=f(x_1,...,x_n)$. Το σύνολο των εικόνων της f καλείται ***πεδίο τιμών*** της f, συμβολικά

$$f(E)=\{z\in\mathbb{R}:\ z=f(x_1,...,x_n)\}.$$

Προφανώς το πεδίο τιμών $f(E)$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ή και το ίδιο το $\mathbb{R}$.

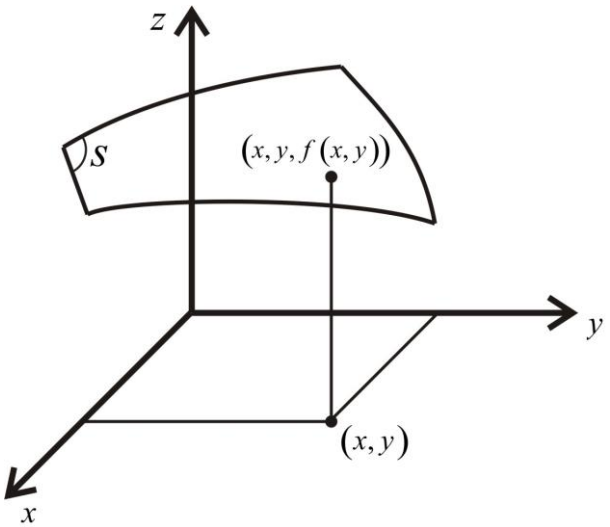
Η ***γραφική παράσταση*** μιας πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών $f:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:\ z=f(x_1,...,x_n)$ ορίζεται ως το σύνολο των σημείων του χώρου $\mathbb{R}^{n+1}$ της μορφής

$$\Gamma=\{(x_1,...,x_n,z)\in\mathbb{R}^{n+1}:\ z=f(x_1,...,x_n)\}.$$

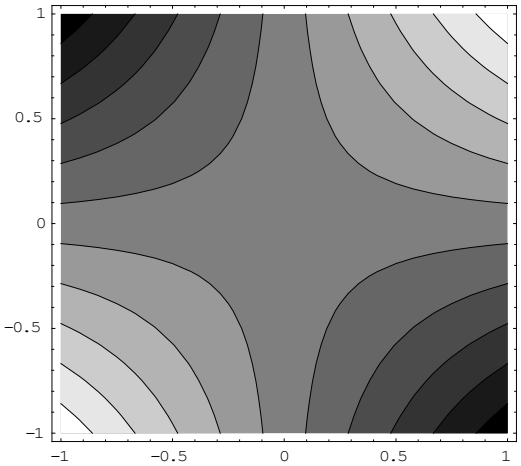
Η γραφική παράσταση συνάρτησης $f:E\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι μία ***επιφάνεια*** στο χώρο $\mathbb{R}^3$, αλλιώς για συναρτήσεις $f:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με $n>2$ μιλούμε για ***υπερεπιφάνειες***.

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:E\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

- είτε ως ένα σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^3$ κάθε σημείο του οποίου έχει συντεταγμένες $(x,y,z)=(x,y,f(x,y))$ (βλέπε σχήμα),

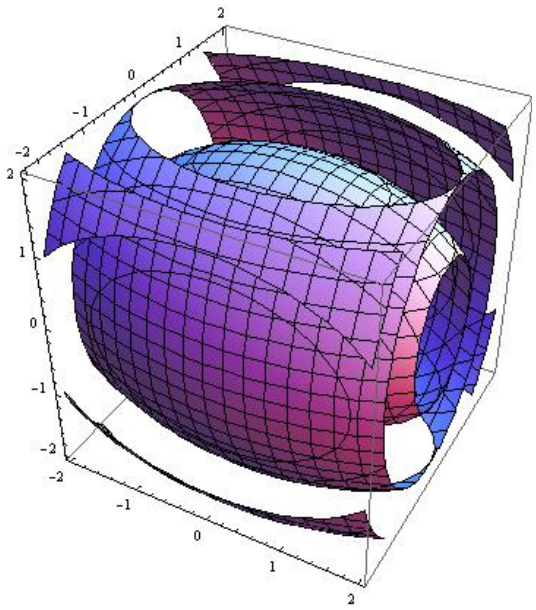


- είτε ως ένα σύνολο από ***ισοϋψείς*** (ή ***ισοσταθμικές***) καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή ένα σύνολο από καμπύλες επί του πεδίου ορισμού της f, κατά μήκος των οποίων η f έχει σταθερή τιμή $z=f(x,y)=c$. Με άλλα λόγια κάθε ισοϋψής καμπύλη $f(x,y)=c$ είναι η προβολή στο επίπεδο Oxy της τομής της επιφάνειας $z=f(x,y)$ με το επίπεδο $z=c$.



Σχήμα: Ισοϋψείς καμπύλες $xy = c,\ \left(c \in \mathbb{R}^*\right)$ **της συνάρτησης** $z = f(x,y) = xy$**. Η μεταβολή της σταθεράς** c **παριστάνεται στο σχήμα μέσω χρωματισμού από το μαύρο που αντιστοιχεί στις μικρότερες τιμές του** c **(στην προκειμένη περίπτωση αρνητικές τιμές του** c**) προς το άσπρο που αντιστοιχεί στις μεγαλύτερες τιμές του** c**.**

Η γραφική παράσταση συνάρτησης $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μπορεί να παρασταθεί ως ένα σύνολο ***ομοιόθετων*** επιφανειών οι οποίες ορίζονται ως το σύνολο σημείων του χώρου $\mathbb{R}^3$ στα οποία η συνάρτηση $w = f\left(x,y,z\right)$ έχει σταθερή τιμή $f\left(x,y,z\right) = c$.



Σχήμα: Ομοιόθετες επιφάνειες $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = c,\ \left(c \in \mathbb{R}^+\right)$ **της συνάρτησης** $w = f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$**. Οι ομοιόθετες επιφάνειες είναι ελλειψοειδή.**

Οι πράξεις με συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ορίζονται όπως οι γνωστές πράξεις για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, π.χ. εάν $a,b \in \mathbb{R}$ και $f : E_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g : E_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, τότε

$$(af \pm bg): E_1 \cap E_2 \to \mathbb{R}:\ (af \pm bg)(P) = af(P) \pm bg(P),$$

$$(fg): E_1 \cap E_2 \to \mathbb{R}:\ (fg)(P) = f(P)g(P),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right): E_1 \cap E_2 - \{P : g(P) = 0\} \to \mathbb{R}:\ \left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{f(P)}{g(P)}\ .$$

Ορισμός 1.2 Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}:\ z = f(x_1,...,x_n)$ καλείται ***πολυωνυμική*** αν είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής

$$ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n},\ m_1,...,m_n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}.$$

Το μέγιστο άθροισμα (ως προς όλους τους όρους) των εκθετών $m_1 + ... + m_n$ καλείται ***βαθμός*** του πολυωνύμου. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x,y) = 1 + \sqrt{2}xy + 3x^2y$ και $f(x,y,z) = 3xz^3 + 8x^3y^2z^3$ είναι πολυώνυμα 3ου βαθμού και 8ου βαθμού αντίστοιχα.

Ορισμός 1.3 Μία συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ καλείται ***ρητή*** αν είναι πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Ορισμός 1.4 Μία συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to f(E) \subset \mathbb{R}$ καλείται ***φραγμένη***, αν το πεδίο τιμών της $f(E)$ είναι ***φραγμένο*** σύνολο στο $\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε εδώ γενικότερα ότι ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ καλείται ***φραγμένο***, εάν

$$\exists C > 0:\ \left|\overrightarrow{OA}\right| \le C \quad \forall A = (x_1,...,x_n) \in E,$$

όπου $\overrightarrow{OA}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου A και $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

Ορισμός 1.5 Έστω $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to f(E) \subseteq \mathbb{R},\ g : f(E) \to B \subseteq \mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων f και g ως εξής:

$$g \circ f : E \to B:\ (g \circ f)(x_1,...,x_n) = g(f(x_1,...,x_n)).$$

1.2. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

1.2.1 Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Ορισμός 1.6 Εστω $\mathbb{R}^n$ είναι ο συνήθης Ευκλείδιος χώρος. Μια διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής $\mathbf{r}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ απαρτίζεται από το πεδίο ορισμού της A που είναι ένα υποσύνολο της πραγματικής ευθείας και από ένα κανόνα ο οποίος σε κάθε πραγματικό αριθμό $t \in A$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό διάνυσμα

$$\mathbf{r}(t) = \left(r_1(t), ..., r_n(t)\right) \in \mathbb{R}^n,$$

όπου οι συναρτήσεις $r_i : A \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., n$ είναι πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες καλούνται ***συνιστώσες (ή συντεταγμένες) συναρτήσεις*** (πάντοτε ως προς το σύνηθες καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^n$).

Το πεδίο ορισμού A μιας διανυσματικής συνάρτησης περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ο τύπος της συνάρτησης έχει νόημα.

Παράδειγμα. Το πεδίο ορισμού της διανυσματικής συνάρτησης

$$\mathbf{r}(t) = \left(\ell nt, \sqrt{1-t}\right)$$

είναι το $(0,1]$, διότι ο παραπάνω τύπος έχει νόημα για $t > 0$ και $1 - t \geq 0$ ταυτοχρόνως. Γενικά το πεδίο ορισμού μιας διανυσματικής συνάρτησης προκύπτει από τη συναλήθευση των πεδίων ορισμού των συνιστωσών συναρτήσεων της.

Παράδειγμα. Εστω $\mathbf{r}(t) = (2+3t)\cdot\mathbf{i} + (-1+t)\cdot\mathbf{j} + (2t)\cdot\mathbf{k}$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής στον $\mathbb{R}^3$, όπου $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε το γράφημα της $\mathbf{r}$ είναι ευθεία που διέρχεται απ' το σημείο $P_0 = (2,-1,0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a} = (3,1,2)$. Οι συνιστώσες συναρτήσεις

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 3t \\ y(t) = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}, \\ z(t) = 2t \end{cases}$$

ορίζουν τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας.

Ορισμός 1.7 Έστω $\mathbf{r}: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$: $\mathbf{r}(t) = \left(r_1(t),...,r_n(t)\right)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση και t_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{r}$ έχει όριο στο t_0 το διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)$, συμβολικά $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}\left(t\right) = \boldsymbol{\lambda}$, εάν

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta\left(\varepsilon, t_0\right) > 0: \; \forall t \in A: \; 0 < \left|t - t_0\right| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; \left|\mathbf{r}\left(t\right) - \boldsymbol{\lambda}\right| < \varepsilon .$$

Θεώρημα 1.1 Αν $\mathbf{r}(t) = \left(r_1(t),...,r_n(t)\right)$, $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)$ και t_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού, τότε:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}\left(t\right) = \boldsymbol{\lambda} \;\; \Leftrightarrow \;\; \lim_{t \to t_0} r_i\left(t\right) = \lambda_i, \quad i = 1,...,n.$$

Απόδειξη. Εστω $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}\left(t\right) = \boldsymbol{\lambda}$. Τότε από τον ορισμό έχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta\left(\varepsilon, t_0\right) > 0: \; \forall t \in A: \; 0 < \left|t - t_0\right| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; \left|\mathbf{r}\left(t\right) - \boldsymbol{\lambda}\right| < \varepsilon ,$$

δηλαδή:

$$0 < \left|t - t_0\right| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; \sqrt{\left|r_1\left(t\right) - \lambda_1\right|^2 + ... + \left|r_n\left(t\right) - \lambda_n\right|^2} < \varepsilon \;\; .$$

Εφόσον

$$\left|r_i\left(t\right) - \lambda_i\right| \le \sqrt{\left|r_1\left(t\right) - \lambda_1\right|^2 + ... + \left|r_n\left(t\right) - \lambda_n\right|^2} < \varepsilon \;\; \forall i = 1,...,n$$

προκύπτει άμεσα ότι

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta\left(\varepsilon, t_0\right) > 0: \; \forall t \in A: \; 0 < \left|t - t_0\right| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; \left|r_i\left(t\right) - \lambda_i\right| < \varepsilon$$

συνεπώς

$$\lim_{t \to t_0} r_i\left(t\right) = \lambda_i, \quad i = 1,...,n.$$

Αντίστροφα, αν $\lim\limits_{t \to t_0} r_i\left(t\right) = \lambda_i, \quad i = 1,...,n$, τότε

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \delta_i > 0: \; \forall t \in A: \; 0 < \left|t - t_0\right| < \delta_i \;\; \Rightarrow \;\; \left|r_i\left(t\right) - \lambda_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \;\; .$$

Επιλέγουμε $\delta = \min\left\{\delta_i : i = 1,...,n\right\}$. Τότε

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \delta > 0: \; \forall t: \; 0 < \left|t - t_0\right| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; \left|\mathbf{r}\left(t\right) - \boldsymbol{\lambda}\right|$$

$$= \sqrt{\left|r_1(t)-\lambda_1\right|^2 + \ldots + \left|r_n(t)-\lambda_n\right|^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} n} = \varepsilon ,$$

συνεπώς $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\lambda}$. □

Το Θεώρημα 1.1 είναι πολύ χρήσιμο διότι ανάγει την ύπαρξη ορίου μιας διανυσματικής συνάρτησης στην ύπαρξη του ορίου των συνιστωσών συναρτήσεων αυτής, οι οποίες είναι συνήθεις πραγματικές συναρτήσεις και τα όρια τους είναι πιο εύκολο να υπολογισθούν.

Ορισμός 1.8 Έστω $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n :\ \mathbf{r}(t) = \left(r_1(t), \ldots, r_n(t)\right)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση και έστω $t_0 \in A$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{r}$ είναι συνεχής στο t_0 εάν

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 :\ \forall t \in A :\ \left|t - t_0\right| < \delta \ \ \Rightarrow\ \ \left|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)\right| < \varepsilon .$$

Διαισθητικά η συνέχεια της $\mathbf{r}$ στο t_0 σημαίνει ότι για κάθε t αρκούντως κοντά στο t_0, το σημείο με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο σημείο $\mathbf{r}(t_0)$.

Θεώρημα 1.2 Εστω $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n :\ \mathbf{r}(t) = \left(r_1(t), \ldots, r_n(t)\right)$, $t_0 \in A$ και t_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A. Τότε:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) \ \Leftrightarrow\ \lim_{t \to t_0} r_i(t) = r_i(t_0), \quad i = 1, \ldots, n .$$

Ισοδύναμα:

η $\mathbf{r}$ είναι συνεχής στο t_0 $\Leftrightarrow$ οι r_i $(i = 1, \ldots, n)$ είναι συνεχείς στο t_0.

Απόδειξη. Αμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.1. □

Μέσω του Θεωρήματος 1.2 γίνεται σαφές ότι οι γνωστές ιδιότητες και θεωρήματα της συνέχειας για πραγματικές συναρτήσεις ισχύουν και για διανυσματικές συναρτήσεις π.χ. άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων είναι επίσης συνεχής συνάρτηση.

Εφαρμογή: Καμπύλες σε παραμετρική μορφή.

Στην περίπτωση κατά την οποία το πεδίο ορισμού μιας ***συνεχούς*** διανυσματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής είναι ένα ***διάστημα*** $[a,b]$ της πραγματικής ευθείας είναι βολικό να σκεφτόμαστε το πεδίο τιμών της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}$ ως μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$, διότι το γράφημα της $\mathbf{r}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η τροχιά κινούμενου υλικού σημείου στο χώρο.

Ορισμός 1.9 Εστω $a,b \in \mathbb{R}$: $a < b$. Ορίζουμε μια ***καμπύλη*** γ να είναι το σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται μέσω μιας ***συνεχούς*** διανυσματικής συνάρτησης

$$\mathbf{r}_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n : \ \mathbf{r}_\gamma(t) = \left(r_1(t),...,r_n(t)\right).$$

Τότε λέμε ότι έχουμε μία ***παραμετροποίηση*** της καμπύλης γ ή ότι η γ ορίζεται σε ***παραμετρική μορφή***. Συνήθως φανταζόμαστε τη μεταβλητή t σαν χρόνο, θεωρώντας ότι όσο μεταβάλλεται το t, το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_\gamma(t)$ παριστάνει τη θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t.

Αν $\mathbf{r}_\gamma(a) = \mathbf{r}_\gamma(b)$, τότε η γ καλείται ***κλειστή*** καμπύλη, αλλιώς καλείται ***ανοικτή***. Η γ καλείται ***απλή***, εάν για κάθε $a < t_1 < t_2 < b$ ισχύει $\mathbf{r}_\gamma(t_1) \neq \mathbf{r}_\gamma(t_2)$, δηλαδή μια απλή καμπύλη δεν τέμνει τον εαυτό της.

Σημειώνουμε ότι μια καμπύλη μπορεί να παρασταθεί από διαφορετικές διανυσματικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις

$$\mathbf{r}_1(t) = (\sigma\upsilon\nu t,\ \eta\mu t),\ \ t \in [0,2\pi]$$

και

$$\mathbf{r}_2(t) = (\sigma\upsilon\nu t,\ -\eta\mu t),\ \ t \in [0,2\pi]$$

παριστάνουν την ίδια καμπύλη, το μοναδιαίο κύκλο, αλλά με διαφορετική φορά διαγραφής. Απ' αυτή την παρατήρηση προκύπτει ότι μια απλή καμπύλη γ σε παραμετρική μορφή θεωρείται ***προσανατολισμένη*** με φορά διαγραφής προς την κατεύθυνση αύξησης των t. Ετσι, αν γ είναι μια (προσανατολισμένη) καμπύλη, ορίζουμε ως ***αντίθετη καμπύλη*** της γ να είναι η καμπύλη $-\gamma$ με τύπο

$$\mathbf{r}_{-\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n : \ \mathbf{r}_{-\gamma}(t) = \mathbf{r}_\gamma(a+b-t).$$

Με άλλα λόγια, η $-\gamma$ είναι το ίδιο σημειοσύνολο με τη γ, αλλά με αντίθετο προσανατολισμό.

Επιπλέον, αν γ_1 και γ_2 είναι δυο καμπύλες με παραμετροποιήσεις $\mathbf{r}_{\gamma_1}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{r}_{\gamma_2}:[b,c]\to\mathbb{R}^n$ αντιστοίχως, έτσι ώστε $\mathbf{r}_{\gamma_1}(b)=\mathbf{r}_{\gamma_2}(b)$ $(a<b<c)$, τότε ορίζουμε ως ***άθροισμα*** αυτών να είναι μια νέα καμπύλη $\gamma_1+\gamma_2$ με τύπο

$$\mathbf{r}_{\gamma_1+\gamma_2}:[a,c]\to\mathbb{R}^n:\ \mathbf{r}_{\gamma_1+\gamma_2}(t)=\begin{cases}\mathbf{r}_{\gamma_1}(t), & t\in[a,b]\\ \mathbf{r}_{\gamma_2}(t), & t\in[b,c]\end{cases}.$$

Εστω γ_1, γ_2 είναι δυο καμπύλες σε παραμετρική μορφή, με τύπους $\mathbf{r}_{\gamma_1}=\mathbf{r}_{\gamma_1}(t),\ t\in[a,b]$ και $\mathbf{r}_{\gamma_2}=\mathbf{r}_{\gamma_2}(t),\ t\in[c,d]$ αντιστοίχως. Θα λέμε ότι οι γ_1 και γ_2 είναι ***ισοδύναμες***, αν υπάρχει μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{r}_{\gamma_2}=\mathbf{r}_{\gamma_1}\circ\varphi.$$

Δυο ισοδύναμες καμπύλες διαφέρουν ενδεχομένως μόνον στον προσανατολισμό τους. Αν η φ είναι γνησίως αύξουσα τότε οι γ_1, γ_2 έχουν ίδιο προσανατολισμό, ενώ αν η φ είναι γνησίως φθίνουσα τότε οι γ_1, γ_2 έχουν αντίθετο προσανατολισμό.

Παράδειγμα. Εστω $\mathbf{r}_\gamma(t)=\sigma\upsilon\nu t\cdot\mathbf{i}+\sigma\upsilon\nu t\cdot\mathbf{j}+\sqrt{2}\sin t\cdot\mathbf{k},\ t\in[0,2\pi]$. Παρατηρούμε ότι

$$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=2\sigma\upsilon\nu^2(t)+2\eta\mu^2(t)=2.$$

Επειδή $x(t)=y(t)=\sigma\upsilon\nu(t)$ συμπεραίνουμε ότι η γ βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $x=y$ και μάλιστα είναι κύκλος πάνω σ' αυτό το επίπεδο.

Ορισμός 1.10 Έστω $\mathbf{r}:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n:\ \mathbf{r}(t)=(r_1(t),...,r_n(t))$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση επί ανοικτού συνόλου A. Αν $t_0\in A$, θα λέμε ότι η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0, αν

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}=\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Το όριο αυτό καλούμε ***παράγωγο*** της $\mathbf{r}$ στο t_0 και γράφουμε

$$\mathbf{r}'(t_0)=\boldsymbol{\lambda}\ \text{ή}\ \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}=\boldsymbol{\lambda}.$$

Θεώρημα 1.3 Εστω $\mathbf{r}: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ \mathbf{r}(t) = \left(r_1(t),...,r_n(t)\right)$, A ανοικτό σύνολο και $t_0 \in A$. Τότε:

$$\mathbf{r} \text{ παραγωγίσιμη στο } t_0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{οι } r_i \ \left(i = 1,...,n\right) \text{ παραγωγίσιμες στο } t_0$$

και επιπλέον

$$\boxed{\mathbf{r}'\left(t_0\right) = \left(r_1'\left(t_0\right),...,r_n'\left(t_0\right)\right).}$$

Απόδειξη. Αμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.1. □

Θεώρημα 1.4 Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 τότε είναι και συνεχής στο t_0.

Ορισμός 1.11 Εστω γ είναι μια καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ με παραμετροποίηση $\mathbf{r}_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n:\ \mathbf{r}_\gamma\left(t\right) = \left(r_1\left(t\right),...,r_n\left(t\right)\right)$. Ένα σημείο $P_0 = \mathbf{r}_\gamma\left(t_0\right)$ της γ καλείται ***ομαλό*** σημείο της γ, αν η $\mathbf{r}_\gamma$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και $\mathbf{r}_\gamma'\left(t_0\right) \neq \mathbf{0}$, αλλιώς το P_0 καλείται ***ανώμαλο*** σημείο της γ. Αν η γ έχει μόνον ομαλά σημεία τότε καλείται ***ομαλή*** καμπύλη.

Ορισμός 1.12 Μια καμπύλη γ του $\mathbb{R}^n$ με παραμετροποίηση $\mathbf{r}_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n:\ \mathbf{r}_\gamma\left(t\right) = \left(r_1\left(t\right),...,r_n\left(t\right)\right)$ καλείται ***λεία*** αν είναι ομαλή και η παράγωγος της $\mathbf{r}_\gamma'$ είναι ***συνεχής*** συνάρτηση. Αν η γ είναι συνένωση πεπερασμένου αριθμού λείων καμπύλων λέμε ότι είναι ***τμηματικά λεία***.

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου: Εστω γ είναι μια καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ με παραμετροποίηση $\mathbf{r}_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n:\ \mathbf{r}_\gamma\left(t\right) = \left(r_1\left(t\right),...,r_n\left(t\right)\right)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in \left(a,b\right)$ με $\mathbf{r}_\gamma'\left(t_0\right) \neq \mathbf{0}$. Εστω $t > t_0$, $\overline{OP} = \mathbf{r}_\gamma\left(t\right)$ και $\overline{OP_0} = \mathbf{r}_\gamma\left(t_0\right)$. Τότε το πηλίκο

$$\frac{\mathbf{r}_\gamma\left(t\right) - \mathbf{r}_\gamma\left(t_0\right)}{t - t_0} = \frac{\overline{OP} - \overline{OP_0}}{t - t_0} = \frac{\overline{P_0P}}{t - t_0}$$

είναι διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα $\overline{P_0P}$. Απ' την άλλη μεριά, αν $t < t_0$ τότε το πηλίκο $\dfrac{\mathbf{r}_\gamma\left(t\right) - \mathbf{r}_\gamma\left(t_0\right)}{t - t_0} = \dfrac{\overline{P_0P}}{t - t_0}$ είναι διάνυσμα που έχει αντίθετη κατεύθυνση με το διάνυσμα $\overline{P_0P}$. Καθώς λοιπόν

$t \to t_0$ (και εφόσον η παράγωγος $\mathbf{r}_\gamma'(t_0)$ υπάρχει και είναι μη μηδενική), το διάνυσμα $\overline{P_0P}$ τείνει να γίνει συγγραμικό με ένα «οριακό» διάνυσμα πάνω στην εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης γ στο P_0. ***Ετσι το διάνυσμα*** $\mathbf{r}_\gamma'(t_0)$ ***είναι διάνυσμα με φορέα πάνω στην εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης στο σημείο*** P_0 ***και φορά προς την κατεύθυνση αύξησης των*** t. Ως εκ τούτου ***η διανυσματική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας*** της γ στο σημείο της $P_0 = \mathbf{r}_\gamma(t_0)$ είναι

$$\boxed{\mathbf{r}_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau.}(\lambda) = \mathbf{r}_\gamma(t_0) + \lambda \cdot \mathbf{r}_\gamma'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Αν η $\mathbf{r}_\gamma$ παριστάνει τις ***εξισώσεις κίνησης*** υλικού σημείου P, τότε η παράγωγος

$$\mathbf{r}_\gamma'(t) = \left(r_1'(t), ..., r_n'(t)\right)$$

παριστάνει την ***ταχύτητα*** του υλικού σημείου P τη χρονική στιγμή t και το μέτρο

$$\left|\mathbf{r}_\gamma'(t)\right| = \sqrt{\left(r_1'(t)\right)^2 + ... + \left(r_n'(t)\right)^2}$$

μας δίνει το ***μέτρο της ταχύτητας*** του υλικού σημείου P τη χρονική στιγμή t.

Κατά τα λοιπά ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγισης. Δηλαδή εάν $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ είναι δυο παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις σε σημείο t_0 του πεδίου ορισμού τους και αν $a, b \in \mathbb{R}$, τότε:

- $\left(a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2\right)'(t_0) = a\mathbf{r}_1'(t_0) + b\mathbf{r}_2'(t_0)$.

- $\left(\mathbf{r}_1 \bullet \mathbf{r}_2\right)'(t_0) = \mathbf{r}_1'(t_0) \bullet \mathbf{r}_2(t_0) + \mathbf{r}_1(t_0) \bullet \mathbf{r}_2'(t_0)$

  όπου το σύμβολο $(\bullet)$ στη δεύτερη ισότητα υποδηλώνει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

- $\left(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\right)'(t_0) = \mathbf{r}_1'(t_0) \times \mathbf{r}_2(t_0) + \mathbf{r}_1(t_0) \times \mathbf{r}_2'(t_0)$,

  όπου το σύμβολο $(\times)$ υποδηλώνει το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$.

- $\left[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\right]'(t_0) = \left[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\right](t_0) + \left[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_3\right](t_0) + \left[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3'\right](t_0)$,

όπου το σύμβολο $[\cdot,\cdot,\cdot]$ δηλώνει το μικτό γινόμενο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$.

- Αν $h: B \subset \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση σε σημείο $t_0 \in B$, τότε ισχύει ο γνωστός ***κανόνας αλυσίδας***:

$$(\mathbf{r}_1 \circ h)'(t_0) = \mathbf{r}_1'(h(t_0)) \cdot h'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}_1(h)}{dh} \cdot \frac{dh(t_0)}{dt} \quad .$$

Θεώρημα 1.5 Εστω γ είναι μια λεία καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ με παραμετροποίηση $\mathbf{r}_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$: $\mathbf{r}_\gamma(t) = (r_1(t),...,r_n(t))$. Τότε:

$$\boxed{|\mathbf{r}_\gamma(t)| = c > 0 \ \forall t \in [a,b] \ \Leftrightarrow \ \mathbf{r}_\gamma(t) \perp \mathbf{r}_\gamma'(t) \ \forall t \in [a,b].}$$

Με άλλα λόγια το μέτρο του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}_\gamma$ είναι σταθερό αν και μόνον αν τα διανύσματα $\mathbf{r}_\gamma$ και $\mathbf{r}_\gamma'$ είναι κάθετα.

Απόδειξη. $|\mathbf{r}_\gamma(t)| = c \ \Leftrightarrow \ \mathbf{r}_\gamma(t) \bullet \mathbf{r}_\gamma(t) = c^2 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{r}_\gamma'(t) \bullet \mathbf{r}_\gamma(t) + \mathbf{r}_\gamma(t) \bullet \mathbf{r}_\gamma'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow \mathbf{r}_\gamma(t) \bullet \mathbf{r}_\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}_\gamma(t) \perp \mathbf{r}_\gamma'(t). \qquad \square$$

Παρατηρήσεις: (α) Το διαφορικό παραγωγίσιμης διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}$ ορίζεται ως

$$\boxed{d\mathbf{r}(t) = (dr_1(t),...,dr_n(t)) = \mathbf{r}'(t)dt.}$$

(β) Οι παράγωγοι ανώτερης τάξης διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}$ (όταν υπάρχουν) ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως για τις συνήθεις πραγματικές συναρτήσεις. Δηλαδή αν η $\mathbf{r}'$ είναι παραγωγίσιμη τότε ορίζουμε τη 2η παράγωγο της $\mathbf{r}$ ως εξής:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right) = \left(r_1''(t),...,r_n''(t)\right).$$

Για παράδειγμα, αν η $\mathbf{r}_\gamma$ παριστάνει τις ***εξισώσεις κίνησης*** υλικού σημείου P, τότε η $\mathbf{r}_\gamma''(t) = (r_1''(t),...,r_n''(t))$ παριστάνει την ***επιτάχυνση*** του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t.

Ορισμός 1.13 Εστω γ είναι μια καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ με παραμετροποίηση $\mathbf{r}_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n :\ \mathbf{r}_\gamma(t) = \left(r_1(t),...,r_n(t)\right)$. Το ορισμένο ολοκλήρωμα της γ στο $[a,b]$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_a^b \mathbf{r}_\gamma(t)dt = \left(\int_a^b r_1(t)dt,...,\int_a^b r_n(t)dt\right).$$

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε και το αόριστο ολοκλήρωμα μιας καμπύλης ως άμεση συνέπεια του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Δηλαδή ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 1.6 Εστω γ είναι μια καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ με παραμετροποίηση $\mathbf{r}_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n :\ \mathbf{r}_\gamma(t) = \left(r_1(t),...,r_n(t)\right)$. Τότε υπάρχει μια διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{q} : [a,b] \to \mathbb{R}^n :\ \mathbf{q}'(t) = \mathbf{r}_\gamma(t)$$

που καλείται αντιπαράγωγος της $\mathbf{r}_\gamma$. Το σύνολο των αντιπαραγώγων της της $\mathbf{r}_\gamma$ στο $[a,b]$ είναι της μορφής

$$\left\{\mathbf{q}(t) + \boldsymbol{c} :\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

και καλείται αόριστο ολοκλήρωμα της $\mathbf{r}_\gamma$, συμβολικά $\int \mathbf{r}_\gamma(t)dt$.

1.2.2 Διανυσματικές συναρτήσεις <u>πολλών μεταβλητών</u>.

Ορισμός 1.14 Εστω $n,m > 1$ είναι δυο φυσικοί αριθμοί. Κάθε συνάρτηση $\mathbf{F} : E \subseteq \mathbb{R}^n \to A \subseteq \mathbb{R}^m$ καλείται ***διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών*** και αποτελείται από το πεδίο ορισμού της E που είναι υποσύνολο του ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$ και από έναν κανόνα τέτοιον ώστε σε κάθε σημείο $P = (x_1, x_2,..., x_n) \in E$ να αντιστοιχεί έναν μοναδικό σημείο $\mathbf{F}(P) = \left(f_1(P),..., f_m(P)\right)$ του $\mathbb{R}^m$ όπου $f_i : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(i = 1,...,m)$ είναι ***βαθμωτά πεδία***. Με άλλα λόγια

$$\mathbf{F} : E \subseteq \mathbb{R}^n \to A \subseteq \mathbb{R}^m :\ \mathbf{F}(P) = \left(f_1(P),..., f_m(P)\right).$$

Εφαρμογή: Διανυσματικά Πεδία.

Ορισμός 1.15 Εστω $n > 1$. Κάθε διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών

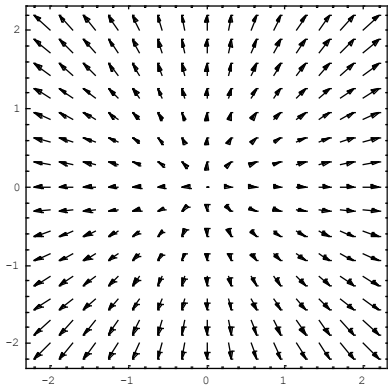
$$\mathbf{F}: E \subseteq \mathbb{R}^n \to A \subseteq \mathbb{R}^n : \ \mathbf{F}(P) = \left(f_1(P), ..., f_n(P)\right)$$

καλείται ***διανυσματικό πεδίο***. Δηλαδή το διανυσματικό πεδίο είναι ειδική περίπτωση μιας διανυσματικής συνάρτησης για $m = n$.

Παράδειγμα. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{F}(\mathbf{r}) = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}.$$

Ενας τρόπος παράστασης του πεδίου αυτού είναι να σχεδιάσουμε με αρχή σημείο $M = (x, y)$ του επιπέδου την τιμή του πεδίου $\mathbf{F}(M)$ που είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου *M*. Για παράδειγμα με αρχή το σημείο $M = (1,2)$ σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\mathbf{F}(1,2) = (1,2)$. Εφαρμόζουμε τη διαδικασία αυτή για ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων και προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



Το παραπάνω είναι ένα παράδειγμα ***γραμμικού πεδίου***. Γενικότερα ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικό αν ορίζεται από τη σχέση

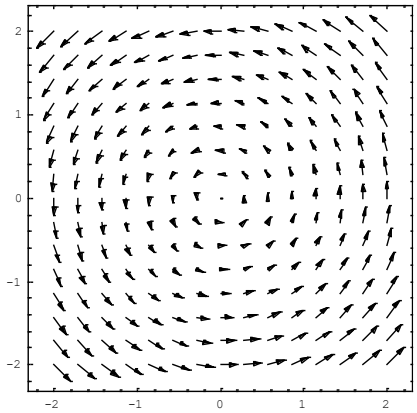
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = A \cdot \mathbf{r}, \quad \left(\mathbf{r} = (x_1, ..., x_n)\right)$$

όπου A είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Η σημασία των γραμμικών πεδίων έγκειται στην απλότητα αναπαράστασής τους λόγω της οποίας ένα «πολύπλοκο» πεδίο προσεγγίζεται καταλλήλως από ένα γραμμικό πεδίο στην περιοχή κάποιου σημείου του. Ετσι το πεδίο μπορεί να μελετηθεί πιο εύκολα τουλάχιστον «τοπικά».

Παράδειγμα. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -y \cdot \mathbf{i} + x \cdot \mathbf{j}.$$

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία όπως παραπάνω προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:

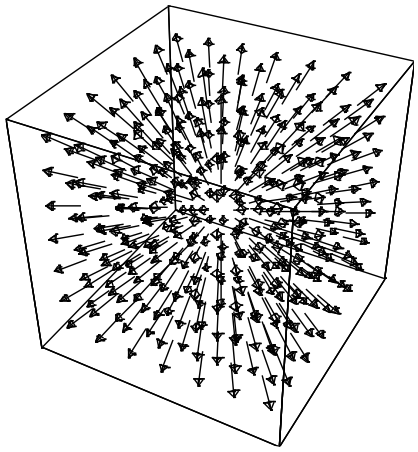


Διαισθητικά βλέπουμε ότι το πεδίο περιστρέφεται γύρω από το σημείο (0,0).

Παράδειγμα. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}^3:\mathbf{F}(\mathbf{r})=\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία όπως παραπάνω προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



Το παραπάνω είναι τυπικό παράδειγμα ενός ***κεντρικού πεδίου*** που χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι οι τιμές του πεδίου $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ έχουν φορέα ο οποίος ταυτίζεται με το φορέα του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}$ και ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=f(|\mathbf{r}|)\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

όπου $f:\mathbb{R}^+-\{0\}\to\mathbb{R}$ είναι μια συνήθης πραγματική συνάρτηση. Τα πεδία αυτά έχουν ευρύτατες εφαρμογές όπως για παράδειγμα η δύναμη Coulomb

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{K \cdot q \cdot Q}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

(K=σταθερά) που ασκείται σε φορτίο q που απέχει απόσταση $r = |\mathbf{r}|$ από ακίνητο σημειακό θετικό φορτίο Q στην αρχή των αξόνων ή η βαρυτική δύναμη έλξης μεταξύ δύο υλικών σημείων με μάζες m, M και μεταξύ τους απόσταση $|\mathbf{r}|$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathrm{G} \cdot \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Σχεδίαση πεδίου μέσω διανυσματικών γραμμών: Μια απ' τις πολλές φυσικές ερμηνείες που μπορεί να δώσει κάποιος σ΄ένα διανυσματικό πεδίο είναι ότι η τιμή του πεδίου παριστάνει την ταχύτητα σε κάθε σημείο κατά την κίνηση π.χ. ενός ρευστού στο χώρο. Στην περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρει να βρούμε τις τροχιές κίνησης των σωματιδίων του ρευστού, δηλαδή καμπύλες στο χώρο τέτοιες ώστε η ταχύτητα σε κάθε σημείο αυτών να ταυτίζεται με τις τιμές του πεδίου. Με άλλα λόγια ορίζουμε

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).$$

Κάθε τροχιά που ικανοποιεί το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων καλείται ***διανυσματική γραμμή*** του πεδίου. Λύνοντας το σύστημα και σχεδιάζοντας τις τροχιές παίρνουμε μια εποπτική παράσταση του πεδίου μέσω των διανυσματικών γραμμών του.

Παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα ενός ρευστού σε κάθε σημείο του επιπέδου τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -y \cdot \mathbf{i} + x \cdot \mathbf{j}$, οπότε

$$\mathbf{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -y \cdot \mathbf{i} + x \cdot \mathbf{j}.$$

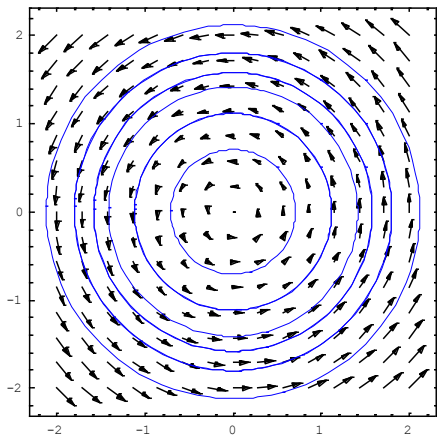
Τότε από τη σχέση $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow ydy = -xdx \Leftrightarrow y^2 + x^2 = c^2 .$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση των τροχιών $y^2 + x^2 = c^2$ για κάποιες τιμές της παραμέτρου c. Η φορά των τροχιών καθορίζεται από τη φορά των τιμών του πεδίου που εφάπτονται των τροχιών.



Παράδειγμα. Δίνεται το πεδίο $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 2x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$. Υπολογίστε τις διανυσματικές γραμμές του πεδίου και σχεδιάστε τις γραμμές αυτές.

Λύση. Από τη σχέση $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases} .$$

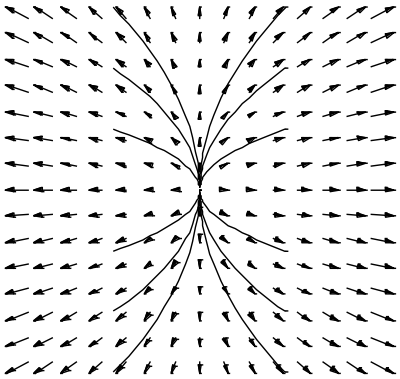
Από την επίλυση αυτού του συστήματος προκύπτει

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} \\ y = c_2 e^{t} \end{cases} \Rightarrow x = c_1 \left(\frac{y}{c_2} \right)^2 = \frac{c_1}{c_2^2} y^2 = c_3 y^2 .$$

Αρα:

$$x = c_3 y^2 .$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση των τροχιών για διάφορες (θετικές ή αρνητικές) τιμές της παραμέτρου c_3. Η φορά των τροχιών καθορίζεται από τη φορά των τιμών (διανυσμάτων) του πεδίου που εφάπτονται των τροχιών (δηλαδή όλες απομακρύνονται απ' το σημείο (0,0) που είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας).



1.3. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1. Αν $\mathbf{p},\mathbf{q}:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}^3:\ \mathbf{p}=\frac{1}{t}\cdot\mathbf{i}+t\cdot\mathbf{j},\quad \mathbf{q}=t^2\cdot\mathbf{j}-\frac{1}{t^2}\cdot\mathbf{k}$, υπολογίστε την παράγωγο της πραγματικής συνάρτησης $\mathbf{p}\bullet\mathbf{q}$.

Λύση. $(\mathbf{p}\bullet\mathbf{q})'(t)=\mathbf{p}'(t)\bullet\mathbf{q}(t)+\mathbf{p}(t)\bullet\mathbf{q}'(t)$

$$=\left(-\frac{1}{t^2},1,0\right)\bullet\left(0,t^2,-\frac{1}{t^2}\right)+\left(\frac{1}{t},t,0\right)\bullet\left(0,2t,\frac{2}{t^3}\right)$$

$$=1\cdot t^2+t\cdot 2t=3t^2.$$ □

2. Εστω $\mathbf{r}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^2:\ \mathbf{r}(t)=\ell n(t)\cdot\mathbf{i}+t\ell n(t)\cdot\mathbf{j}-\ell n(6t)\cdot\mathbf{k}$ και $g:\mathbb{R}\to(0,+\infty):\ g(t)=e^{2t}$. Υπολογίστε την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $\mathbf{r}\circ g$.

Λύση. Ισχύει:

$$(\mathbf{r}\circ g)'(t)=\mathbf{r}'(g(t))\cdot g'(t)=\left(\frac{1}{e^{2t}},\ell n\left(e^{2t}\right)+1,-\frac{1}{e^{2t}}\right)\cdot\left(2e^{2t}\right)$$

$$=\left(2,\ 2e^{2t}\left(1+\ell n\left(e^{2t}\right)\right),\ -2\right)=\left(2,\ 2e^{2t}\left(1+2t\cdot\ell ne\right),\ -2\right)$$

$$=\left(2,\ 2e^{2t}(1+2t),\ -2\right).$$ □

3. Πιο το γράφημα της διανυσματικής συνάρτησης

$$\mathbf{r}(t)=(2+3t)\cdot\mathbf{i}+(-1+t)\cdot\mathbf{j}-2t\cdot\mathbf{k};$$

Λύση. Έστω $P_0=(2,-1,0)$ και $\mathbf{a}=(3,1,-2)$. Τότε το γράφημα της $\mathbf{r}$ είναι ευθεία που διέρχεται από το σημείο P_0 και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a}$. □

4. Να προσδιορισθούν οι κάτωθι καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ μαζί με τη φορά διαγραφής τους:

(a) $\mathbf{r}(t)=t\cdot\mathbf{i},\ -1\le t\le\dfrac{1}{2},$

(b) $\mathbf{r}(t)=\sigma\upsilon\nu(\pi t)\cdot\mathbf{k},\ t\in[0,1],$

(c) $\mathbf{r}(t)=(\sigma\upsilon\nu(3t),\ \eta\mu(3t),0),\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2},$

(d) $\mathbf{r}(t)=(2\sigma\upsilon\nu t,-\eta\mu t,3),\ -\pi\le t\le 0.$

Λύση. ***(a)*** Ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον άξονα των x με άκρα τα σημεία $A=(-1,0,0)$ και $B=\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$. Φορά από το A στο B.

(b) Ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον άξονα των z με άκρα τα σημεία $A=(0,0,1)$ και $B=(0,0,-1)$. Φορά από το A στο B.

(c) Τόξο μοναδιαίου κύκλου πάνω στο επίπεδο $z=0$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και άκρα τα σημεία $A=(1,0,0)$ και $B=(0,-1,0)$. Φορά από το A στο B.

(d) Τμήμα έλλειψης πάνω στο επίπεδο $z=3$ με κέντρο το σημείο $(0,0,3)$ και άκρα τα σημεία $A=(-2,0,3)$ και $B=(2,0,3)$ ενώ διέρχεται και από το σημείο $\Gamma=(0,1,3)$. Φορά από το A στο B.

Σημειώνουμε εδώ τις παραμετρικές εξισώσεις μερικών γνωστών σχημάτων:

- ***παραμετροποίηση ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία*** $A=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ***και*** $B=(x_1,\ y_1,\ z_1)$***:***

$$\boxed{\mathbf{r}(t)=\big(x_0+t\cdot(x_1-x_0),\ y_0+t\cdot(y_1-y_0),\ z_0+t\cdot(z_1-z_0)\big),\ t\in[0,1].}$$

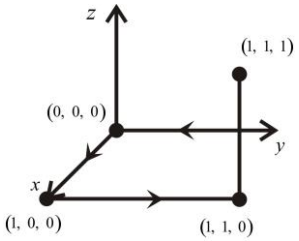
- ***παραμετροποίηση κύκλου κέντρου (a,b) και ακτίνας ρ πάνω στο επίπεδο*** $z=k$***:***

$$\boxed{\mathbf{r}(t)=\left(a+\rho\sigma\upsilon\nu t,\ b+\rho\eta\mu t,k\right),\ t\in\left[0,2\pi\right].}$$

- ***παραμετροποίηση έλλειψης*** $\dfrac{(x-a)^2}{A^2}+\dfrac{(x-b)^2}{B^2}=1$ ***πάνω στο επίπεδο*** $z=k$***:***

$$\boxed{\mathbf{r}(t)=\left(a+A\cdot\sigma\upsilon\nu t,\ b+B\cdot\eta\mu t,k\right),\ t\in\left[0,2\pi\right).}$$ □

5. Να παραμετροποιηθεί η τεθλασμένη γραμμή του σχήματος:



Λύση: Παραμετροποιούμε ξεχωριστά τα 3 ευθύγραμμα τμήματα που συνθέτουν την τεθλασμένη γραμμή, δηλαδή:

$$\mathbf{r}_1(t)=(0,0,0)+t\big((1,0,0)-(0,0,0)\big)=(t,0,0),\ t\in[0,1].$$

Ομοια:

$$\mathbf{r}_2(t)=(1,0,0)+t\big((1,1,0)-(1,0,0)\big)=(1,t,0),\ t\in[0,1]$$

και

$$\mathbf{r}_3(t)=(1,1,1)+t\big((1,1,1)-(1,1,0)\big)=(1,1,t),\ t\in[0,1].$$

Τελικά:

$$\mathbf{r}(t)=\begin{cases}(t,0,0) & 0\le t\le 1\\ (1,t-1,0), & 1\le t\le 2\\ (1,1,t-2) & 2\le t\le 3\end{cases}.$$ □

6. Ένα αντικείμενο κινείται σε κύκλο ακτίνας ρ με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού και ταχύτητα $\mathbf{v}$ σταθερού μέτρου υ. Να δειχθεί ότι η θέση του αντικειμένου δίδεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t)=\rho\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\upsilon\cdot t}{\rho}\right),\ \eta\mu\left(\frac{\upsilon\cdot t}{\rho}\right)\right)$$

και να υπολογισθούν τα διανύσματα της ταχύτητας και επιτάχυνσης.

Λύση. Εφόσον η κίνηση του αντικειμένου γίνεται πάνω σε κύκλο ακτίνας ρ, οι παραμετρικές εξισώσεις της κίνησης είναι της μορφής:

$$\mathbf{r}(t) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\big(\theta(t)\big) \cdot \mathbf{i} + \rho \cdot \eta\mu\big(\theta(t)\big) \cdot \mathbf{j}.$$

Τότε

$$\mathbf{r}'(t) = -\rho \cdot \eta\mu\big(\theta(t)\big) \cdot \theta'(t) \cdot \mathbf{i} + \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\big(\theta(t)\big) \cdot \theta'(t) \cdot \mathbf{j}$$

και εφόσον η κίνηση γίνεται με ταχύτητα σταθερού μέτρου έχουμε:

$$\upsilon = \left|\mathbf{r}'(t)\right| = \sqrt{\rho^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\big(\theta(t)\big) \cdot \big(\theta'(t)\big)^2 + \rho^2 \cdot \eta\mu^2\big(\theta(t)\big) \cdot \big(\theta'(t)\big)^2}$$

$$\Rightarrow \upsilon = \rho \cdot \left|\theta'(t)\right|.$$

Επειδή έχουμε κίνηση αντίθετη των δεικτών του ρολογιού η γωνία $\theta(t)$ αυξάνει, συνεπώς $\theta'(t) > 0$, άρα:

$$\upsilon = \rho \cdot \theta'(t) \Rightarrow \theta(t) = \frac{\upsilon \cdot t}{\rho} + c$$

και επειδή για $t = 0$ έχουμε $\theta(0) = 0$ παίρνουμε $c = 0$, τελικά

$$\theta(t) = \frac{\upsilon \cdot t}{\rho}$$

και η εξίσωση της κίνησης γίνεται

$$\mathbf{r}(t) = \rho \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\upsilon \cdot t}{\rho}\right),\ \eta\mu\left(\frac{\upsilon \cdot t}{\rho}\right)\right).$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω και παίρνουμε:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{r}'(t) = -\upsilon \cdot \eta\mu\left(\frac{\upsilon \cdot t}{\rho}\right) \cdot \mathbf{i} + \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\upsilon \cdot t}{r}\right) \cdot \mathbf{j}$$

και

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\upsilon \cdot t}{\rho}\right) \cdot \frac{\upsilon^2}{\rho}\right) \cdot \mathbf{i} - \left(\eta\mu\left(\frac{u \cdot t}{r}\right) \cdot \frac{\upsilon^2}{\rho}\right) \cdot \mathbf{j}$$

$$= -\frac{\upsilon^2}{\rho} \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\upsilon \cdot t}{\rho}\right) \cdot \mathbf{i} - \eta\mu\left(\frac{\upsilon \cdot t}{\rho}\right) \cdot \mathbf{j}\right) = -\frac{\upsilon^2}{\rho^2} \cdot \mathbf{r}(t),$$

άρα η επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι αντίρροπη της $\mathbf{r}(t)$. □

7. Ένα αντικείμενο έχει αρχική θέση $\mathbf{r}_0$, αρχική ταχύτητα $\mathbf{v}_0$ και σταθερή επιτάχυνση $-g\cdot\mathbf{k}$. Να δειχθεί ότι η θέση του αντικειμένου τη χρονική στιγμή t είναι $\mathbf{r}(t)=\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\cdot\mathbf{k}+t\cdot\mathbf{v}_0+\mathbf{r}_0$.

Λύση. Εχουμε $\mathbf{r}''(t)=-g\cdot\mathbf{k}\ \Rightarrow\ \mathbf{r}'(t)=(-gt)\cdot\mathbf{k}+\mathbf{c}$ και εφόσον $\mathbf{r}'(0)=\mathbf{v}_0$ παίρνουμε $\mathbf{c}=\mathbf{v}_0$, οπότε

$$\mathbf{r}'(t)=(-gt)\cdot\mathbf{k}+\mathbf{v}_0\Rightarrow\mathbf{r}(t)=\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\cdot\mathbf{k}+t\cdot\mathbf{v}_0+\mathbf{c}_1.$$

Για $\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0$ παίρνουμε $\mathbf{c}_1=\mathbf{r}_0$ και έχουμε το ζητούμενο. □

8. Υπολογίστε το $I=\int\left(\varepsilon\varphi(t)\cdot\mathbf{i}+2\pi t\cdot\mathbf{j}+\frac{4}{1+t^2}\cdot\mathbf{k}\right)dt$.

Λύση. $I=-\ell n\left|\sigma\upsilon\nu(t)\right|\cdot\mathbf{i}+\pi t^2\cdot\mathbf{j}+4\cdot\tau o\xi\varepsilon\varphi(t)\cdot\mathbf{k}+\mathbf{c}$. □

9. Έστω $\mathbf{r}(t)=\rho\sigma\upsilon\nu t\cdot\mathbf{i}+\rho\eta\mu t\cdot\mathbf{j},\ t\in[0,2\pi]$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(t)\perp\mathbf{r}'(t)$ για κάθε t και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο $t=\pi$.

Λύση. Είναι γνωστό ότι $\mathbf{r}(t)\perp\mathbf{r}'(t)\Leftrightarrow\left|\mathbf{r}(t)\right|=c\ \ \forall t$, το οποίο ισχύει διότι

$$\left|\mathbf{r}'(t)\right|=\rho,\ \forall t\in[0,2\pi).$$

Η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο $t=\pi$ είναι:

$$(l):\ \overline{\mathrm{OX}}=\mathbf{r}(\pi)+t\cdot\mathbf{r}'(\pi)=(\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\pi,\rho\cdot\eta\mu\pi)+t\cdot(-\rho\cdot\eta\mu\pi,\ \rho\cdot\sigma\upsilon\nu\pi)$$

$$=(-\rho,-t\cdot\rho).$$ □

10. Να εξετασθεί αν υπάρχει σημείο P της καμπύλης

$$\mathbf{r}(t)=(1-2t)\cdot\mathbf{i}+t^2\cdot\mathbf{j}+2e^{2(t-1)}\cdot\mathbf{k}$$

ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα αυτής στο P να είναι παράλληλο με το διάνυσμα θέσης στο P.

Λύση. Εχουμε $\mathbf{r}'(t)=\left(-2,\ 2t,\ 4e^{2(t-1)}\right)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι παράλληλο με το διάνυσμα θέσης αν και μόνον αν ισχύει $\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)=\mathbf{0}$, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1-2t & t^2 & 2e^{2(t-1)} \\ -2 & 2t & 4e^{2(t-1)} \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \left(4t^2\cdot e^{2(t-1)}-4t\cdot e^{2(t-1)}\right)\cdot\mathbf{i}$$

$$-\left(4(1-2t)\cdot e^{2(t-1)}+4e^{2(t-1)}\right)\cdot\mathbf{j}+\left(2t(1-2t)+2t^2\right)\cdot\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 4t\cdot e^{2(t-1)}\cdot(t-1)=0 \\ 4e^{2(t-1)}\cdot(1-2t+1)=0 \\ 2t\cdot(1-2t+t)=0 \end{cases} \Rightarrow\ t=1. \qquad \square$$

11. Να δειχθεί ότι η καμπύλη με εξίσωση

$$\mathbf{r}(t)=\sigma\upsilon\nu t\cdot\mathbf{i}+\eta\mu t\cdot\mathbf{j}+\lambda\cdot\mathbf{k}$$

έχει σταθερό μέτρο ενώ η καμπύλη με εξίσωση

$$\mathbf{r}_1(t)=t^2\cdot\mathbf{i}+\left(\frac{2t^2}{3}\right)\cdot\mathbf{j}+\left(\frac{3t^2}{4}\right)\cdot\mathbf{k}$$

έχει σταθερή διεύθυνση.

Λύση. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\left|\mathbf{r}(t)\right|=\sqrt{1+\lambda^2}=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$. Απ' την άλλη πλευρά η $\mathbf{r}_1$ έχει σταθερή διεύθυνση αν και μόνον αν ισχύει $\mathbf{r}(t)//\mathbf{r}'(t)\ \forall t$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)=\mathbf{0}$. Πράγματι

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & 2t^2/3 & 3t^2/4 \\ 2t & 4t/3 & 3t/2 \end{vmatrix}=0\ \forall t. \qquad \square$$

12. Να δειχθεί ότι η καμπύλη με εξίσωση

$$\mathbf{r}(t)=\left(\frac{1}{2}\left(2-\eta\mu(2t)\right),\ \eta\mu^2 t+2,\ \sigma\upsilon\nu t\right)$$

βρίσκεται πάνω στη σφαίρα με εξίσωση $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=1$.

Λύση. Προφανώς οι συνιστώσες συναρτήσεις της καμπύλης θα πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση της σφαίρας. Αρα:

$$\left(1-\frac{1}{2}\eta\mu(2t)-1\right)^2+\left(\eta\mu^2 t+2-2\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2 t=1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \eta\mu^2 t+\sigma\upsilon\nu^2 t=1$$

το οποίο προφανώς ισχύει. □

13. Εστω η καμπύλη με εξίσωση

$$\mathbf{r}(t)=\left(a\cdot\sigma\upsilon\nu t,\ a\cdot\eta\mu t,\ b\cdot t\right)$$

και έστω $\theta(t)$ η γωνία ανάμεσα στην εφαπτομένη της καμπύλης και στον *z*–άξονα. Δείξτε η γωνία $\theta(t)$ είναι σταθερή.

Λύση. Προφανώς $\mathbf{r}'(t)=\left(-a\cdot\eta\mu t,\ a\cdot\sigma\upsilon\nu t,\ b\right)$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\left(\theta(t)\right)=\frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{k}}{\left|\mathbf{r}'(t)\right|\cdot\left|\mathbf{k}\right|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Εφόσον το *συν(θ(t))* είναι ανεξάρτητο του *t*, η γωνία *θ(t)* είναι σταθερή.□

1.4. ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί και να σχεδιασθεί το πεδίο ορισμού των:

$(a)\quad f(x,y)=\dfrac{x^2}{3y^2-5x},\qquad (b)\quad f(x,y)=\tau o\xi\eta\mu(xy),$

$(c)\quad f(x,y,z)=\sqrt{x^2+2y^2+z^2-1},\qquad (d)\quad f(x,y)=\dfrac{\ln(x^2+y)}{x^2+y^2},$

$(e)\quad f(x,y,z)=\ln\left(xyz\right),\qquad (f)\quad f(x,y,z)=\ln\left(z^2(4+y^2-x^2)\right)+\sqrt{x^2+y^2-1}$

$(g)\quad f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2-1}},\quad (h)\quad f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+2y^2-z^2-1}$

Απάντ. (α) $E=\mathbb{R}^2-\left\{\left(x,y\right):x\neq\dfrac{3}{5}y^2\right\}.$

(b) $E=\left\{\left(x,y\right):\left|xy\right|\leq 1\right\}.$

(c) Ολα τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ που βρίσκονται στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς $x^2+2y^2+z^2=1$ μαζί με τα σημεία πάνω στο ελλειψοειδές.

(d) $E=\left\{\left(x,y\right):y>-x^2\right\}.$

(e) $E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$, όπου

$E_1=\left\{\left(x,y,z\right):x,y,z>0\right\},\qquad E_2=\left\{\left(x,y,z\right):x>0,\ y,z<0\right\},$

$E_3=\left\{\left(x,y,z\right):z>0,\ x,y<0\right\},\qquad E_4=\left\{\left(x,y,z\right):y>0,\ x,z<0\right\}.$

(f) Ολα τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ στο εξωτερικό της κυκλικής κυλινδρικής επιφάνειας $x^2+y^2=1$ (μαζί με το σύνορό της) και στο εξωτερικό της κυλινδρικής επιφάνειας γένους υπερβολής $x^2-y^2=4$ (χωρίς το σύνορό της). Δεν περιλαμβάνεται επίσης στο πεδίο ορισμού το οριζόντιο επίπεδο Oxy.

(g) Ολα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ στο εξωτερικό της έλλειψης $x^2+2y^2=1$ χωρίς το σύνορό της.

(h) Ολα τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ εκτός των σημείων πάνω στο μονόχωνο υπερβολοειδές $x^2+2y^2-z^2=1$.

2. Να βρεθούν και να σχεδιασθούν οι ισοϋψείς καμπύλες της $f(x,y)=2xy$ για $c=\pm1,\pm2$. Ομοίως να βρεθούν οι ομοιόθετες επιφάνειες της $f(x,y,z)=\ell n(1-2x^2+3y^2-z^2)$.

Απάντ. (α) Υπερβολές για $c\neq 0$.

(β) Κωνική επιφάνεια για *c=0*. Μονόχωνο υπερβολοειδές για *c=-1,-2*. Δίχωνο υπερβολοειδές για *c=1,2*.

3. Υπολογίστε την παράγωγο $(\mathbf{p}\bullet\mathbf{q})'(t)$ και $(\mathbf{p}\times\mathbf{q})'(t)$ όπου:

$$\mathbf{p},\mathbf{q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3:\ \ \mathbf{p}=\frac{1}{t^2+1}\cdot\mathbf{j}-2^t\cdot\mathbf{k},\quad \mathbf{q}=t\cdot\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\mathbf{k}\,.$$

Απάντ. $$(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})'(t)=\frac{2^t\cdot\left(t-\left(t^2+1\right)\ell n2\right)}{\left(t^2+1\right)^{3/2}},$$

$$(\mathbf{p}\times\mathbf{q})'(t)=\left(\frac{-3t}{\left(t^2+1\right)^{5/2}},-2^t\left(1+t\cdot\ell n2\right),\frac{t^2-1}{\left(t^2+1\right)^2}\right).$$

4. Εστω $\mathbf{r}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^2:\ \mathbf{r}(t)=\ell og_2(t)\cdot\mathbf{i}+\left(t\cdot\ell og_2(t)\right)\cdot\mathbf{j}$ και $g:\mathbb{R}\to(0,+\infty):\ g(t)=2^{-4t}$. Να υπολογισθεί η $(\mathbf{r}\circ g)'(t)$.

Απάντ. $(\mathbf{r}\circ g)'(t)=\left(-4,\ 4\cdot 2^{-4t}\left(2\cdot t\cdot\ell n2-1\right)\right)$.

5. Να παραμετροποιηθεί η τεθλασμένη γραμμή $P_0=(1,2,-1)\to P_1=(1,3,0)\to P_2=(0,4,2)$.

Απάντ. $$s(t)=\begin{cases}(1,\ 2+t,\ t-1), & 0\le t<1\\ (2-t,\ 2+t,\ 2t-2) & 1\le t\le 2\end{cases}.$$

6. Ένα αντικείμενο κινείται πάνω σε έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού και ταχύτητα σταθερού μέ-

τρου υ. Να ευρεθεί η θέση του αντικειμένου τη χρονική στιγμή $t = \pi/3$ και να υπολογισθεί το διάνυσμα της επιτάχυνσης.

Απάντ. $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b\sqrt{3}}{2}\right),\ \boldsymbol{\gamma}(t)=(-a\cdot\sigma\upsilon\nu t,-b\cdot\eta\mu t).$

7. Υπολογίστε το $I=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\mathbf{i}+\frac{4}{1+t^2}\cdot\mathbf{k}\right)dt$.

Απάντ. $I=(\tau o\xi\eta\mu t,\ 0,\ 4\tau o\xi\varepsilon\varphi t)+\mathbf{c}$

8. Έστω $\mathbf{r}(t)=2\sigma\upsilon\nu t\cdot\mathbf{i}-2\eta\mu t\cdot\mathbf{j},\ t\in[0,2\pi)$ είναι μια καμπύλη του επιπέδου. Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(t)\perp\mathbf{r}'(t)$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη στο σημείο $t=\pi/2$.

Απάντ. $y=-2$.

9. Να εξετασθεί αν υπάρχει σημείο της καμπύλης

$$\mathbf{r}(t)=\left(\sqrt{1-t^2}\right)\cdot\mathbf{i}+\left(2t^2+1\right)\cdot\mathbf{j}-2t\cdot\mathbf{k}$$

ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα αυτής να είναι παράλληλο με το διάνυσμα θέσης.

Απάντ. Δεν υπάρχει.

10. Να βρεθεί η γωνία υπό την οποία τέμνονται οι καμπύλες

$$\mathbf{r}_1(t)=\left(e^t-1\right)\cdot\mathbf{i}+(2\eta\mu t)\cdot\mathbf{j}+\left(\ell n(t+1)\right)\cdot\mathbf{k},\ t>-1$$

και

$$\mathbf{r}_2(\theta)=(\theta+1)\cdot\mathbf{i}+\left(\theta^2-1\right)\cdot\mathbf{j}+\left(\theta^3+1\right)\cdot\mathbf{k},\ \theta\in\mathbb{R}$$

στην αρχή *(0,0,0)* του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Απάντ. $\frac{\pi}{2}$.