Παράγωγος συνάρτησης

Ορ. Έστω $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, A ανοικτό και $x_0 \in A$. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda \in \mathbb{R}$$

συμβολικά $f'(x_0)$ ή $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Ισοδύναμα, με αλλαγή μεταβλητής $x - x_0 = h$, έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Αν το $f'(x_0) = \pm\infty$, λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ στο x_0. Επίσης μπορεί τα πλευρικά όρια να μην είναι ίσα, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο συνόλου A λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A και ορίζεται η 1η παράγωγος:

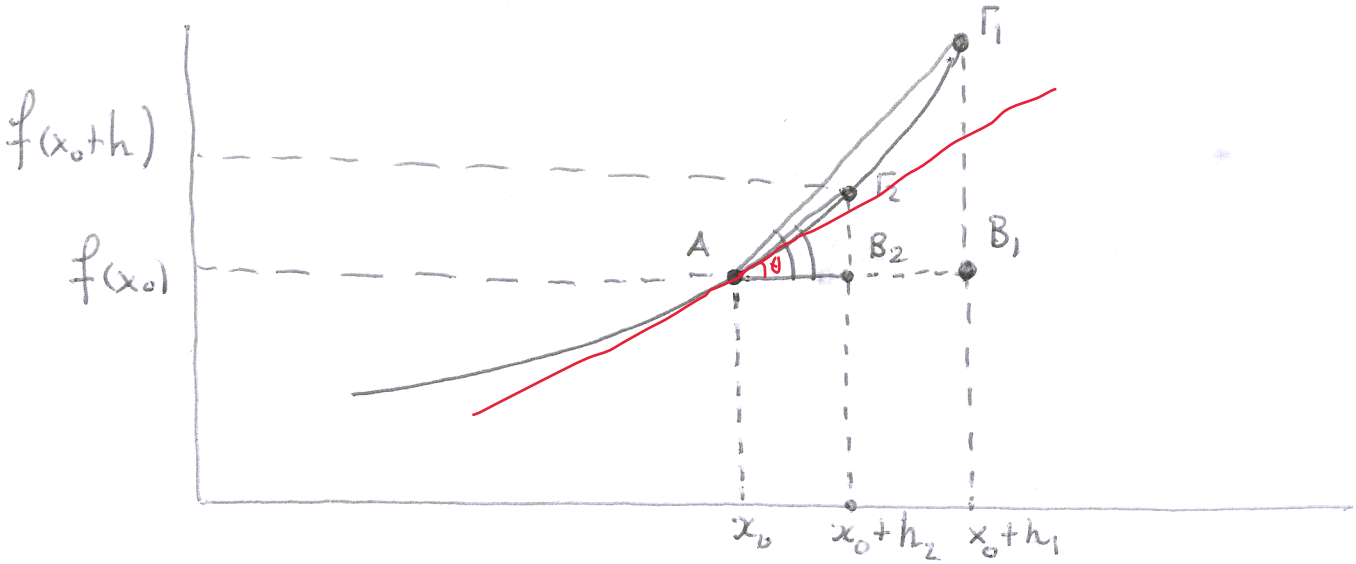
$$f': A \to \mathbb{R}: \quad f' = f'(x).$$

Αν η f' είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο συνόλου π.χ. $B \subseteq A$, τότε ορίζεται η 2η παράγωγος της f

$$f'': B \to \mathbb{R}: \quad f'' = (f')'(x).$$

Συνεχίζουτας επαγωγικά μπορεί να οριστεί και η νιοστή παράγωγος της f (αν υπάρχει).

Γεωμετρική Ερμηνεία / Διαφορικό.



$$\hat{\theta}_1 = \Gamma_1\hat{A}B_1 . \qquad \varepsilon\varphi\theta_1 = \frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}$$

Αφήνω $h_1 \to 0$. Τότε:

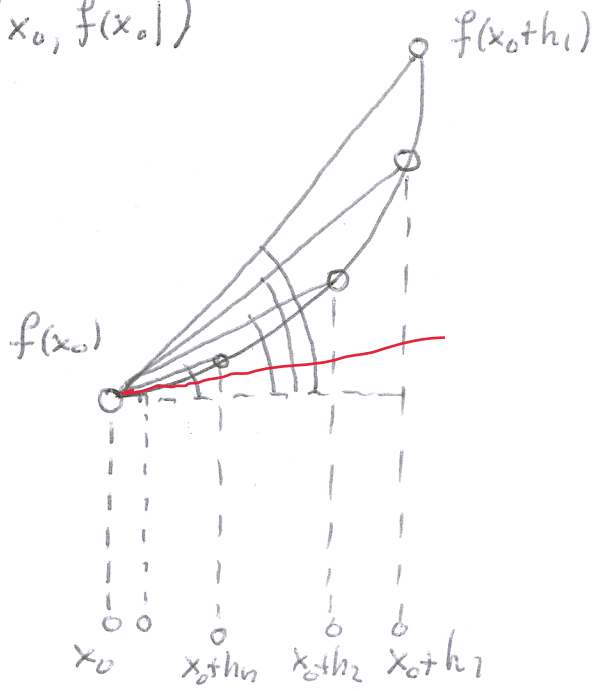
$$\hat{\theta}_2 = \Gamma_2\hat{A}B_2 . \qquad \varepsilon\varphi\theta_2 = \frac{f(x_0+h_2)-f(x_0)}{h_2}$$

$$\vdots$$

$$\hat{\theta}_n = \Gamma_n\hat{A}B_n . \qquad \varepsilon\varphi\theta_n = \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$

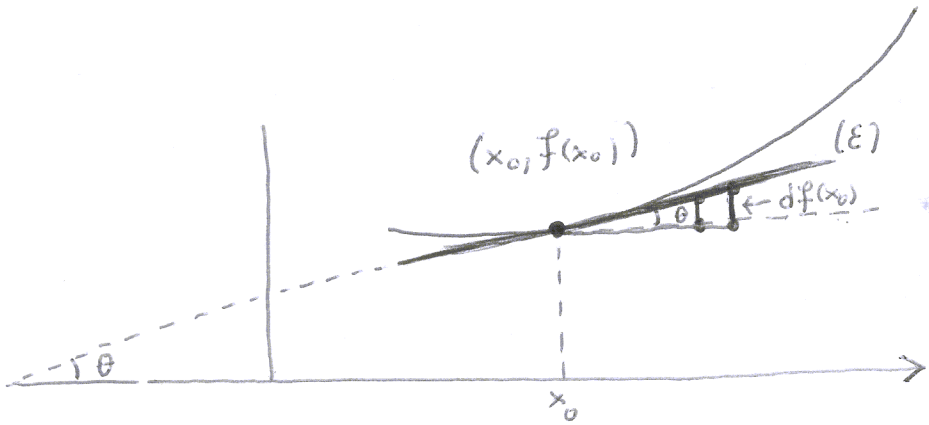
<u>ΕΤΣΙ:</u> $$\lim_{n\to\infty} \varepsilon\varphi\theta_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\theta = f'(x_0)}$$

όπου θ είναι η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$



Η εξίσωση της εφαπτ. ευθείας είναι:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).}$$



$$f(x_0+h) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$$

$(h>0)$ $\qquad x_0 + h - x_0 = \Delta x$

Ορ.] Έστω f παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 όπως παραπάνω. Ορίζουμε το διαφορικό της f στο x_0 ως εξής:

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

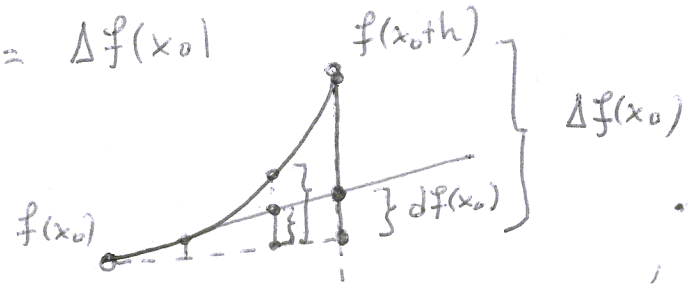
Για $f(x) = x$, οπότε $f'(x) = 1$ $\forall x$ παίρνουμε $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, οπότε:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx$$

Δηλ. το $df(x_0)$ αποτελεί ένα μέτρο προσέγγισης της $y = f(x)$ από την εφαπτ. ευθεία αυτής σε κάποια περιοχή σημείου x_0.

$$y - f(x_0) = df(x_0)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$$



<u>Έχουμε δε</u>: f παραγ. στο $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{h} = 0$

άρα: $\lim\limits_{h\to 0} (\Delta f(x_0) - df(x_0)) = 0$, δηλ.

$$f(x_0+h) - f(x_0) \approx df(x_0) \quad \text{"κοντά στο } x_0\text{"}$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι η ποσότητα dx σταθεροποιημένη τότε η $df(x) = f'(x)\,dx$ συνάρτηση του x. Αν υπάρχει η 2η παράγωγος της f, τότε:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)\,dx) =$$
$$= f''(x)(dx)^2.$$

Με το συμβολισμό $dx = (dx^2)$ παίρνουμε:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

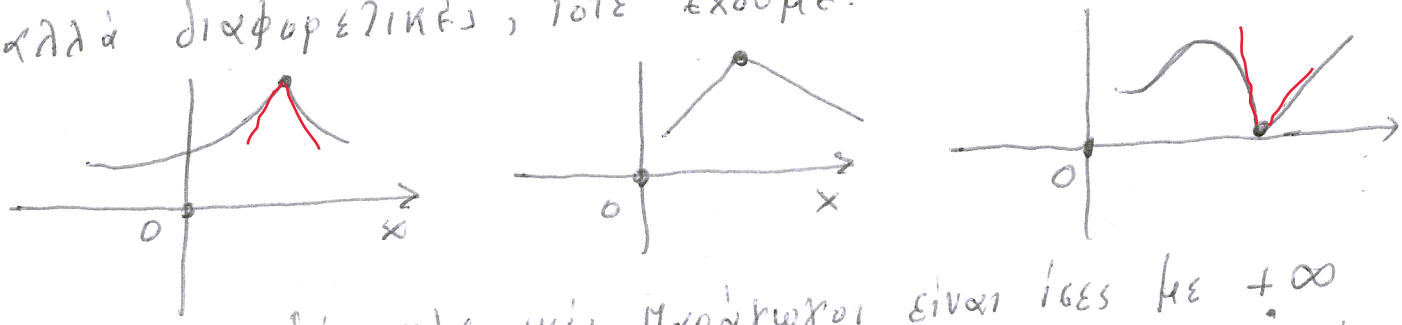
ομοίως:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

---

* Αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$ και

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$, τότε λέμε ότι υπάρχουν οι παράγωγοι της f εκ δεξιών (ή αριστερών) του x_0 ή η f είναι δεξιά (αριστερά) παραγωγίσιμη στο x_0. Αν οι πλευρικές παράγωγοι είναι πεπερασμένες αλλά διαφορετικές, τότε έχουμε:



Αν και οι δύο πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες με $+\infty$ (ή $-\infty$), τότε η εφαπτ. είναι η $x = x_0$. Αν οι πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες με $\pm\infty$ εναλλάξ, τότε έχουμε κατακόρυφη ημιεφαπτομένη.

- Κανόνες Παραγώγισης -

Θεωρούνται γνωστές: Έστω f, g: πραγμ. συναρτήσεις παραγ. σε σημείο x_0. Τότε οι $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g(x_0)\neq 0)$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 με:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

* **Κανόνας αλυσίδας:** Έστω f παραγ. στο x_0 και g παραγ. στο $f(x_0)$. Τότε αν το $f(A)$ περιέχεται στο πεδίο ορ. της g, τότε και η σύνθετη συνάρτηση $g\circ f$ παραγωγίζεται στο x_0 με

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Δοδύναμα:

$$\frac{dg\circ f(x_0)}{dx} = \frac{dg(f(x_0))}{df}\cdot\frac{df(x_0)}{dx}.$$

---

* **Κανόνας Leibnitz:** Αν f, g είναι n-φορές παραγωγίσιμες σε σημείο x_0, τότε:

$$(f\cdot g)^{(n)}\cancel{(f+g)^{(n)}}(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0).$$

Απόδ.: Επαγωγή.

Θεώρ. (Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης)

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και f συνεχής κ γν. μονότονη στο I, έτσι ώστε ορίζεται η παράγωγος $f'(x_0)$ ~~στο I~~ με $f'(x_0) \neq 0$. Τότε και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} παραγωγίζεται στο $y_0 = f(x_0)$ με

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Μελετούμε το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h}$. f συνεχής κ γν. μονότονη $\Rightarrow f$ 1-1 άρα ορίζεται και η f^{-1}. Προφανώς $f^{-1}(y_0+h) = x_0 + t$ και $f^{-1}(y_0) = x_0$ (t μοναδικό).

Έτσι: $t = f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)$ και $h = f(x_0+t) - f(x_0)$.

Όταν $h \to 0$, τότε $t \to 0$ διότι: $|t| = |f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ εφόσον f^{-1} συνεχής. Τελικά:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{f(x_0+t) - f(x_0)} \overset{f'(x_0) \neq 0}{=} \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Εφαρμογές Παραγώγου

Ορ. Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση. Λέμε ότι η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) αν $\exists\, \delta > 0 : \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A \Rightarrow$

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

Αν $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) $\forall x \in A$, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 με τιμή $f(x_0)$.

Θ. (Fermat): Έστω $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και έχει τοπικό ακρότατο στο x_0. Τότε:

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδ.: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Αφού f τοπ. ακρότατο στο x_0, π.χ. τοπ. μέγιστο, $\exists\, \delta > 0 : \forall (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$ $\Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$. Άρα: $x > x_0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0$ ενώ για $x < x_0 \Rightarrow f'_-(x_0) \geq 0$.

Αφού f παραγ. στο x_0, $f'_+(x_0) = f'_-(x) = 0$.

* Το <u>αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει.</u>

* <u>Έτσι πιθανά τοπικά ακρότατα:</u>
(i) σημεία όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη
(ii) ή σημεία όπου $f'(x) = 0$
(iii) ή άκρα ~~διαστήματος~~ πεδίου ορισμού

* Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγ. στα σημεία a και b, τότε μπορεί τα σημεία αυτά να είναι τοπικά ακρότατα, χωρίς να ικανοποιείται το Θεώρ. Fermat.

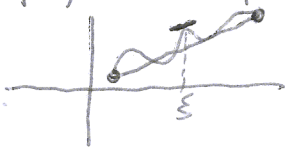
Θ. (Rolle): Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f(a)=f(b)$. Τότε $\exists\, \xi\in(a,b): f'(\xi)=0$.

Απόδειξη:

f συνεχής στο $[a,b]$ $\Rightarrow$ έχει μέγιστη κ ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$. Αν $m=M=f(a)=f(b)$ τότε f σταθερή, οπότε $f'(\xi)=0$. Έστω f μη σταθερή. Τότε $m\neq M$. Αφού $f(a)=f(b)$ αναγκαστικά m ή M βρίσκεται στο (a,b), όπου f παραγωγίσιμη και έχει ολικό (άρα και τοπικό) ακρότατο. Άρα $\exists\,\xi: f(\xi)=m$ ή $f(\xi)=M$ με $f'(\xi)=0$ από θεώρ. Fermat.

Θ. (Μέσης τιμής) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, και παραγωγ. στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$



Απόδειξη: ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ συνεχής στο $[a,b]$, παραγ. στο (a,b) με $g(a)=g(b)$. Άρα από Rolle υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $g'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ:

(α) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και παραγ. στο (a,b) με $f'(x)=0$ $\forall\, x\in(a,b)$, τότε $f=$ σταθερή στο $[a,b]$

(β) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και παραγ. στο (a,b) με $f'(x)>0$ (<0) $\forall\, x\in(a,b)$ τότε η f γν. αύξουσα (γν. φθίνουσα) στο $[a,b]$.

(γ) Αν $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς, παραγωγίσιμες στο (a,b) με $f'(x)=g'(x)$ $\forall\, x\in(a,b)$, τότε $f(x)=g(x)+c$, c σταθερά $\forall\, x\in[a,b]$.

Θ. (Μέσης τιμής Cauchy): Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, παραγ. στο (a,b) ~~και $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$~~, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε:

$$\big(f(b)-f(a)\big)\, g'(x_0) = \big(g(b)-g(a)\big)\, f'(x_0).$$

Απόδειξη $F(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f(x)$.

$\boxed{\text{Θ. (Darboux)}}$: Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με $f'(a) \neq f'(b)$. Τότε για κάθε $f'(a) < \lambda < f'(b)$, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f'(x_0) = \lambda$.

Πόρισμα: Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$. Τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

$\boxed{\text{Κανόνας L' Hospital}}$ Έστω f, g παραγωγίσιμες σε διάστημα I που περιέχει σημείο x_0 εκτός ενδεχομένως του σημείου x_0. Αν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad (\text{ή } \pm\infty)$$

$g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ με $x \neq x_0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Το x_0 μπορεί να πάρει τιμές $\pm\infty$).

Θεώρημα (Υπάρξης τοπικών ακροτάτων):
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0\in(a,b)$ με

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

και $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

Τότε:

(a) αν $n=$ άρτιος και $f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ τοπ. ελάχ.
$f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ τοπ. μέγιστο

(b) αν $n=$ περιττός, τότε το x_0 <u>ΔΕΝ</u> είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

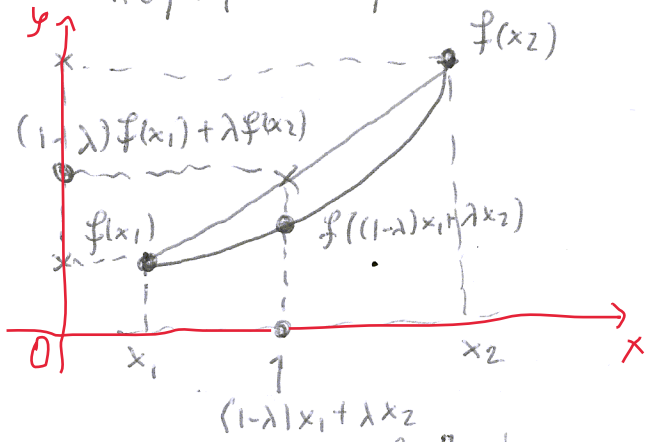
Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Ορ. Έστω $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε διάστημα I. Η f καλείται:

(a) κυρτή στο I, εάν
$\forall x,y\in I$, ~~ισχύει~~: $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$
~~όπου~~ $\forall\ \lambda\in[0,1]$.

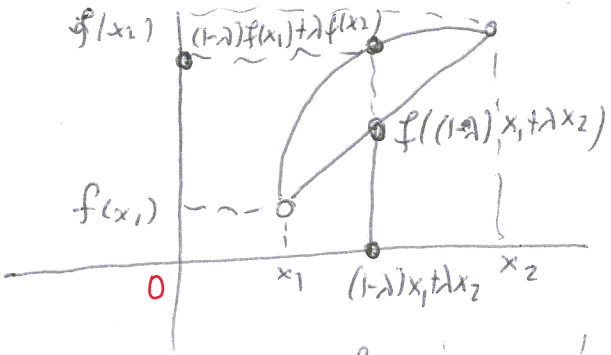
(b) κοίλη στο I, εάν
$\forall x,y\in I$ ισχύει: $f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\ge (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$
~~όπου~~ $\forall\ \lambda\in[0,1]$.

κυρτή συνάρτ.



Η γραφ. παράστ. της f "κάτω" από κάθε χορδή που ενώνει δύο σημεία της.

κοίλη συνάρτ.



Η γρ. παρ. της f πάνω από κάθε χορδή που ενώνει δύο σημεία της.

Θεώρ.] Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή. Τότε:

(a) υπάρχουν οι $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ $\forall x\in(a,b)$

(b) η f είναι συνεχής στο I.

Απόδ.: Αν $0<h_1<h_2$, τότε: $\dfrac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}\le\dfrac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}$

Άρα η συνάρτηση $\phi(h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ είναι αύξουσα σε κάποια περιοχή του $h\in(0,\delta)$ και έτσι υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{h\to0^+}\phi(h)$, $\lim\limits_{h\to0^-}\phi(h)$.

Επίσης:
$$\begin{cases} f(x+h)-f(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\,h\to0 & h\to0^-\\ f(x+h)-f(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\,h\to0 & h\to0^+\end{cases}$$

άρα f συνεχής στο I.

Θεώρ.] Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, τότε:

f κυρτή (κοίλη) στο (a,b) $\Leftrightarrow$ f' αύξουσα (φθίνουσα) στο (a,b).

Αν f 2 φορές παραγωγίσιμη, τότε
f κυρτή (κοίλη) στο (a,b) $\Leftrightarrow$ $f''\ge0$ $(f''\le0)$ στο (a,b).

Ορ.] Ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού συνάρτησης f καλείται σημείο καμπής, αν υπάρχει $\delta>0$: f κυρτή στο $(x_0,x_0+\delta)$ κ κοίλη στο $(x_0-\delta,x_0)$ (ή το αντίθετο).

Θ. (τύπου Fermat) Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0\in(a,b)$ και x_0 σημείο καμπής της f, τότε $f''(x_0)=0$.

Γενικότερα:

Θ. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ n-φορές παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0\in(a,b)$ με

$$f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

και $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Τότε

(a) αν n άρτιος και $f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow f$ κυρτή ~~στο x_0~~ σε περιοχή του x_0

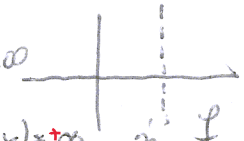
$f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow f$ κοίλη ~~στο x_0~~ σε περιοχή του x_0

(b) Αν n περιττός, τότε x_0 σημείο καμπής.

Ασύμπτωτες (ευθείες) στη γραφ. παράσταση συνάρτησης

κατακόρυφη ασύμπτωτη: $x=x_0$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$



ή f δεν ορ. στο x_0

- οριζόντια ασύμπτωτη $y=\lambda$ ή/και $y=\mu$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lambda\in\mathbb{R},\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\mu\in\mathbb{R}$$

- πλάγια ασύμπτωτη (στο $+\infty$ (ή $-\infty$)): $y=ax+b$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ αν & μόνον αν

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lambda\in\mathbb{R}$$

και

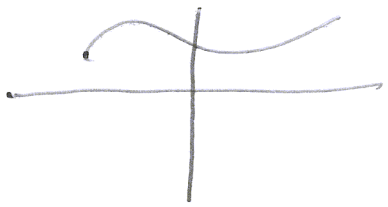
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\mu\in\mathbb{R}.$$

ομοίως για την περίπτωση $-\infty$.

Καμπύλες σε παραμετρική μορφή

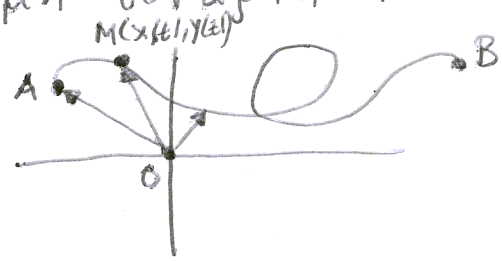
⊙ **Ορισμός** Κάθε εξίσωση της μορφής $f(x,y)=0$, $x,y \in \mathbb{R}$ λέμε ότι παριστάνει καμπύλη.

Συνάρτηση



(α)

Μη συνάρτηση



(β)

Στη 2η περίπτωση ορίζουμε την καμπύλη με την βοήθεια των λεγόμενων παραμετρικών εξισώσεων αυτής ως εξής:

Ξεκινώντας από το τόξο $\overline{OA}$ (τη χρονική στιγμή $t=0$) διαγράφουμε την καμπύλη οπότε κάθε χρονική στιγμή t οι συντ/νες του τυχαίου σημείου M της καμπύλης μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t. Δηλ.

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

όπου a, b συναρτήσεις του t που καλούνται παραμ. εξισώσεις της καμπύλης.

Θεώρ. Έστω μια καμπύλη c με παραμ. εξισώσεις

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases}, \quad t \in [\Gamma, \Delta].$$

Εάν η $a'(t) \neq 0$ $\forall t \in [\Gamma, \Delta]$, τότε η c είναι συνάρτηση.

- $a'(t) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a'(t) > 0 \\ \text{ή} \\ a'(t) < 0 \end{cases} \Rightarrow f$ γν. μον.

$\Rightarrow a$ 1-1, άρα υπάρχει η αντίστροφη

συνάρτηση: $\boxed{t = a^{-1}(x)}$, $x \in a([\Gamma, \Delta])$ (1)

άρα: $y = b(t) = b(a^{-1}(x)) = (b \circ a^{-1})(x)$.

Επιπλέον η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη εάν οι a, b είναι παραγωγίσιμες και

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = (b \circ a^{-1})'(x) = b'(a^{-1}(x)) \cdot (a^{-1})'(x)$$

$$\overset{(1)}{=} b'(t) \cdot (a^{-1})'(x) \overset{(a^{-1})'(x) = \frac{1}{a'(t)}}{=\!=\!=} \frac{b'(t)}{a'(t)},$$

Άρα: $y'(x) = \dfrac{b'(t)}{a'(t)}$, $\boxed{x = a(t)}$.

$$y''(x) = y'(y'(x)) = \frac{d\,y'(x)}{dx}$$

$$= \frac{d\left(b'(t)/a'(t)\right)}{dx} = \frac{d}{dt}\left(b'(t)/a'(t)\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{b''(t)a'(t) - b'(t)a''(t)}{(a'(t))^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \overset{\frac{dx}{dt} = a'(t)}{=\!=\!=}$$

$$= \frac{b''(t)a'(t) - b'(t)a''(t)}{(a'(t))^3}.$$

Γνωστές παράγωγοι

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ (x \neq 0 \text{ αν } \alpha < 0)$

$(e^{x})' = e^{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad \forall x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad \forall x \neq k\pi$

$(\text{τοξ}\eta\mu x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1)$

$(\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$

$(\text{τοξ}\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\text{τοξ}\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\sinh x)' = \cosh x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(a^{x})' = a^{x} \ln a \quad \forall a > 0, \ x \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις

1) Υπολογίστε την παράγωγο της πλεγμένης συνάρτησης
$$x^4-y^3+2x^2y^2=2.$$
στο σημείο του $(1,1)$.

Θεώρ. Αν $F(x,y)=0$ και (x_0,y_0) : $F(x_0,y_0)=0$. Αν F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο (x_0,y_0) με $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ τότε η $F(x,y)=0$ επιλύεται ως προς y σε μια περιοχή του σημείου x_0, και μάλιστα
$$y'(x_0)=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}.$$

Με βάση το παραπάνω θεώρημα, έχουμε:

$F(x,y)=x^4-y^3+2x^2y^2-2$

$F(1,1)=1-1+2-2=0.$

Η F παραγωγίσιμη ως πολυωνυμ.

$F_y=-3y^2+4x^2y$, άρα: $F_y(1,1)=-3+4=1\neq 0$. Τότε η $F(x,y)=0$ επιλύεται ως προς y σε μια περιοχή του σημείου x_0 δηλ.
$$F(x,y)=0 \Rightarrow y=y(x_0) \text{ με:}$$

$$\left(x^4-y^3+2x^2y^2\right)'=0 \Rightarrow 4x^3-3y^2y'+4xy^2+4x^2yy'=0$$
$$\Rightarrow 4x^3+4xy^2=(3y^2-4x^2y)\,y'.$$

Έτσι
$$y'(1)=\frac{4\cdot 1+4\cdot 1\cdot 1}{3\cdot 1-4\cdot 1\cdot 1}=\frac{8}{-1}=-8.$$

2) Υπολογίστε την εξίσωση της εφαπτόμενης της καμπύλης που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = t + \eta\mu t \\ y(t) = \sigma\upsilon\nu t \end{cases}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{3}]$$

στο σημείο $t = \frac{\pi}{3}$. Υπολογίστε την f'' (f η συνάρτηση με παρ. εξισ. x, y).

Έστω $a, b : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε το σύνολο σημείων της μορφής:

$$(\underset{x}{a(t)}, \underset{y}{b(t)}), \quad t \in [a,b]$$

καλείται καμπύλη σε παραμετρική μορφή, και οι a, b παραμετρικές συναρτήσεις.

Αν $a'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$, τότε η παραπάνω είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

Πράγματι, έστω $a'(t) \neq 0 \ \forall t$, τότε $a'(t) > 0$ (η.χ.) άρα a συνεχής και γν. αύξ. στο $[a,b]$, άρα γν. μον., άρα 1-1, οπότε:

$$x = a(t) \Leftrightarrow t = a^{-1}(x).$$

Έτσι: $y = y(t) = y(a^{-1}(x)) = (y \circ a^{-1})(x)$

(ii) $f''(x) = f'(f'(x)) = f'\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{y''x' - y'x''}{(x')^2} \cdot \frac{1}{x'}$.

Στο παράδειγμά μας έχουμε: $x'(t) = \sigma\upsilon t + 1 > 0 \ \forall t$

οπότε:

$$y'(x) = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'(t) \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

δηλ. για $t = \pi/3$ έχουμε: $y'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sigma\upsilon\nu\, \pi/3}{\sigma\upsilon\nu\, \pi/3 + 1} = \frac{\sqrt{3}/2}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Επίσης $y(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, άρα:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\right).$$

3] f παραγ. στο $\mathbb{R}$, υπολογίστε το $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^2(x+3h)-f^2(x+h)}{h}$

$$\frac{f^2(x+3h)-f^2(x+h)}{h} = \frac{f(x+3h)-f(x+h)}{h}\cdot\left(f(x+3h)+f(x+h)\right)$$

$$= \left(\frac{f(x+3h)-f(x)}{h} - \frac{(f(x+h)-f(x)}{h}\right)\left(f(x+3h)+f(x+h)\right)$$

$\lim\limits_{h\to 0} f(x+3h) = \lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ (αφού f συνεχής)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h} \overset{3h=h'}{=\!=} \lim_{h'\to 0}\frac{f(x+h')-f(x)}{h'/3} = 3f'(x).$$

Τελικά: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+3h)-f(x+h)}{h} = 4f'(x)f(x)$.

4] Έστω $a_1,\dots,a_n>0$ έτσι ώστε $a_1^x+\dots+a_n^x \geq n$ $\forall x\in\mathbb{R}$. ΝΔΟ $a_1\cdots a_n = 1$.

Για $x=0$ έχουμε: $a_1^0+\dots+a_n^0 = n \geq n$, άρα η $f(x)=a_1^x+\dots+a_n^x$ έχει ολικό ακρότατο στο $x_0=0$

άρα από Fermat $f'(0)=0 \Rightarrow a_1^x\ln a_1+\dots+a_1^x\ln a_n = f'(x)$

άρα: $\ln a_1+\dots+\ln a_n = f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln(a_1\cdots a_n)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1\cdots a_n = 1}$

Ασκ. 5 Υπολογίστε την $f^{(50)}$, όπου $f(x) = x^2 \sigma\upsilon\nu(ax)$ $(a>0)$.

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

Θεωρούμε: $a(x) = x^2$
$b(x) = \sigma\upsilon\nu(ax)$,

Τότε:
$$(ab)^{(50)} = \sum_{k=0}^{50} \binom{n}{k} a^{(k)}(x)\, b^{(n-k)}(x)$$
$$= \sigma\upsilon\nu^{(50)}(ax) + 2x\,\sigma\upsilon\nu^{(49)}(ax) + 2\,\sigma\upsilon\nu^{(48)}(ax).$$

Αλλά: $g'(x) = -a\eta\mu(ax)$, $g''(x) = -a^2\sigma\upsilon\nu(ax)$
$g'''(x) = a^3\eta\mu(ax)$ $g^{(4)}(x) = a^4\sigma\upsilon\nu(ax)$.

γενικεύοντας: $g^{(n)}(x) = a^n\sigma\upsilon\nu\left(ax + \frac{k\pi}{2}\right)$.

άρα προκύπτει το ζητούμενο.

Ασκ. 6 ΝΔΟ $a^x > x^a$ $\forall\, x > a \geq e$.

ορίζω: $h(x) = a^x - x^a = e^{x\ln a} - e^{a\ln x}$
$= e^{a\ln x}\left(e^{x\ln a - a\ln x} - 1\right)$

Κοιτάμε την $f(x) = e^{x\ln a - a\ln x}$ για την οποία θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x) > 0$ για $x > a \geq e$.

$f(a) = 0$ $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x}$, αλλά $\ln a \geq 1 > \frac{a}{x}$.

Ασκ. 7

Δίνεται η $y = x^3 - x^2 + 1$. Υπολογίστε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην εφαπτ. της γραφ. παράστ. της y στο $(2,5)$ ~~και διερχ. από το (2,5)~~.

$$f'(2) = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 = 12 - 4 = 8$$

$$y - 5 = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 5 = 8(x-2).$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 8x - 11}$$

$y = \lambda x + b$ όπου $\lambda = -\frac{1}{8}$ δηλ. $y = -\frac{1}{8}x + b$

δηλ. $5 = -\frac{1}{8}2 + b \Rightarrow +5 + \frac{1}{4} = b$ άρα: $y = -\frac{x}{8} + \frac{21}{4}$.

Ασκ. 8

Για κάθε $\boxed{x > 0}$ ΝΔΟ $x^x \geq e^{x-1}$.

Ιδια βάση: Ορίζω $f(x) = x^x - e^{x-1} = e^{x\ln x} - e^{x-1}$.

e^x γν. αύξουσα άρα αρκεί ΝΔΟ $x\ln x \geq x-1$

ή $x\ln x - x + 1 \geq 0$

$g'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

	1	
−		+
	Τοπ. ελάχιστο	

Έχω τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με τιμή

$g(1) = 0$ δηλ. $g(x) \geq g(1) = 0 \quad \forall x$.

Επίσης $g(0) = 1$ και $g(+\infty) = +\infty$ άρα ολικό ελάχιστο.

Ασκ. 9 Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ παραγ. & μη σταθερή σε ανοικτό διάστημα I, $a<b$, $a,b \in I$, $f(a)=f(b)=0$

ΝΔΟ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

Έστω: $\phi(x) = e^{-\lambda x} \cdot f(x)$. ϕ συνεχής στο $[a,b]$

$\phi(a) = \phi(b) = 0$ και $\phi'(x) = \left(f'(x) - \lambda f(x)\right) e^{-\lambda x}$

Άρα $\exists \xi \in (a,b): f'(\xi) - \lambda f(\xi) = \phi'(\xi) = 0$.

Ασκ. 10 Έστω f παραγωγίσιμη σε διάστημα I, $a,b \in I$ με $a<b$ και $f'(x) \neq 0$ στο $[a,b]$.

ΝΔΟ f γν. μονότονη στο $[a,b]$.

Χωρίς περ. γενικότητας υποθέτουμε ότι $f'(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$. Αν όχι από Θ. ενδ. τιμών θα έπρεπε να υπάρχει $\xi \in (a,b): f'(\xi) = 0$ (άτοπο).

Ασκ. 11 Έστω f παραγ. στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=3$ και $|f'(x)| \leq 2$ $\forall x \in (0,2)$. ΝΔΟ $1 \leq f(x) \leq 5$ $\forall x \in [0,2]$.

Από ΘΜΤ έχουμε: f συνεχής στο $[0,2]$, παραγ. στο $(0,2)$:

$$|f(x) - f(1)| = f'(\xi)(x-1) \quad \text{για κάποιο } \xi \in (0,2)$$

άρα: $|f(x) - 3| \leq 2|x-1| \leq 2$ $\left(x \in [0,2] \Rightarrow |x-1| \leq 1\right)$

$\Rightarrow -2 \leq f(x) - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 5$.