Θεωρήστε ένα στάσιμο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου $E_x(z,t) = A\cos(\omega t)\cos(kz)$. Να υπολογιστεί το B, η πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, η συνολική πυκνότητα ενέργειας και το διάνυσμα Poynting ως συνάρτηση της θέσης και του χρόνου. Να γίνουν οι σχετικές γραφικές παραστάσεις συναρτήσει του z για t=0, t=T/8, t=T/4 και t=T/2. Να προσδιοριστεί η διεύθυνση του διανύσματος Poynting για αυτές τις χρονικές στιγμές.

• Σύμφωνα με την 3$^{\eta}$ εξίσωση του Maxwell (νόμος Faraday)

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \hat{y}\frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\hat{z}\frac{\partial E_x}{\partial y}} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{y} - \frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow -kA\cos(\omega t)\sin(kz) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow B = kA\int \cos(\omega t)\sin(kz)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{kA}{\omega}\sin(\omega t)\sin(kz)$$

Άρα $\boxed{\bar{B} = \hat{y}\frac{A}{c}\sin(\omega t)\sin(kz)}$ (1)

Παρατηρούμε ότι σε αντιστοιχία με τα στάσιμα κύματα που δημιουργούνται σε μία χορδή με οριακές συνθήκες (π.χ. πακτωμένο άκρο) υπάρχουν σημεία στο χώρο που είναι κόμβοι ή κοιλίες. Ωστόσο τα σημεία τα οποία είναι κόμβοι για το ηλεκτρικό πεδίο είναι κοιλίες για το μαγνητικό καθώς σε αντίθεση με τα οδεύοντα κύματα τα E και B μεταβάλλονται με διαφορά φάσης π/2.

** Κατά την ανάκλαση ενός οδεύοντος κύματος σε μια επιφάνεια διηλεκτρικού ή μετάλλου υπάρχουν οριακές συνθήκες που καθορίζουν την τιμή του E και του B στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-υλικού*
(βλ. http://www.youtube.com/watch?v=rXSgxuzm4Pk,
http://www.youtube.com/watch?v=kC61AdUHwhw,
http://mysite.du.edu/~etuttle/optics/xwave.htm κ.α.)

• Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου: $u_E = \frac{1}{2}\bar{E}\bullet\bar{D} \underset{free\_space}{\overset{D=\varepsilon_0 E}{=}} \frac{1}{2}\varepsilon_0\bar{E}\bullet\bar{E}$ δηλαδή

$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A^2\cos^2(\omega t)\cos^2(kz)}$ (2)

• Πυκνότητα ενέργειας μαγνητικού πεδίου:

$$u_B = \frac{1}{2}\bar{B}\bullet\bar{H} \underset{free\_space}{\overset{B=\mu_0 H}{=}} \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\bar{B}\bullet\bar{B} = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{A}{c}\right)^2\sin^2(\omega t)\sin^2(kz)$$ δηλαδή

$\boxed{u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A^2\sin^2(\omega t)\sin^2(kz)}$ (3)

• Ολική πυκνότητα ενέργειας πεδίου:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A^2\left[\cos^2(\omega t)\cos^2(kz) + \sin^2(\omega t)\sin^2(kz)\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\varepsilon_0 A^2\left[(1-\cos 2\omega t)(1-\cos 2kz) + (1+\cos 2\omega t)(1+\cos 2kz)\right]$$

δηλαδή $\boxed{u = \frac{1}{4}\varepsilon_0 A^2\left[1+\cos(2\omega t)\cos(2kz)\right]}$ (4)

• Διάνυσμα Poynting:

$$\bar{S} = \bar{E}\times\bar{H} = \frac{1}{\mu_0}\bar{E}\times\bar{B} = \varepsilon_0 c^2\left(\bar{E}\times\bar{B}\right) = \varepsilon_0 c^2\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ E_x & 0 & 0\\ 0 & B_y & 0\end{vmatrix} = \hat{z}\varepsilon_0 c^2 E_x B_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{S} = \hat{z}\varepsilon_0 c^2\left[A\cos(\omega t)\cos(kz)\cdot\frac{A}{c}\sin(\omega t)\sin(kz)\right]$$

δηλαδη $\boxed{\bar{S} = \hat{z}\varepsilon_0 c A^2\left[\cos(\omega t)\cos(kz)\sin(\omega t)\sin(kz)\right]}$ (5)

• Μέσες τιμές σε διάστημα t=T:

$$\left\langle\cos^2(\omega t)\right\rangle = \frac{\int_{t=0}^{T}\cos^2(\omega t)}{T} = \frac{1}{\omega}\frac{\int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi}\left[1+\cos(2\omega t)\right]d(\omega t)}{2T} = \frac{1}{2\omega T}\int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi}d(\omega t) + \cancel{\frac{1}{2\omega T}\int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi}\left[\cos(2\omega t)\right]d(\omega t)} =$$

$$= \frac{2\pi}{2\omega T} = \frac{2\pi}{2\frac{2\pi}{T}T} = \frac{1}{2}$$

Ομοίως $\left\langle\sin^2(\omega t)\right\rangle = \frac{1}{2}$, $\left\langle\sin(\omega t)\right\rangle = \left\langle\cos(\omega t)\right\rangle = \left\langle\sin(2\omega t)\right\rangle = \left\langle\cos(2\omega t)\right\rangle = 0$

Συνεπώς:

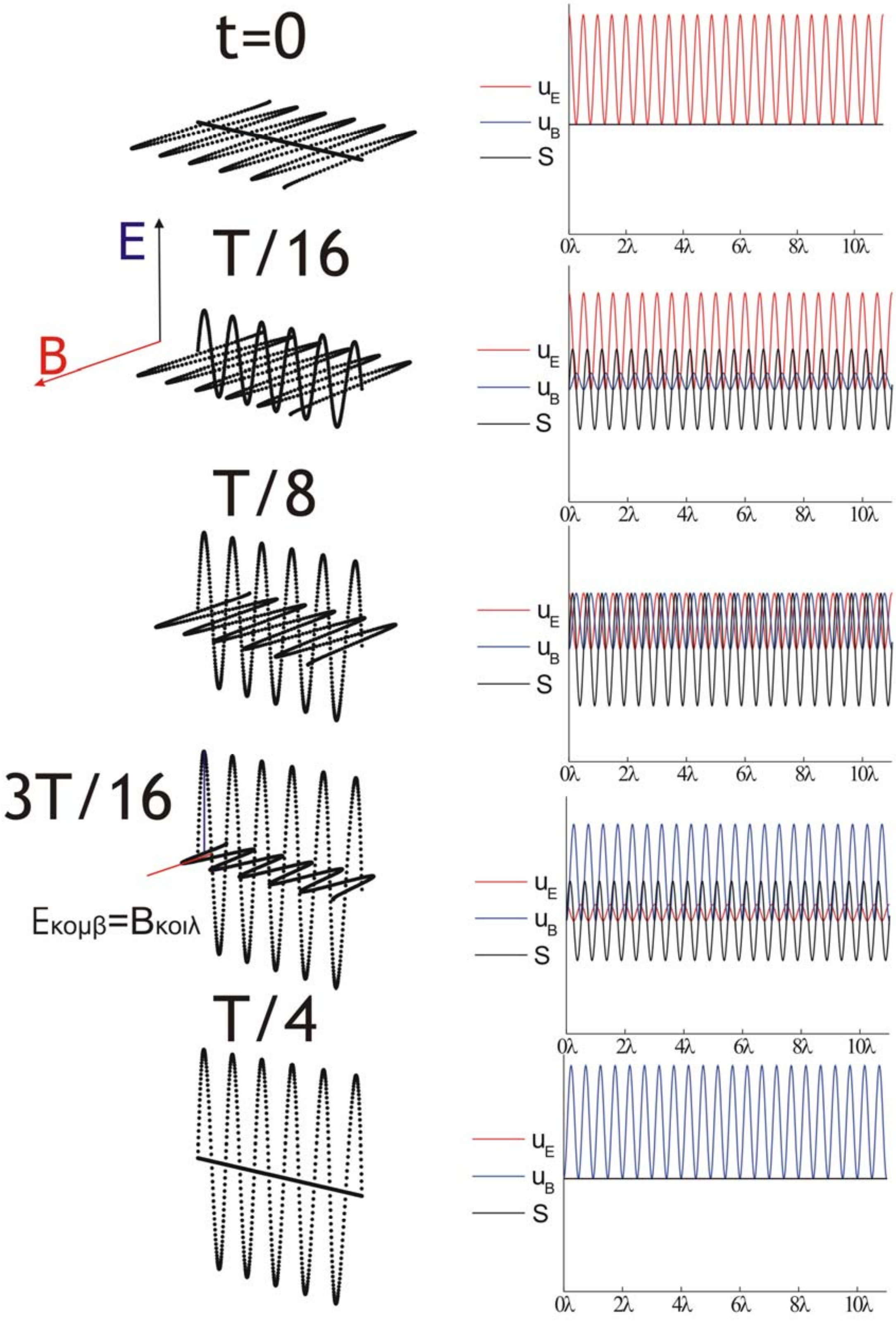
(2) → $\left\langle u_E\right\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 A^2\cos^2(kz)$

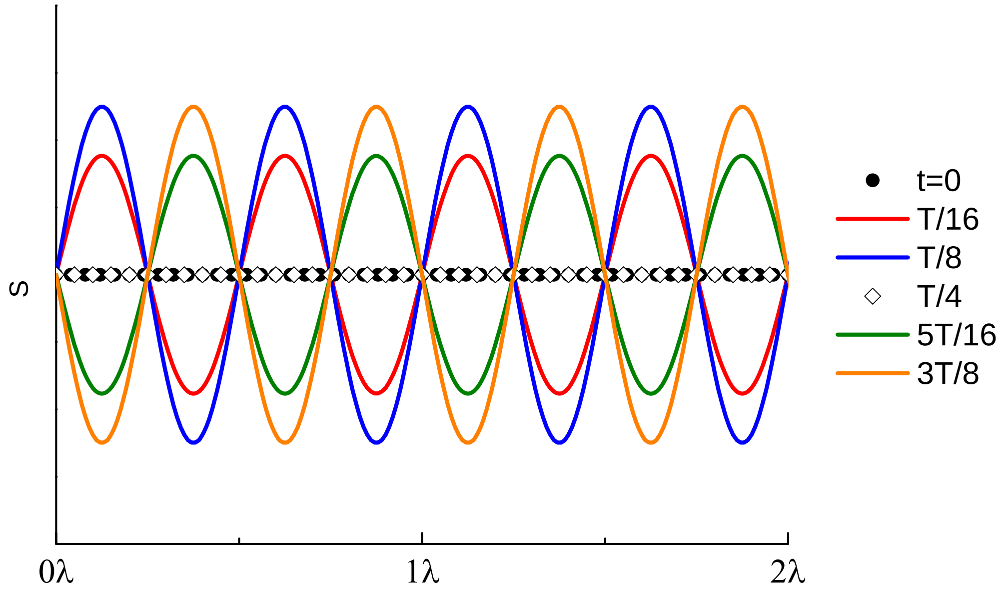
(3) → $\left\langle u_B\right\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 A^2\sin^2(kz)$

(4) → $\left\langle u\right\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 A^2$

(5) → $\left\langle S\right\rangle = \varepsilon_0 c A^2\left[\cos(\omega t)\cos(kz)\sin(\omega t)\sin(kz)\right] = 0$

Δηλαδή σε αντίθεση με τα οδεύοντα κύματα στα οποία η ένταση της ακτινοβολίας I ταυτίζεται με τη μέση τιμή του διανύσματος Poynting και ισούται με I=cu, στα στάσιμα κύματα δεν υπάρχει σταθερή ροή ενέργειας προς μια διεύθυνση και γενικά η εξίσωση I=cu δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Η ενέργεια μετατρέπεται, τοπικά και εναλλάξ, σε ενέργεια μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου όπως στα στάσιμα κύματα σε πακτωμένη χορδή στα δύο άκρα η ενέργεια μετατρέπεται από κινητική και δυναμική και αντίστροφα (για t στα οποία η χορδή είναι οριζόντια και μη-παραμορφωμένη τα σημεία που αντιστοιχούν σε κοιλίες έχουν τη μέγιστη κινητική ενέργεια και για t στα οποία η χορδή είναι πλήρως παραμορφωμένη σε κοιλίες η κινητική ενέργεια είναι μηδέν αλλά σε κόμβους η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη).


t=0
T/16
T/8
3T/16
T/4
E
B
Eκομβ=Bκοιλ
u_E
u_B
S
0λ
2λ
4λ
6λ
8λ
10λ



Το διάνυσμα Poynting μηδενίζεται σε κόμβους του E (που είναι κοιλίες του B) και σε κόμβους του B (που είναι κοιλιες του E). Σε ενδιάμεσα σημεία αλλάζει πρόσημο κάθε T/4, δηλαδή εκφράζει τον τοπικό εγκλωβισμό της ενέργειας του πεδίου μεταξύ διαδοχικών κόμβων.