

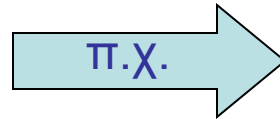
ΓΕΝΙΚΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ

Θεωρία ελαχίστων τετραγώνων (β')
Μη-γραμμικός αντιστάτης

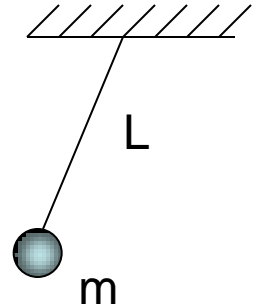
Μαρία Κατσικίνη
E-mail: katsiki@auth.gr
Web: users.auth.gr/katsiki

Προσδιορισμός της νομοτέλειας

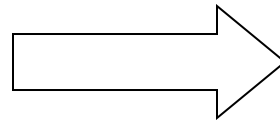
Πείραμα για τη μελέτη
ενός φυσικού φαινομένου



ταλάντωση εκκρεμούς



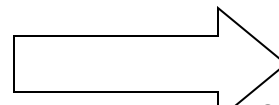
Μετρούμενα μεγέθη



L: μήκος νήματος
m: μάζα σφαίρας
T: περίοδος ταλάντωσης
(υψόμετρο, τριβές,)



Προσδιορισμός της νομοτέλειας
(με την προϋπόθεση ότι χρησιμοποιείται η κατάλληλη μεθοδολογία)



$T \propto Lm$, $T \propto L/m$, $T \propto \sqrt{L} \dots ??????$

Θεωρία ελαχίστων τετραγώνων – Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης

$$y = a_0 + a_1 x$$

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

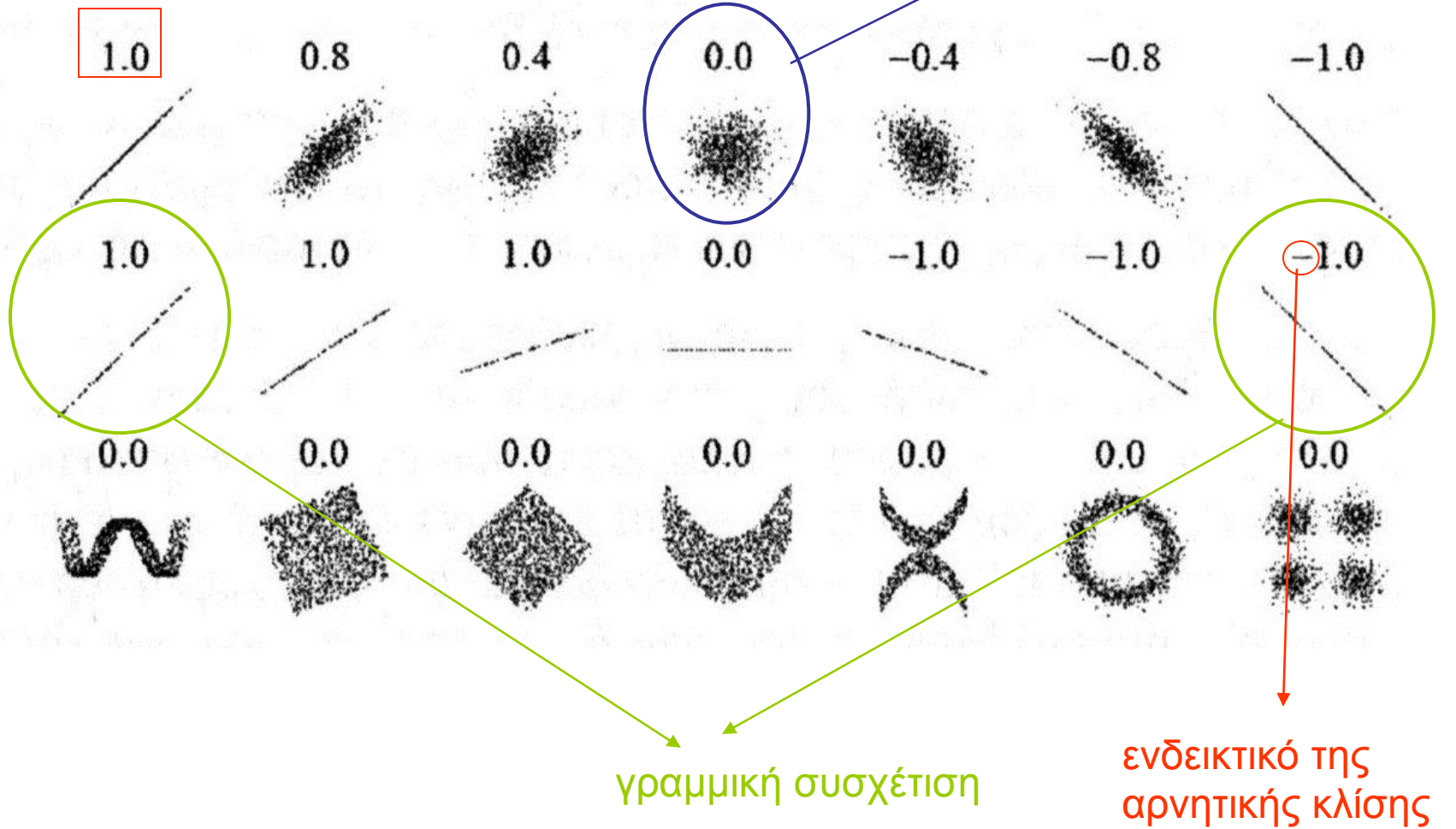
$$a_1 = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης (ή αυτοσυσχετισμού)

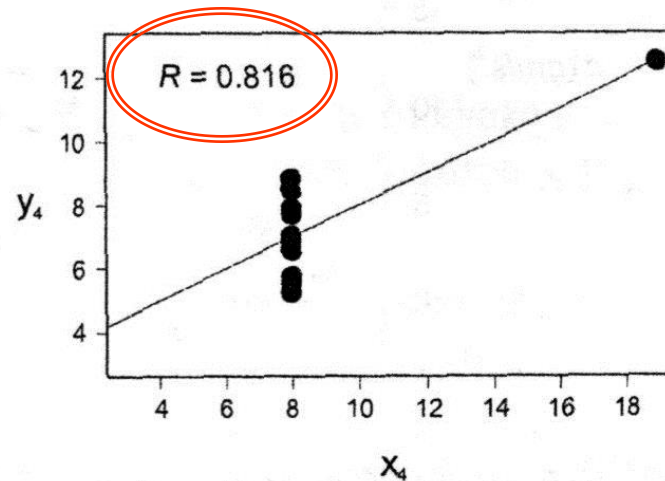
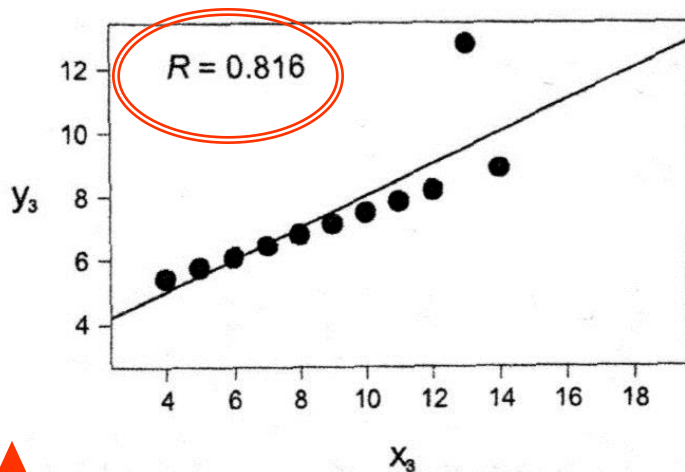
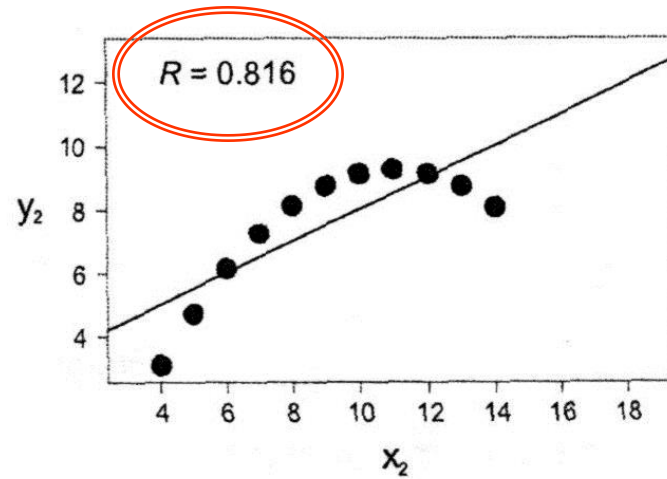
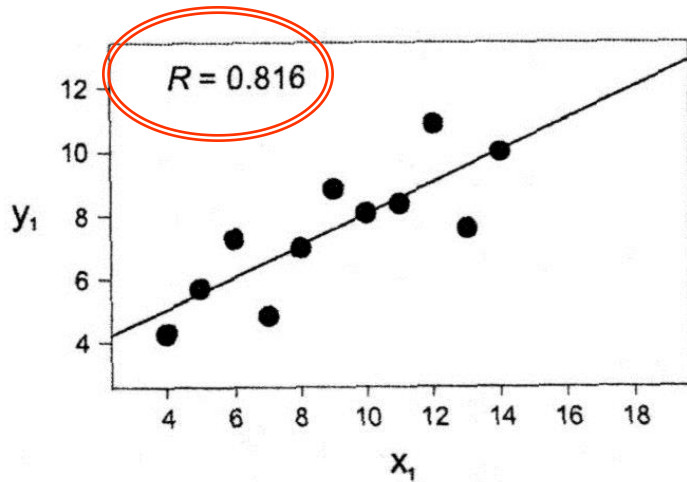
$$-1 \leq R = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}} \leq 1$$

Αξιοπιστία της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων

$R \rightarrow$ δείκτης ποιότητας της εφαρμογής της ΘΕΤ



Αξιοπιστία της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων



Καλό είναι να σχεδιάζονται τα πειραματικά δεδομένα πριν γίνει οποιοσδήποτε υπολογισμός της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων

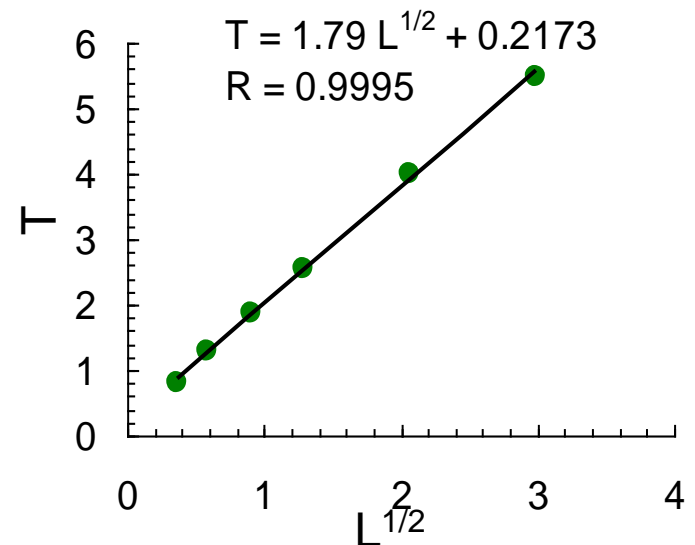
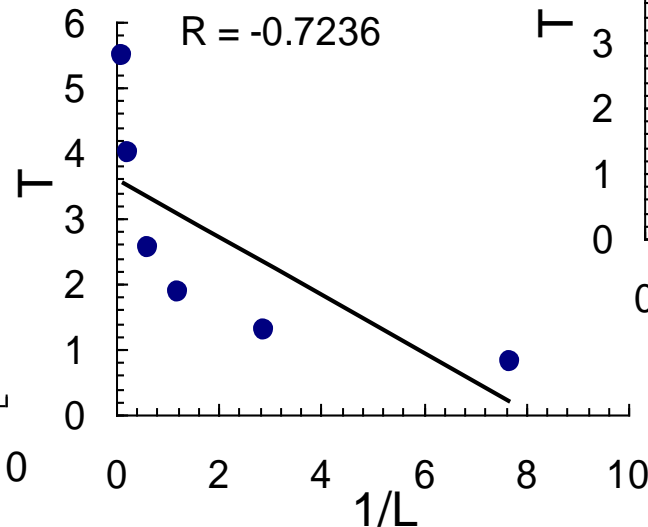
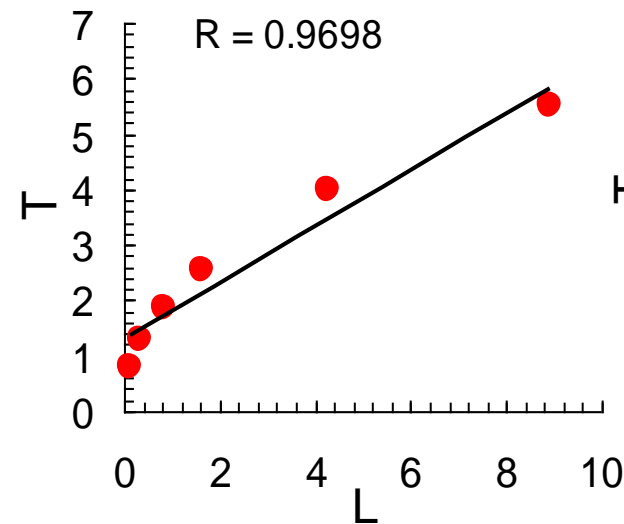
Προσδιορισμός της νομοτέλειας

L(m)	T (sec)
0.130	0.800
0.345	1.28
0.830	1.86
1.65	2.55
4.25	4.00
8.90	5.50

Ποια από τις παρακάτω σχέσεις συνδέει τα μεγέθη L και T;

(i) $T = \alpha L + \beta$ (ii) $T = \alpha/L + \beta$ (iii) $T = \beta + \alpha\sqrt{L}$ ($\alpha, \beta = \text{σταθερές}$)

Να προσδιοριστεί ο συντελεστής αυτοσυσχετισμού R σε κάθε περίπτωση και να γίνει κατάλληλη γραφική παράσταση ώστε να προκύψει ευθεία



Συχνά βοηθάει να λογαριθμήσουμε

Θεωρία ελαχίστων τετραγώνων: αβεβαιότητα

$$y = a_0 + a_1 x$$

Αβεβαιότητα στον υπολογισμό των a_0 και a_1

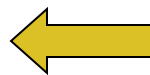
$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\sigma_{a_0} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 \sum x_i^2}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$a_1 = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\sigma_{a_1} = \sqrt{\frac{N \sigma_y^2}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

μέτρο της απόκλισης των σημείων από την ευθεία

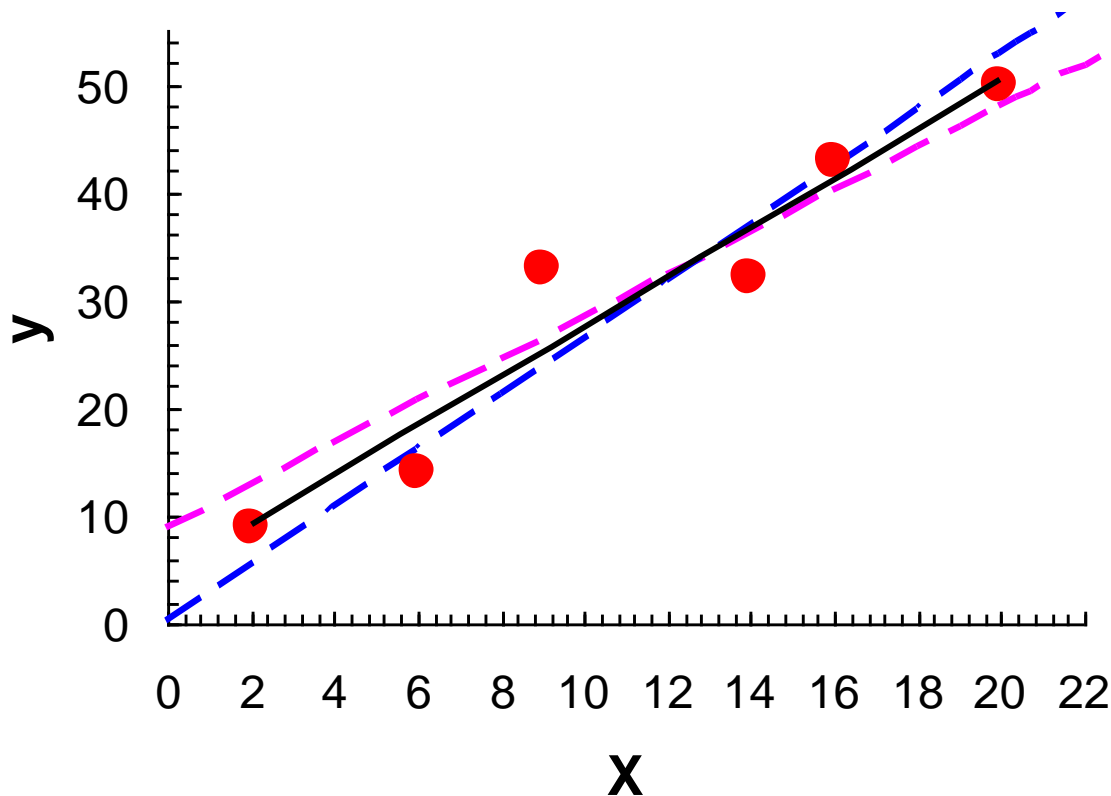


$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - a_1 x_i - a_0)^2}{N - 2}$$

Θεωρία ελαχίστων τετραγώνων: αβεβαιότητα

EET: $y = (a_0 \pm \sigma_{a_0}) + (a_1 \pm \sigma_{a_1})x$

Κεντροειδές της EET: $(x_m, y_m) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)$



- Η αβεβαιότητα στα a_0 και a_1 ορίζει μια δέσμη ευθειών που περνά από το κέντρο βάρους (κεντροειδές) των πειραματικών σημείων.
- Η καλύτερη ευθεία βρίσκεται με πιθανότητα 68% ανάμεσα στις οριακές ευθείες με κλίση $a_1 \pm \sigma_{a_1}$ και τεταγμένη επί την αρχή $a_0 \pm \sigma_{a_0}$.

Συνύπαρξη δύο φυσικών φαινομένων

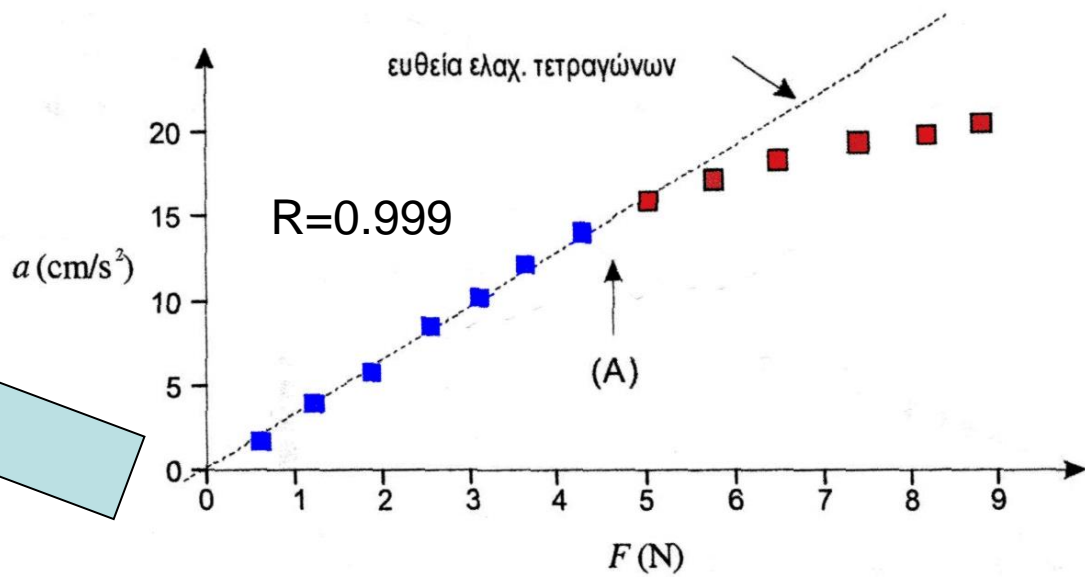
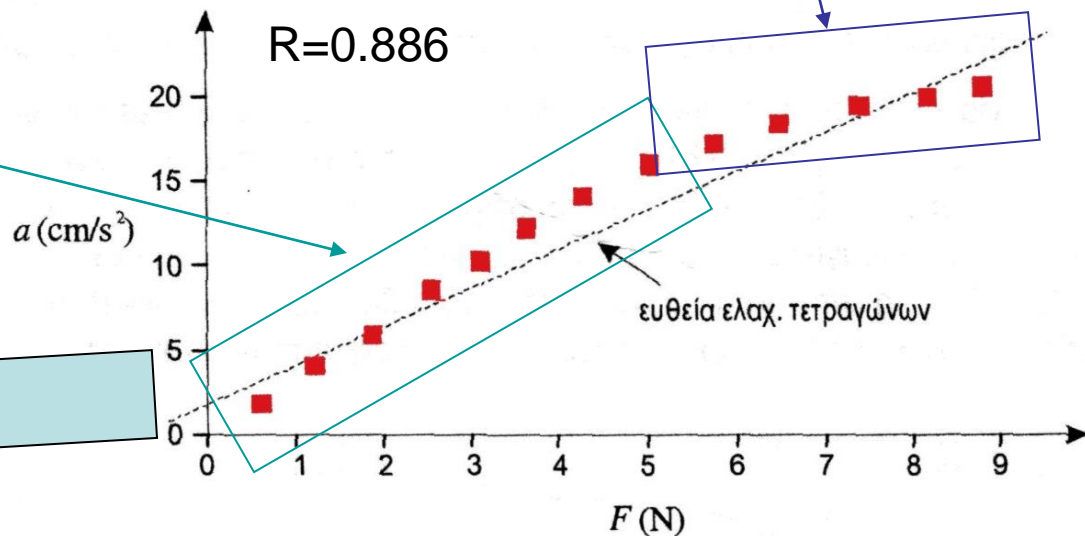
Επιτάχυνση που αποκτά κινητό με την επίδραση δύναμης (β' Ν. Newton, $a=F/m$)

Κακή εφαρμογή της ΘΕΤ

Συχνά συνυπάρχουν δύο φυσικά φαινόμενα που το καθένα μπορεί να κυριαρχεί σε διαφορετική περιοχή του γραφήματος

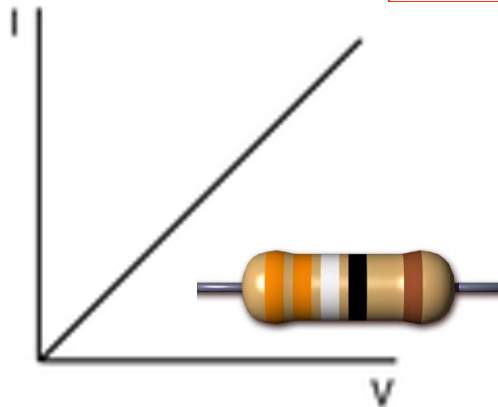
η ΘΕΤ εφαρμόζεται μόνο στην περιοχή που υπάρχει γραμμική εξάρτηση x-y

Επίδραση αντίστασης αέρα → απόκλιση από την ιδανική ευθεία



Αντιστάτης (ωμικός και μη-ωμικός)

I-V χαρακτηριστική ή απόκριση



μεταλλικός αγωγός



δίοδος ημιαγωγού



μη- γραμμική απόκριση
νήμα λαμπτήρα
πυρακτώσεως

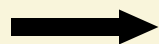
Κλίση = $I/V = 1/R \rightarrow$ σταθερή
Ωμικός αντιστάτης

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

R_0 : αντίσταση σε θερμοκρασία δωματίου T_0

α : θερμικός συντελεστής αντίστασης

↓
μικρός
($\alpha_{Cu} = 0.0039K^{-1}$)



$R \sim$ σταθερή για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας

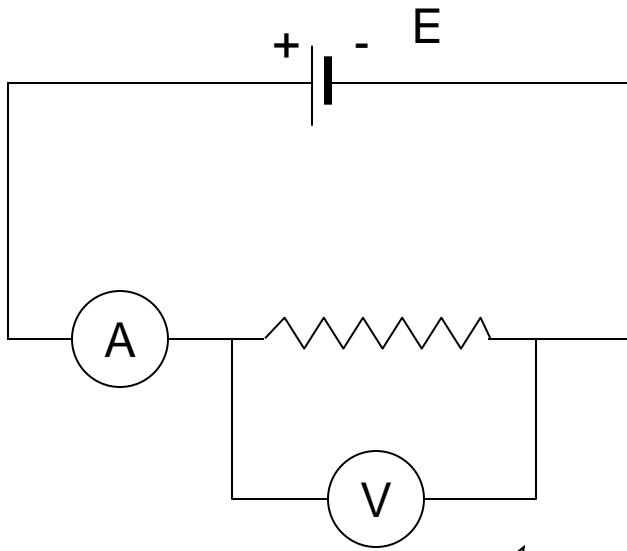


Θέρμανση
λόγω
φαινομένου
Joule

$$Q = I^2 R t$$

Μη - ωμικός αντιστάτης

Μέτρηση αντίστασης αντιστάτη:



Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ohm

$$R = \frac{V}{I}$$

→ για να μετρηθεί η αντίσταση είναι απαραίτητη η διέλευση ρεύματος από τον αντιστάτη

→ αύξηση θερμοκρασίας (για υψηλά ρεύματα)

→ μη-γραμμική απόκριση & μεταβολή της R

αυτοθέρμανση

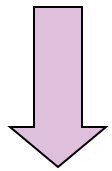
Θερμίστορ

= Αντιστάτες με μεταβλητή αντίσταση $\rightarrow R \neq \text{σταθ.}$

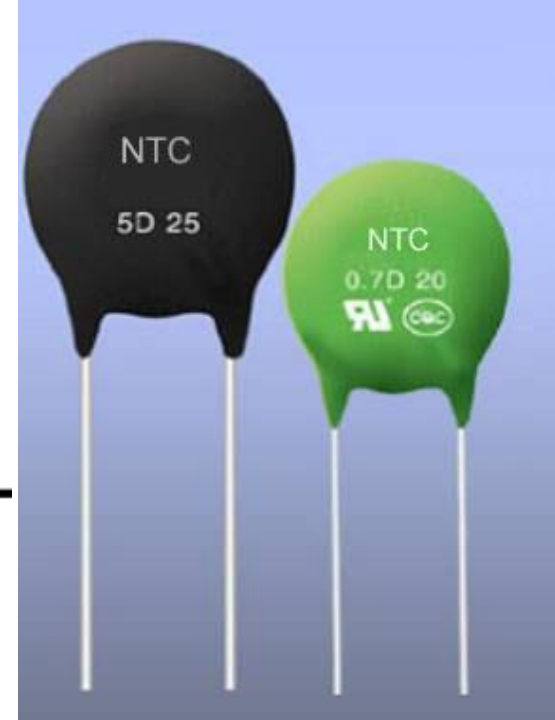
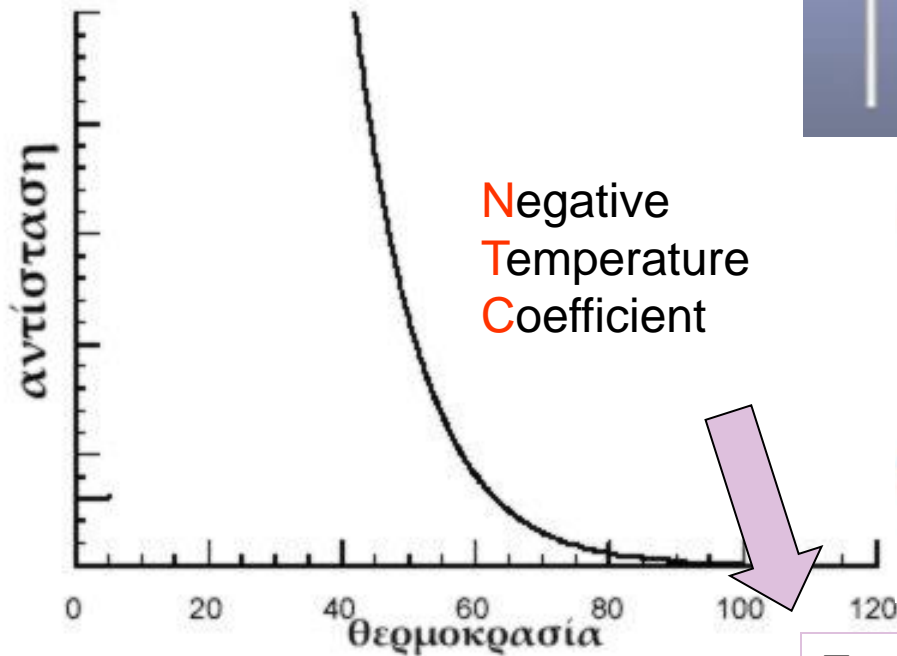
Μεταβολή της αντίστασης με τη θερμοκρασία

Αύξηση \rightarrow PTC

ελάττωση \rightarrow NTC



Εφαρμογές ως
αισθητήρες
θερμοκρασίας



Εφαρμογές
στις ασφάλειες

Θερμίστορ

Μεταβολή της αντίστασης με τη θερμοκρασία (T)

$$R = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$$



Αν σε θερμοκρασία T_0 η αντίσταση είναι $R_0 \rightarrow R_0 = A \cdot e^{\frac{B}{T_0}}$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{A \cdot e^{\frac{B}{T}}}{A \cdot e^{\frac{B}{T_0}}} \Rightarrow R = R_0 e^{B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

σε NTC θερμίστορ η αντίσταση ελαττώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας
μέρος της ενέργειας αποβάλλεται με τη μορφή θερμότητας προς το περιβάλλον

Θερμίστορ

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

προσφερόμενη
ηλεκτρική
ισχύς

=

απορροφούμενη
ισχύς που απαιτείται
για την άνοδο της
θερμοκρασίας του
θερμίστορ

+

θερμικές απώλειες
προς το περιβάλλον

Ρυθμός αύξησης
θερμοκρασίας

NΟΜΟΣ ΨΥΞΗΣ
NEWTON

$$IV = C \frac{dT}{dt} + \delta(T - T_{\text{περιβ.}})$$

θερμοχωρητικότητα
(J / K)

συντελεστής θερμικών
απωλειών (W / K)

$$\tau = \frac{C}{\delta}$$

θερμική σταθερά χρόνου
καθορίζει πόσο γρήγορα
αποκαθίσταται θερμική
ισοροπία με το
περιβάλλον από τη στιγμή
που θα διέλθει ρεύμα από
το θερμίστορ

Προσοχή στις μετρήσεις

σελ. 59-71 (σημειώσεις)

Μέτρηση τάσης

- Ανάψτε το τροφοδοτικό και περιστρέψτε τον επιλογέα στην ένδειξη 5.
- Περιστρέψτε τον επιλογέα του πολυμέτρου στη θέση βολτομέτρου (V) και συνδέστε καλώδια στους ακροδέκτες **COM** και **V/Ω/A**.
- Συνδέστε το πολύμετρο με την έξοδο συνεχούς τάσης του τροφοδοτικού (κόκκινο με κόκκινο, μαύρο με μαύρο).
- Συγκρίνετε την ένδειξη του πολυμέτρου με την ονομαστική τιμή τάσης 5 V.
- Αντιμεταθέστε τα καλώδια στους ακροδέκτες εισόδου του πολυμέτρου; Τι παρατηρείτε;
- Συνδέστε **παράλληλα** με το ψηφιακό και ένα αναλογικό βολτόμετρο. Συγκρίνετε τις ενδείξεις τους και σχολιάστε.

Μέτρηση θερμοκρασίας

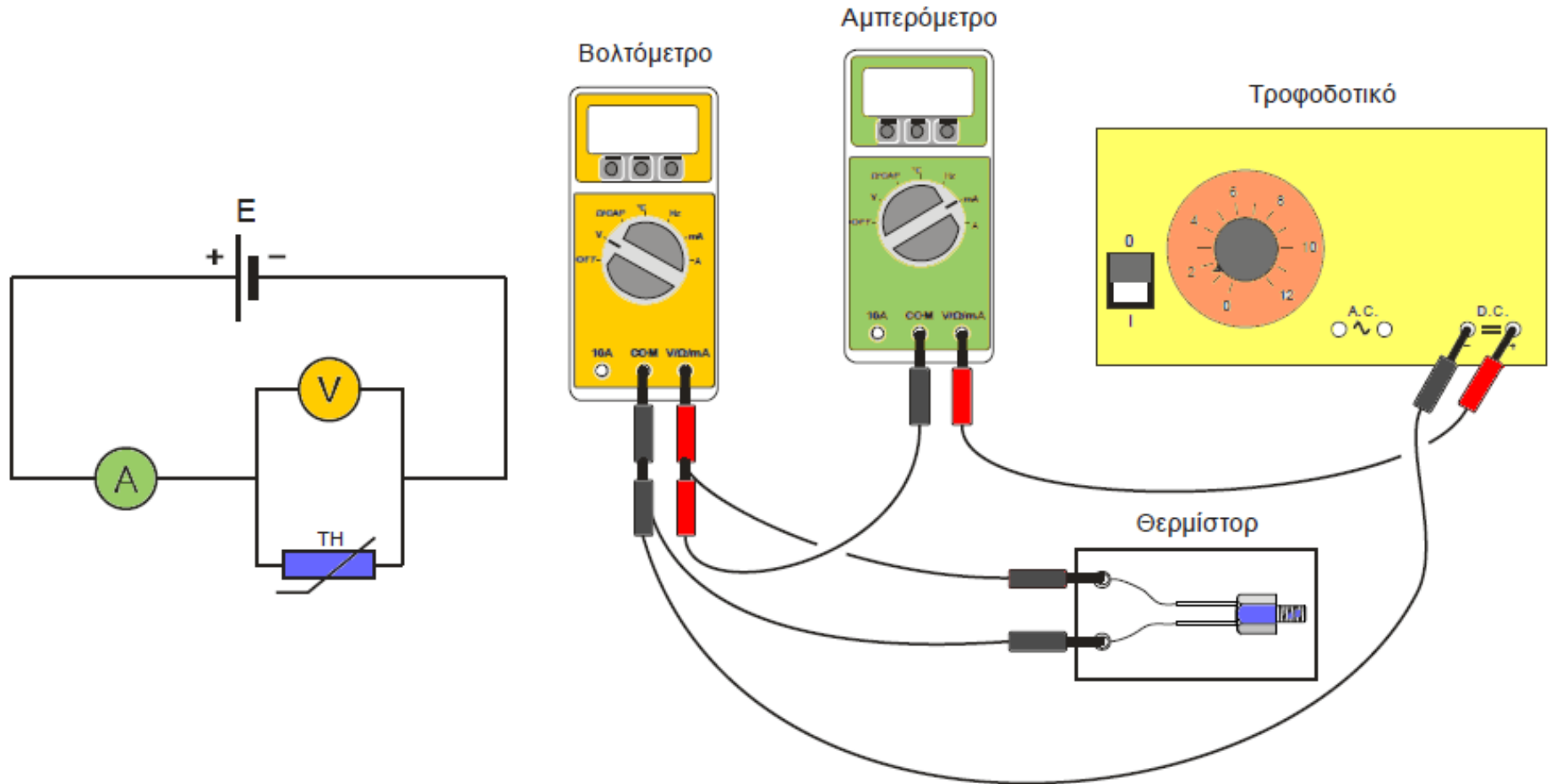
- Αποσυνδέστε τα καλώδια και περιστρέψτε τον επιλογέα του πολυμέτρου στη θέση θερμομέτρου (°C)
- Καταγράψτε την τιμή της θερμοκρασίας δωματίου (μέσος όρος 3 μετρήσεων).

Μέτρηση αντίστασης

- Συνδέστε το θερμίστορ στους ακροδέκτες **COM** και **V/Ω/A**.
- Περιστρέψτε τον επιλογέα του πολυμέτρου στη θέση **Ω**.
- Σημειώστε την αντίσταση του θερμίστορ στη θερμοκρασία περιβάλλοντος
- Πιάστε με το χέρι σας το θερμίστορ. Τι παρατηρείτε; Ποιο είναι το είδος του θερμίστορ, NTC ή PTC;
- Αφήστε το θερμίστορ. Καταγράψτε τις τιμές της αντίστασης μετά από 1, 3 και 5 min. Σχολιάστε.
- Πόσος χρόνος απαιτείται για να έλθει το θερμίστορ σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον;
- Αναπνέετε κανονικά μπροστά στο θερμίστορ. Τι παρατηρείτε;
- Φυσήξτε δυνατά μπροστά στο θερμίστορ. Τι παρατηρείτε;
- Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

ΑΣΚΗΣΗ

Καταγραφή I-V χαρακτηριστικής του θερμίστορ



- Αρχικά το τροφοδοτικό να είναι κλειστό (διακόπτης Power OFF, θέση 0 Volts)
- Χρησιμοποιήστε την έξοδο της συνεχούς τάσης
- Θετικός πόλος πηγής → θετικός ακροδέκτης οργάνου (κόκκινος)
- Ψηφιακό πολύμετρο 1 → Αμπερόμετρο → θέση mA → RAN: 2 δεκαδικά ψηφία
- Ψηφιακό Πολύμετρο 2 → Βολτόμετρο → θέση V → RAN: 2 δεκαδικά ψηφία

- Καταγράψτε 20 μετρήσεις τάσης (V) – έντασης ρεύματος (I) αυξάνοντας την τάση του τροφοδοτικού (0.5 έως 10 Volt με βήμα 0.50 Volt).

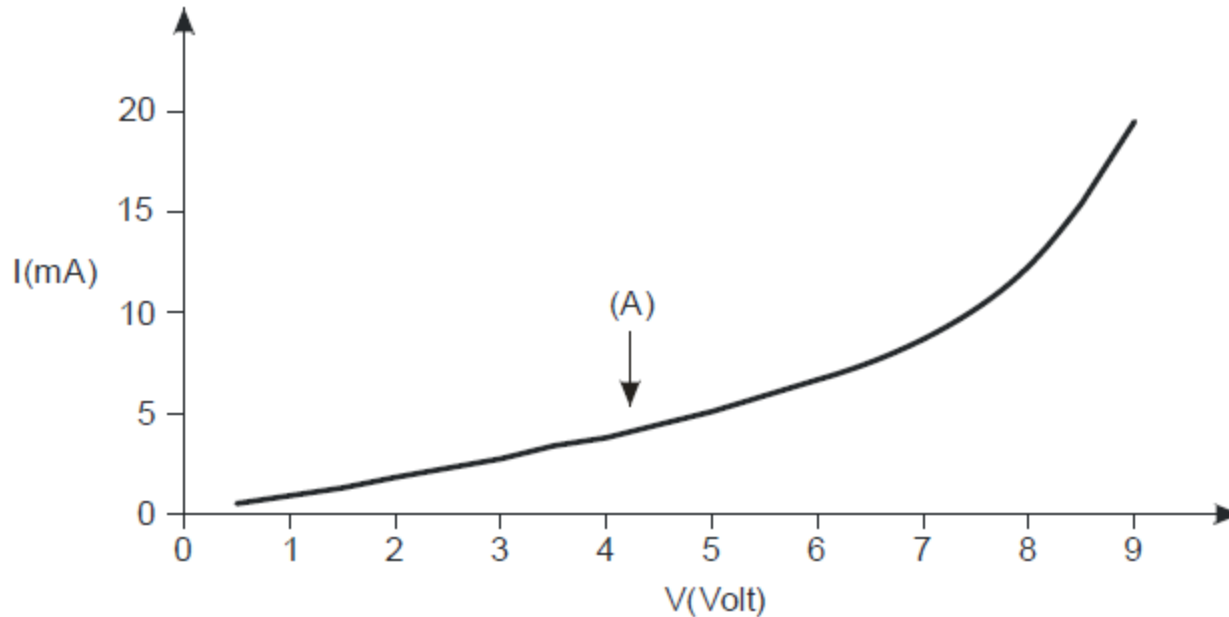
ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

- Ως τάση στα άκρα του θερμίστορ να καταγράφετε την ένδειξη του ψηφιακού βολτομέτρου και όχι της τροφοδοσίας
- Μετά από κάθε μεταβολή τάσης να περιμένετε να αποκατασταθεί θερμική ισορροπία μεταξύ του θερμίστορ και του περιβάλλοντος, δηλαδή να περιμένετε η ένδειξη ρεύματος να σταθεροποιηθεί.
- Η τάση του τροφοδοτικού δεν πρέπει να ξεπεράσει τα 10 Volt, γιατί το θερμίστορ κινδυνεύει να καταστραφεί λόγω υπερθέρμανσης

ΑΣΚΗΣΗ

Για την εργασία

- Σχεδιάστε σε χιλιοστομετρικό χαρτί τα πειραματικά σημεία ($I - V$ δεδομένα).



- Προσδιορίστε το σημείο A πάνω από το οποίο αρχίζει η κλίση να μην είναι σταθερή (έναρξη αυτοθέρμανσης).
- Σχεδιάστε σε χιλιοστομετρικό χαρτί τη γραφική παράσταση της αντίστασης του θερμίστορ $R (=V/I)$ συναρτήσει της τάσης V . Προσδιορίστε το σημείο A πάνω από το οποίο αρχίζει η αυτοθέρμανση. Για την ευκολότερη επιλογή του σημείου (A), παρουσιάζει κάποιο πλεονέκτημα η χρήση της καμπύλης $R-V$ σε σχέση με την καμπύλη $I-V$; Για ποιο λόγο η καμπύλη $R-V$ έχει πολύ μεγαλύτερη διασπορά πειραματικών σημείων από την καμπύλη $I-V$;

- Επιλέξτε κατάλληλο πλήθος πειραματικών σημείων στην αρχή της πειραματικής καμπύλης $I-V$ (μέχρι το σημείο A) και εφαρμόστε ΘΕΤ. Διέρχεται η ευθεία από το σημείο $(0, 0)$;
- Υπολογίστε την αντίσταση του θερμίστορ σε θερμοκρασία δωματίου και την αβεβαιότητα στην τιμή αυτή χρησιμοποιώντας (α) το διάγραμμα $R-V$ και (β) το διάγραμμα $I-V$.
- Συγκρίνετε την τιμή της υπολογιζόμενης αντίστασης του θερμίστορ σε θερμοκρασία δωματίου με αυτή με που μετρήσατε απευθείας με το ψηφιακό πολύμετρο με τη χρήση του ως θερμόμετρο.
- Σχεδιάστε εκ νέου σε χιλιοστομετρικό χαρτί τη γραφική παράσταση $I-V$ αλλά τώρα εφαρμόστε ΘΕΤ για όλο το εύρος τιμών των μετρήσεών σας. Συγκρίνετε τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης R με αυτόν που προκύπτει από τη χρήση μόνο της γραμμικής περιοχής (ως το σημείο A). Σχολιάστε.
- Με βάση τις πειραματικές σας μετρήσεις, ευσταθεί ο ισχυρισμός ότι στο πείραμά μας υπάρχουν δύο νομοτέλειες που συνυπάρχουν, αλλά κυριαρχεί η μία έναντι της άλλης ανάλογα με την τιμή της εφαρμοζόμενης τάσης;

- Σχεδιάστε τα πειραματικά σημεία $I - V$ σε ημιλογαριθμικό χαρτί. Παρατηρείτε ότι κάποιο τμήμα της καμπύλης γίνεται ευθεία; Με βάση το δεδομένο αυτό, μπορείτε να προτείνετε τη νομοτέλεια που ισχύει προσεγγιστικά σε αυτή την περιοχή;
- Μπορείτε τώρα να προτείνετε μια συνολική (ενιαία) έκφραση για την περιγραφή του συνολικού φαινομένου της εξάρτησης της I από τη V ;
- Είναι δυνατόν να κατασκευαστεί
 - (α) ένα θερμόμετρο και
 - (β) ένα όργανο μέτρησης της ταχύτητας του ανέμου (ανεμόμετρο)χρησιμοποιώντας τα όργανα που χρησιμοποιήσατε στο εργαστήριο; Με ποιό τρόπο θα μπορούσε να γίνει η βαθμονόμησή τους;