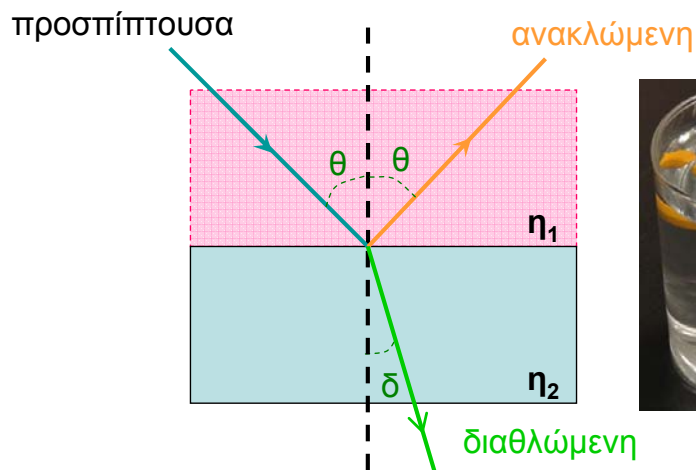


7β Γεωμετρική οπτική - οπτικά όργανα

- Διάθλαση
- Οπτικές ίνες
- Πρίσματα
- Φακοί

Μαρία Κατσικίνη
katsiki@auth.gr
users.auth.gr/katsiki

Διάθλαση του φωτός



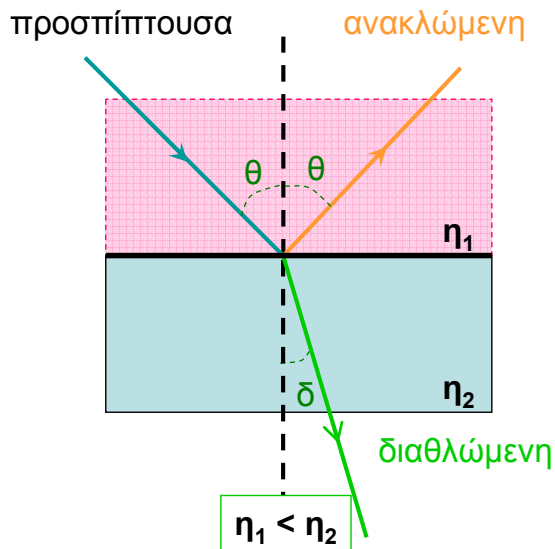
Νόμοι της διάθλασης

A. Η προσπίπτουσα, η διαθλώμενη και η κάθετη στο σημείο πρόσπτωσης είναι συνεπίπεδες.

B. Η γωνία διάθλασης εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης και από τους δείκτες διάθλασης των δύο μέσων σύμφωνα με το νόμο του Snell:

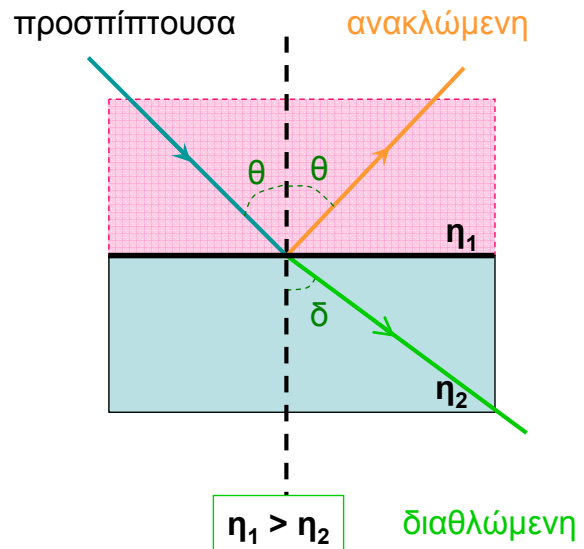
$$\eta_1 \sin \theta = \eta_2 \sin \delta$$

Διάθλαση του φωτός



διάδοση από οπτικώς αραιότερο μέσο σε οπτικώς πυκνότερο

$$\delta < \theta$$

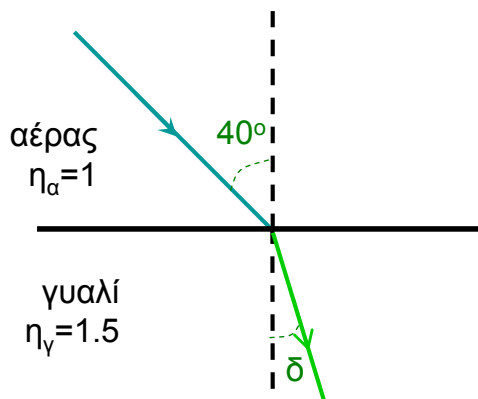


διάδοση από οπτικώς πυκνότερο μέσο σε οπτικώς αραιότερο

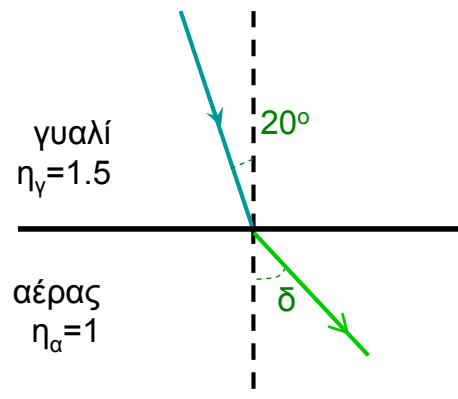
$$\delta > \theta$$

Άσκηση

Να βρεθεί η γωνία διάθλασης
(α) μιας δέσμης που διαδίδεται από τον αέρα σε γυαλί με δείκτη διάθλασης 1.50. Η γωνία πρόσπτωσης είναι 40° .
(β) μιας δέσμης που διαδίδεται από γυαλί στον αέρα. Η γωνία πρόσπτωσης είναι 20° .

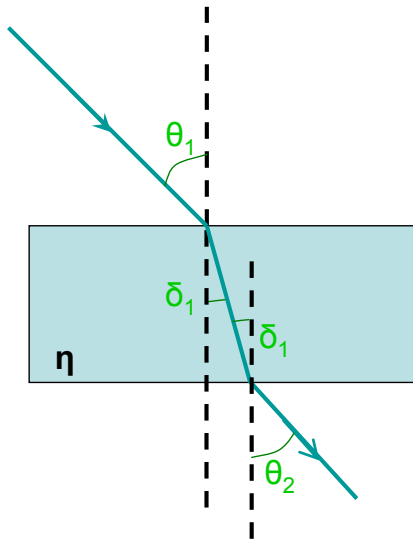


$$\eta_1 \sin \theta = \eta_2 \sin \delta \Rightarrow 1 \cdot \sin 40^\circ = 1.5 \cdot \sin \delta \Rightarrow \delta = 25.4^\circ$$



$$\eta_1 \sin \theta = \eta_2 \sin \delta \Rightarrow 1.5 \cdot \sin 20^\circ = 1 \cdot \sin \delta \Rightarrow \delta = 30.9^\circ$$

Διάθλαση από πλακίδιο με παράλληλες έδρες



1^η διαχωριστική επιφάνεια

$$\eta_\alpha \sin \theta_1 = \eta \sin \delta_1 \Rightarrow \sin \theta_1 = \eta \sin \delta_1 \quad \text{1}$$

2^η διαχωριστική επιφάνεια

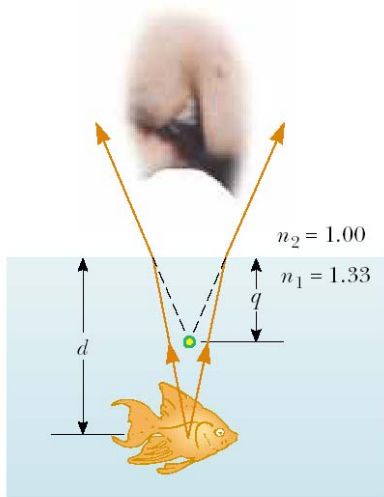
$$\eta \sin \delta_1 = \eta_\alpha \sin \theta_2 \Rightarrow \eta \sin \delta_1 = \sin \theta_2 \quad \text{2}$$

1 & 2

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

→ Παράλληλη μετατόπιση

Διάθλαση στο νερό



$$\tan \delta = \frac{D}{q} \quad \text{1}$$

$$\tan \theta = \frac{D}{d} \quad \text{2}$$

N. Snell: $\eta \sin \theta = \sin \delta$

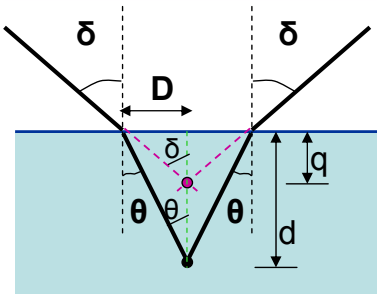
$$\eta \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \cos^2 \delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \delta = \sqrt{1 - \eta^2 (1 - \cos^2 \theta)}$$

1 & 2 $q \tan \delta = d \tan \theta \Rightarrow q \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = d \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

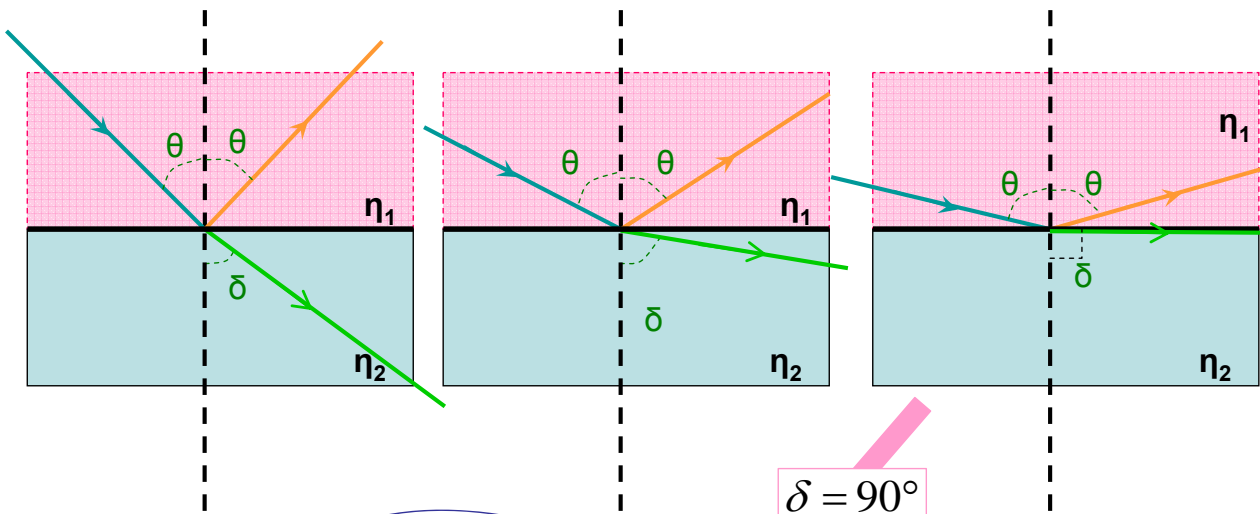
$$q \frac{\eta \sin \theta}{\sqrt{1 - \eta^2 (1 - \cos^2 \theta)}} = d \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow q = d \frac{\sqrt{1 - \eta^2 (1 - \cos^2 \theta)}}{\eta \cos \theta}$$

Για μικρές $\theta \rightarrow \cos \theta \sim 1 \rightarrow q = d \frac{1}{\eta} = \frac{d}{1.33}$



Ολική ανάκλαση

διάδοση από οπτικώς πυκνότερο μέσο σε οπτικώς αραιότερο ($\eta_1 > \eta_2$)

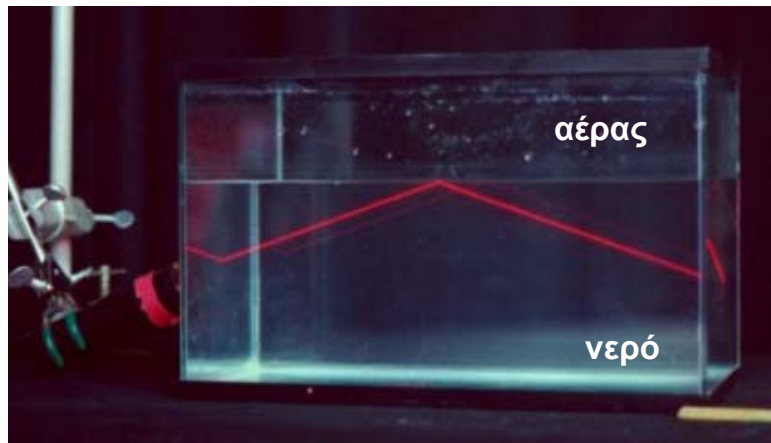
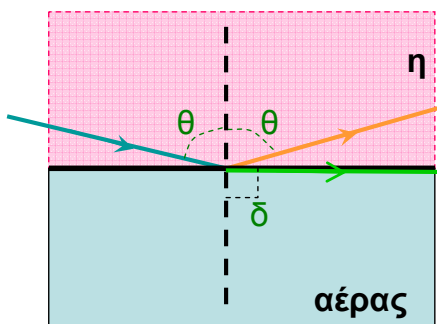


Ορική γωνία πρόσπτωσης για να συμβεί ολική ανάκλαση

$$\sin \theta_{op} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

$$\delta = 90^\circ$$

Ολική ανάκλαση



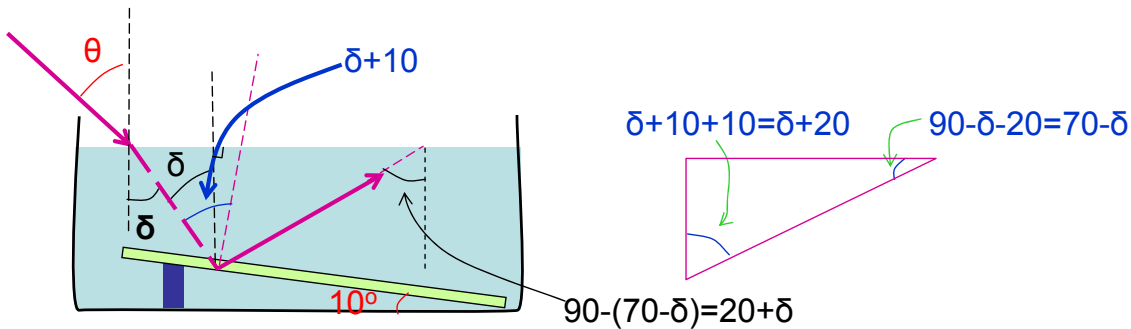
$$\sin \theta = \frac{1}{\eta}$$

Διαχωριστική επιφάνεια νερού – αέρα ($\eta_{\text{νερού}} = 1.33$)

$$\sin \theta = \frac{1}{1.33} \Rightarrow \theta = 48.8^\circ$$

Άσκηση

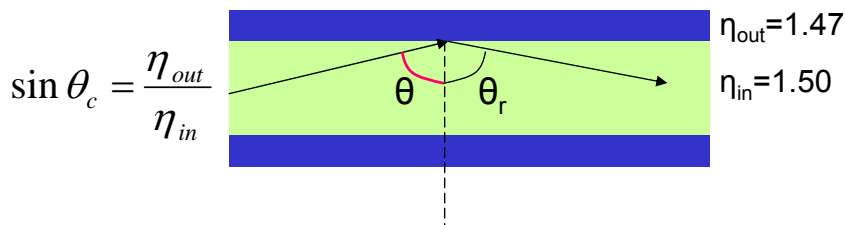
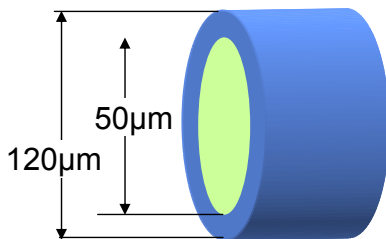
Ένα επίπεδο κάτοπτρο έχει τοποθετηθεί στον πυθμένα ενός διαφανούς δοχείου που περιέχει νερό και σχηματίζει γωνία 10° με το οριζόντιο επίπεδο. Μια στενή μονοχρωματική δέσμη προσπίπτει στην επιφάνεια του νερού με γωνία θ . Εάν ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι $4/3$ να προσδιοριστεί η μέγιστη γωνία θ για την οποία το φως μετά την ανάκλαση στο κάτοπτρο θα αναδυθεί από την επιφάνεια του νερού.



$$\sin \theta_{op} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta_{op} = 48.6^\circ \rightarrow 48.6 = 20 + \delta \Rightarrow \delta = 28.6^\circ$$

$$\eta_1 \sin \theta = \eta_2 \sin \delta \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{3} \sin \delta = 0.638 \Rightarrow \theta = 39.7^\circ$$

ΟΠΤΙΚΕΣ ΪΝΕΣ

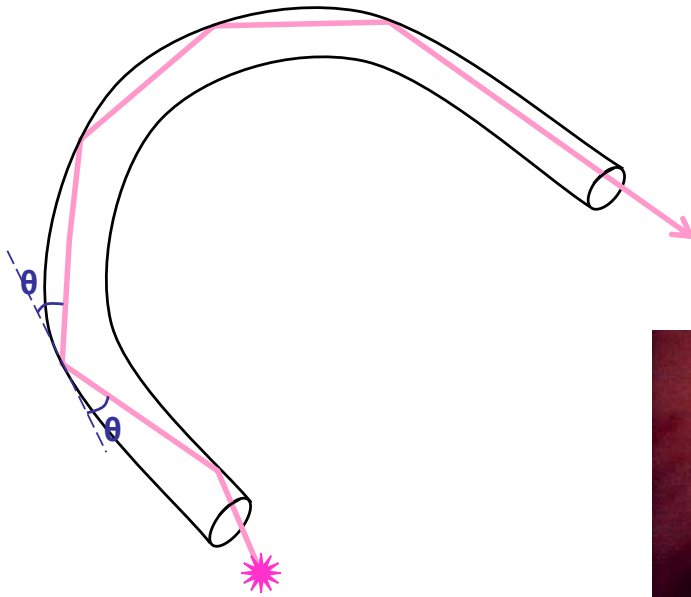


Χρησιμοποιούνται :

- στις τηλεπικοινωνίες για τη μεταφορά σημάτων
- στα ενδοσκόπια (ιατρική)

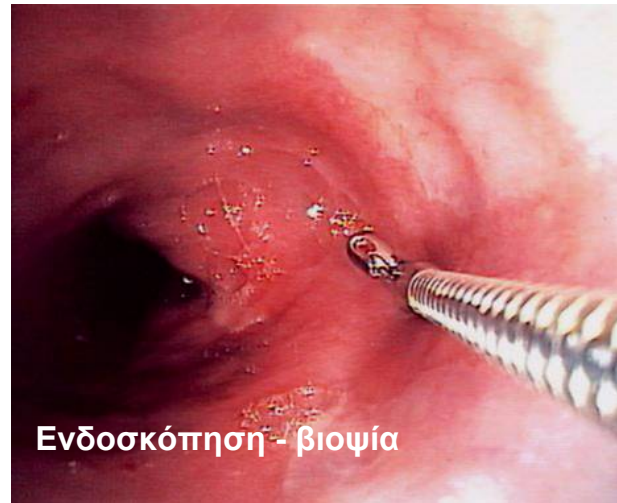


ΟΠΤΙΚΕΣ ΙΝΕΣ



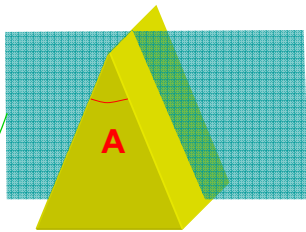
Δεσμίδες οπτικών ινών χρησιμοποιούνται για την μεταφορά εικόνας από το εσωτερικό του σώματος.

Ενδοσκόπιο



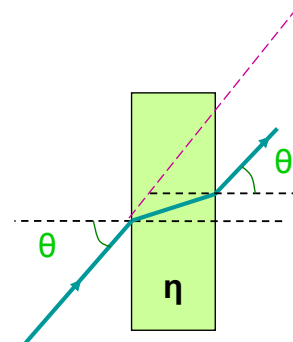
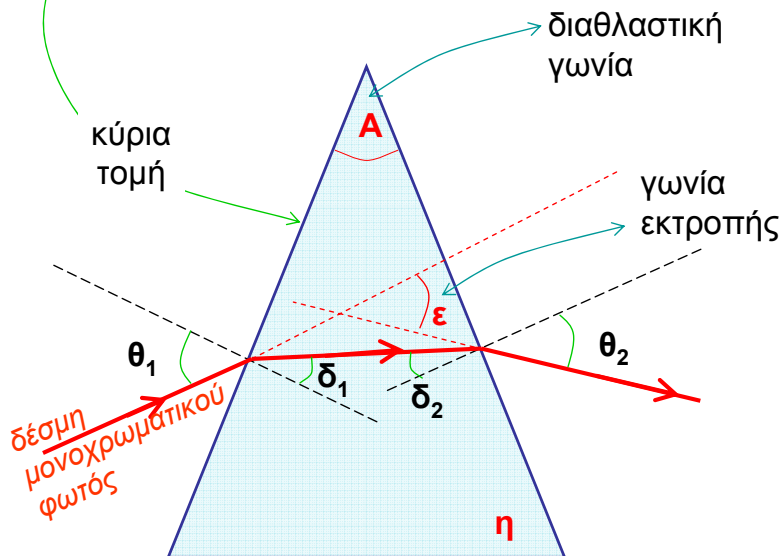
Ενδοσκόπηση - βιοψία

Το πρίσμα



Πρίσμα:

δύο επίπεδα που χωρίζουν διαφανές μέσο (π.χ. γυαλί) από το περιβάλλον του (συνήθως αέρας)



Γωνία εκτροπής πρίσματος

$$\varepsilon = (\theta_1 - \delta_1) + (\theta_2 - \delta_2)$$

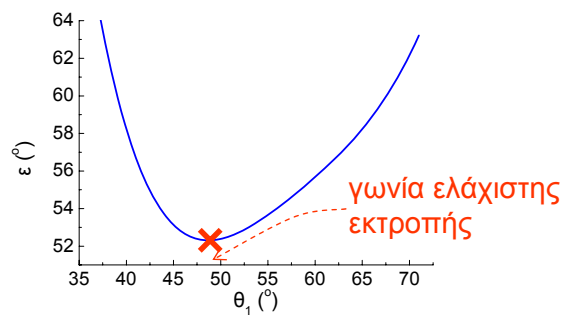
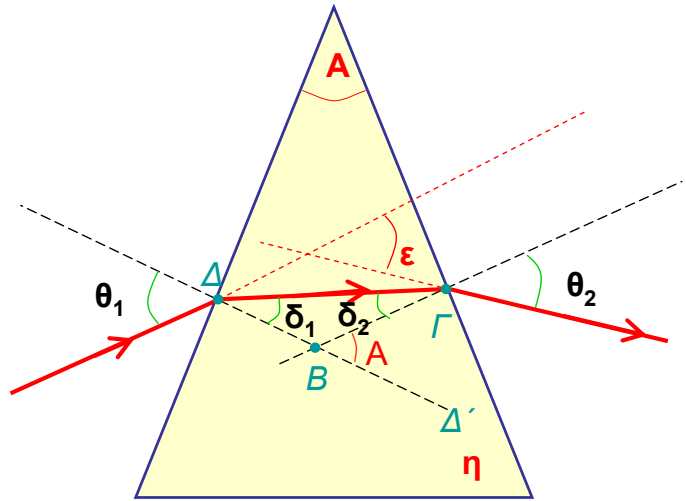
$$\Delta' \hat{B} \Gamma = A \Rightarrow A = \delta_1 + \delta_2$$

αμοιβαία κάθετες πλευρές

$$\Rightarrow \varepsilon = \theta_1 - \delta_1 + \theta_2 - \delta_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \theta_1 + \theta_2 - A$$

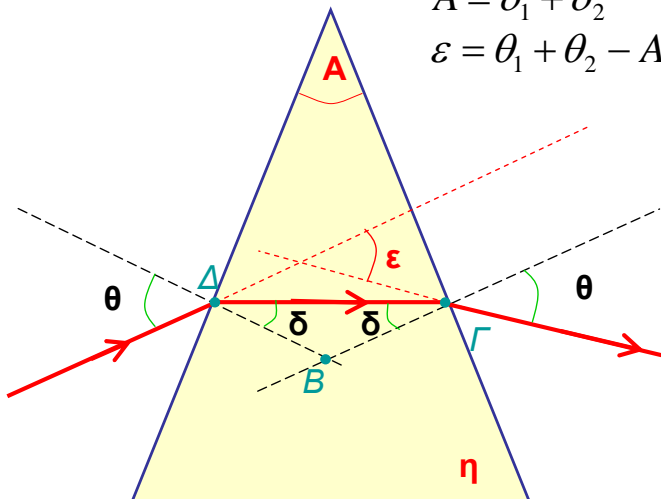
η γωνία εκτροπής εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης και από τη γωνία ανάδυσης (εξόδου) η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης ...



Γωνία ελάχιστης εκτροπής

$$A = \delta_1 + \delta_2$$

$$\varepsilon = \theta_1 + \theta_2 - A$$



γωνία ελάχιστης εκτροπής (ε_m)
για γωνία πρόσπτωσης =
γωνία ανάδυσης

$$\varepsilon_m = 2\theta - A \Rightarrow \theta = \frac{\varepsilon_m + A}{2}$$

$$A = 2\delta$$

Snell στο Δ :

$$1 \cdot \sin \theta = \eta \cdot \sin \delta \Rightarrow \sin \frac{\varepsilon_m + A}{2} = \eta \cdot \sin \frac{A}{2} \Rightarrow \eta = \frac{\sin \frac{\varepsilon_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Χρήσιμη μέθοδος προσδιορισμού του δείκτη διάθλασης ενός υλικού

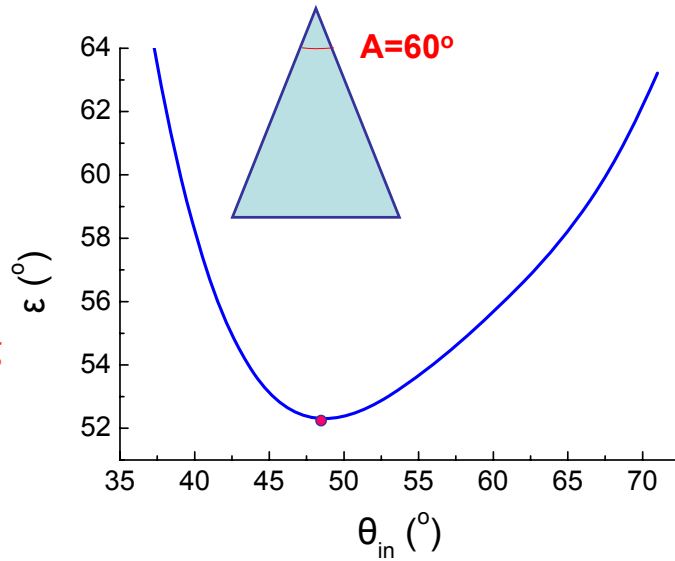
Γωνία ελάχιστης εκτροπής

$$\eta = \frac{\sin \frac{\varepsilon_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Γωνία ελάχιστης εκτροπής

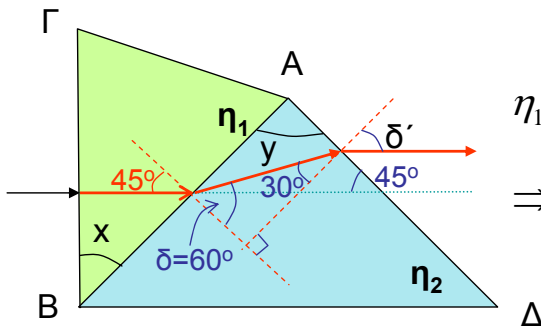
$$\varepsilon_m = 52.5^\circ$$

$$\eta = 1.66$$



Άσκηση

Στο σχήμα τα πρίσματα ΒΑΓ και ΑΒΔ έχουν διαθλαστικές γωνίες $x=45^\circ$ και $y=90^\circ$ και δείκτες διάθλασης $\eta_1 = \sqrt{3}$ και $\eta_2 = \sqrt{2}$ αντίστοιχα. Φωτεινή ακτίνα πέφτει κάθετα στην ΓΒ. Να βρεθεί η εκτροπή της ακτίνας.



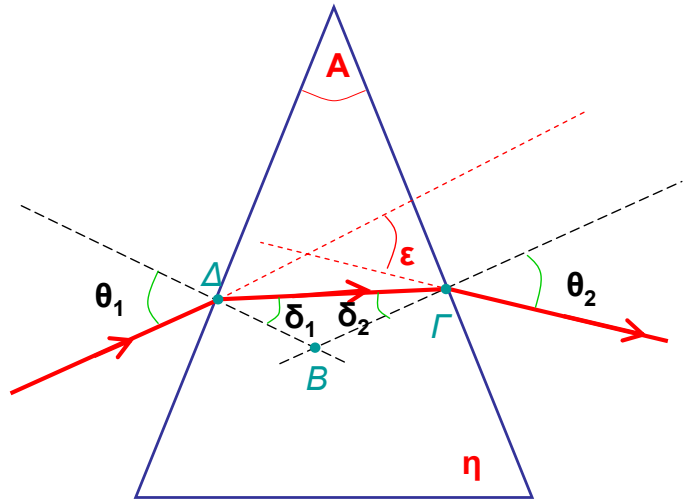
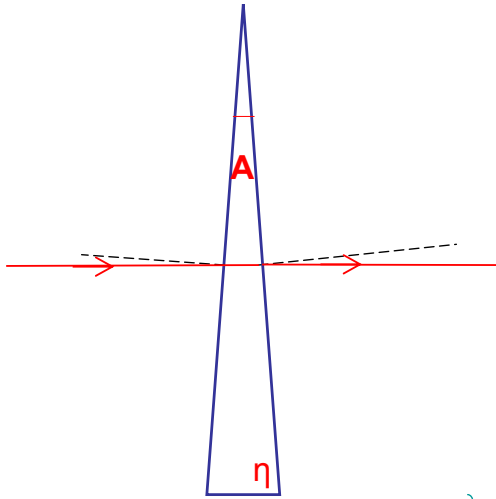
$$\eta_1 \sin 45 = \eta_2 \sin \delta \Rightarrow \sqrt{3} \sin 45 = \sqrt{2} \sin \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \delta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \delta = 60^\circ$$

$$\eta_2 \sin 30 = 1 \cdot \sin \delta' \Rightarrow \sqrt{2} \frac{1}{2} = 1 \cdot \sin \delta' \Rightarrow \delta' = 45^\circ$$

* παράλληλη μετατόπιση

Λεπτό πρίσμα



A → μικρή
 πρόσπτωση → σχεδόν κάθετη
 δ₁ : μικρή → δ₂ : μικρή

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \theta_1 + \theta_2 - A \\ A &= \delta_1 + \delta_2 \end{aligned}$$

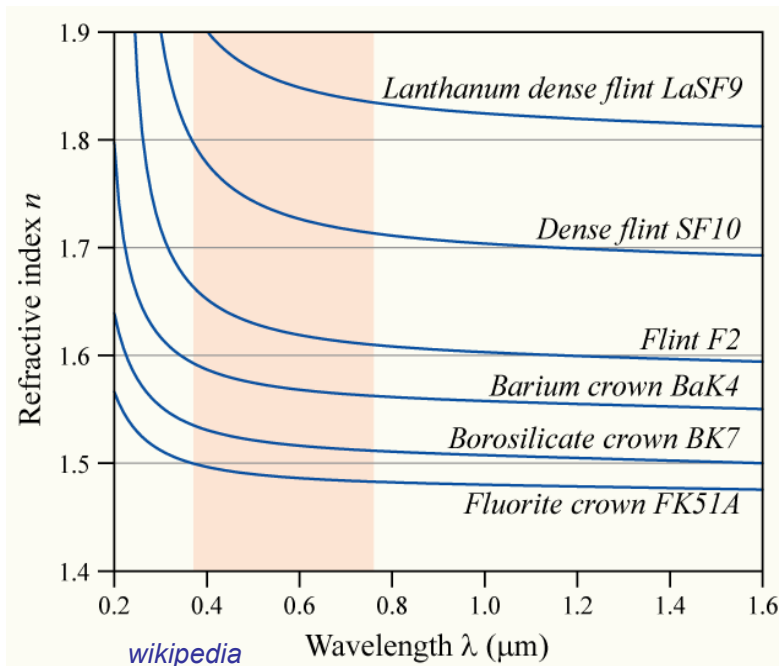
Snell στο Δ: $1 \cdot \sin \theta_1 = \eta \cdot \sin \delta_1 \Rightarrow \theta_1 = \eta \cdot \delta_1$
Snell στο Γ: $\eta \cdot \sin \delta_2 = 1 \cdot \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \eta \cdot \delta_2$

$$\varepsilon = (\eta - 1)A$$

Τύπος λεπτών πρισμάτων

Διασκεδασμός

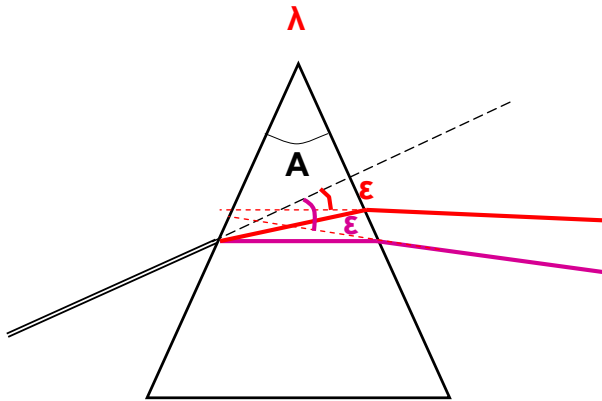
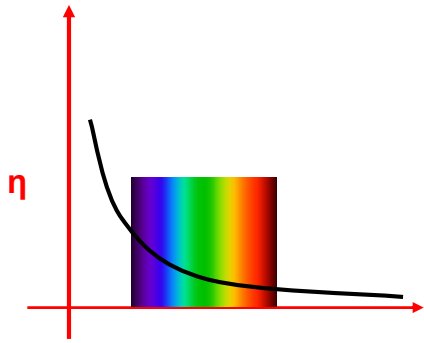
Διασκεδασμός: Εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από το μήκος κύματος



Προσεγγιστικός τύπος του Cauchy:

$$\eta(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Διασκεδασμός



$$\varepsilon = (\eta - 1)A$$

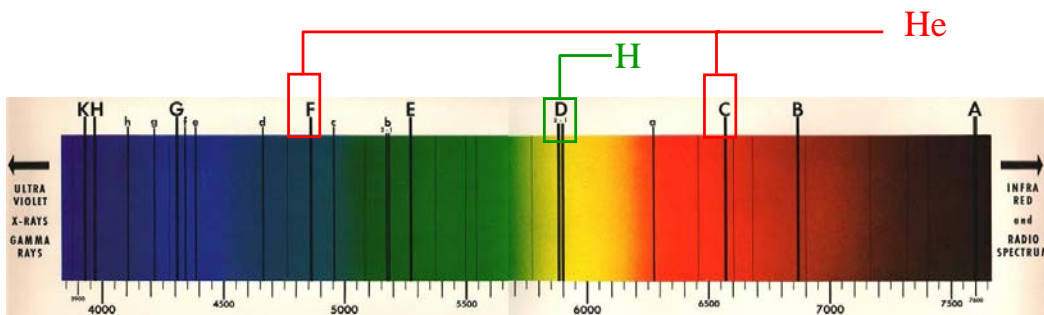
$$\eta_{\text{ιωδ}} > \eta_{\text{κόκκ}}$$

$$\varepsilon_{\text{ιωδ}} > \varepsilon_{\text{κόκκ}}$$

Διασκεδασμός

Δείκτης διάθλασης
 μπλε (486.1 nm)
 κίτρινο (587.6 nm)
 κόκκινο (656.3 nm)

→ η_F
 → η_D
 → η_C



ΗΛΙΑΚΟ ΦΑΣΜΑ

Κύριος διασκεδασμός : $\eta_F - \eta_C$

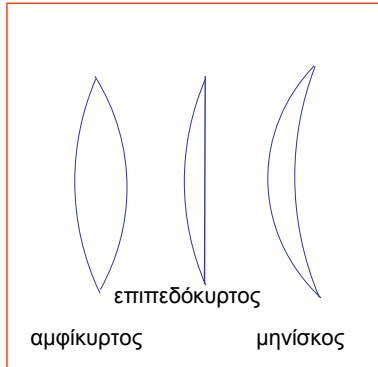
Διασκεδαστική ικανότητα ή αναλυτική ισχύς:

$$D = \frac{\varepsilon_F - \varepsilon_C}{\varepsilon_D} = \frac{\eta_F - \eta_C}{\eta_D - 1}$$

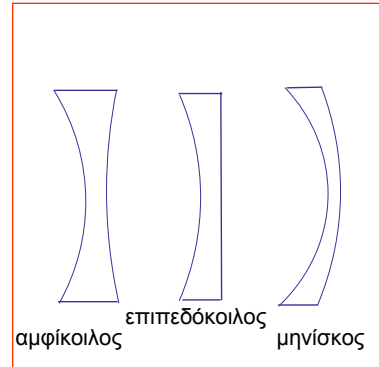
για λεπτό πρίσμα

Φακοί

Σύστημα δύο γυάλινων σφαιρικών και ομοαξονικών διαθλαστικών επιφανειών

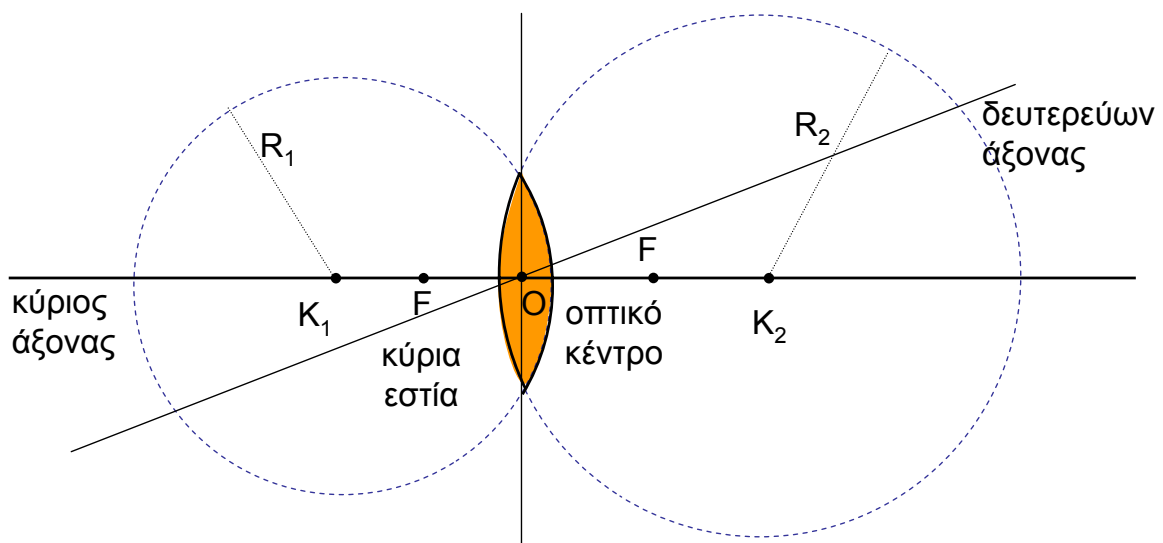


Συγκλίνοντες φακοί (συγκεντρωτικοί)
(είναι πιο παχείς στο κέντρο
από ότι στα άκρα)



Αποκλίνοντες φακοί
(είναι πιο λεπτοί στο κέντρο
από ότι στα άκρα)

Χαρακτηριστικά των λεπτών φακών

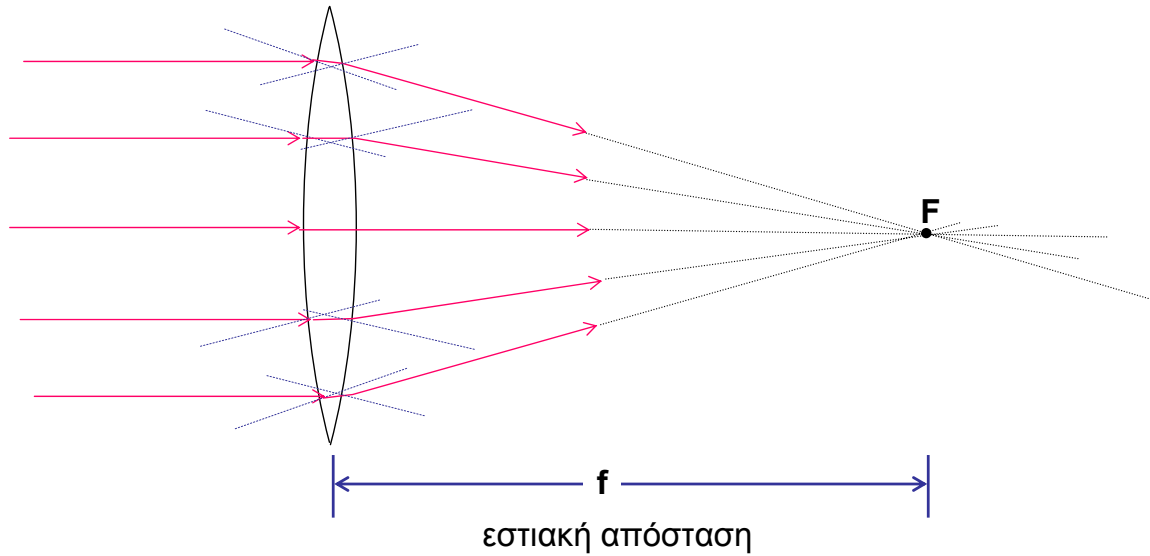


Λεπτός φακός: το πάχος του θεωρείται πολύ μικρό σε σχέση με τις αποστάσεις αντικειμένων και ειδώλων από το φακό

Εστιακό επίπεδο: επίπεδο κάθετο στον κύριο άξονα που περιέχει την κύρια εστία

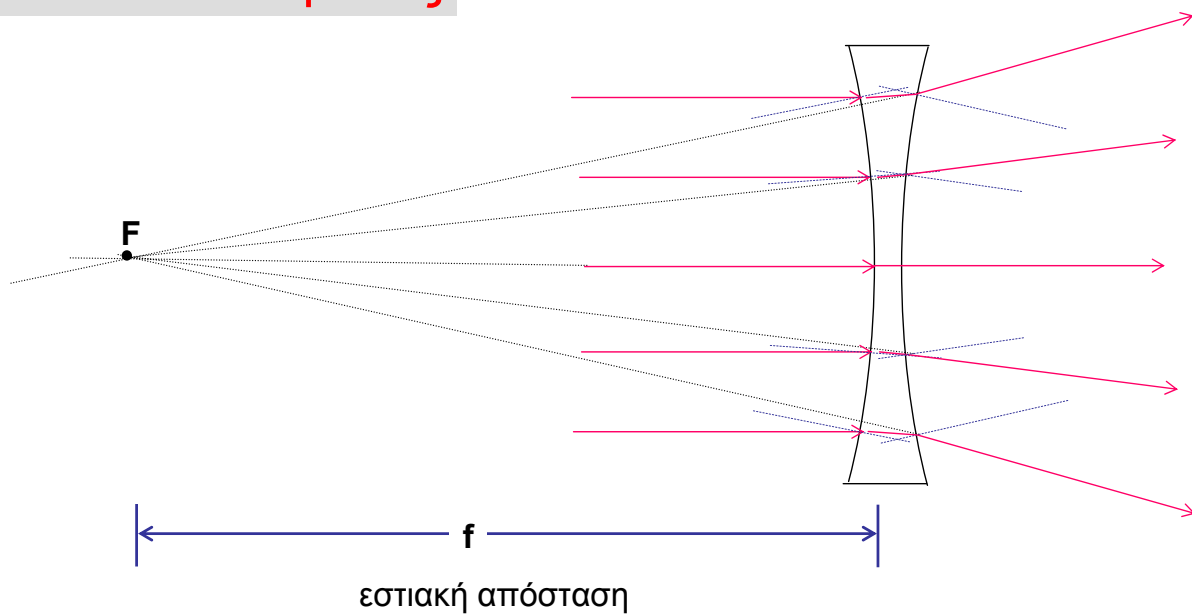
Εστιακή απόσταση: απόσταση κύριας εστίας – κέντρου

Συγκλίνων φακός



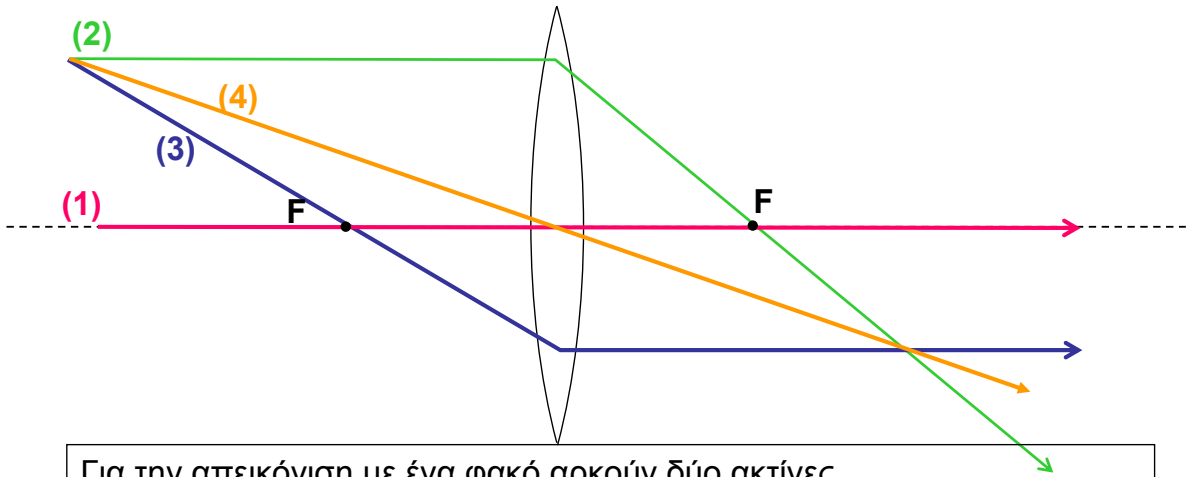
Παράλληλη δέσμη που διέρχεται από συγκλίνοντα φακό συγκλίνει στο εστιακό σημείο (εστία) του φακού.

Αποκλίνων φακός



Παράλληλη δέσμη που διέρχεται από αποκλίνοντα φακό αποκλίνει έτσι ώστε οι διαθλώμενες από το φακό ακτίνες να φαίνεται ότι προέρχονται από το εστιακό σημείο (εστία) του φακού.

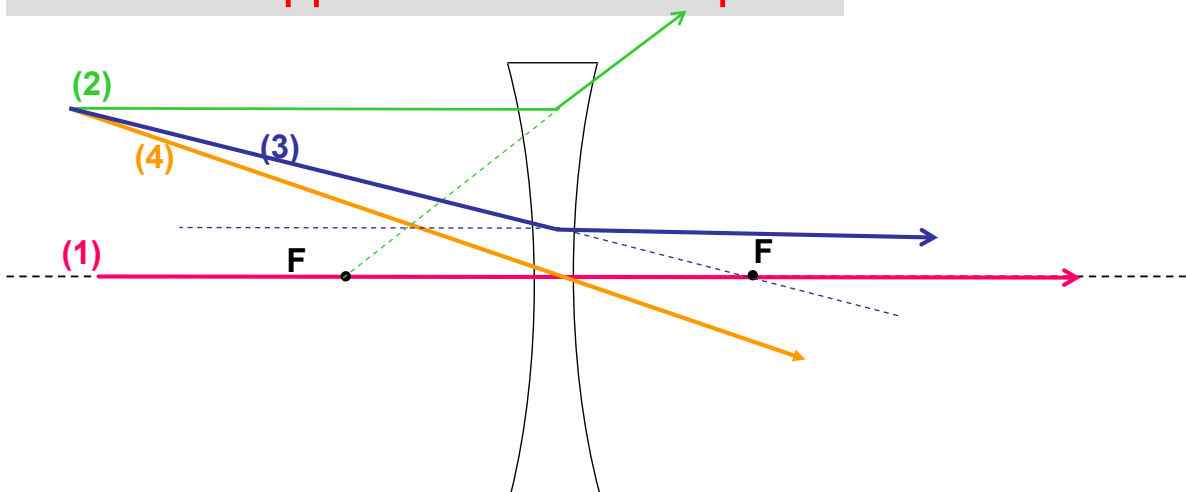
Απεικόνιση με συγκλίνοντα φακό



Για την απεικόνιση με ένα φακό αρκούν δύο ακτίνες

- (1) Ακτίνα που διαδίδεται πάνω στον κύριο άξονα δεν εκτρέπεται
- (2) Ακτίνα που διαδίδεται παράλληλα στον κύριο άξονα όταν διαθλασθεί από τον φακό διέρχεται από την κύρια εστία του
- (3) Ακτίνα που διέρχεται από την κύρια εστία του φακού, όταν διαθλασθεί από τον φακό διαδίδεται παράλληλα στον κύριο άξονα
- (4) Ακτίνα που διέρχεται από το κέντρο του φακού δεν εκτρέπεται

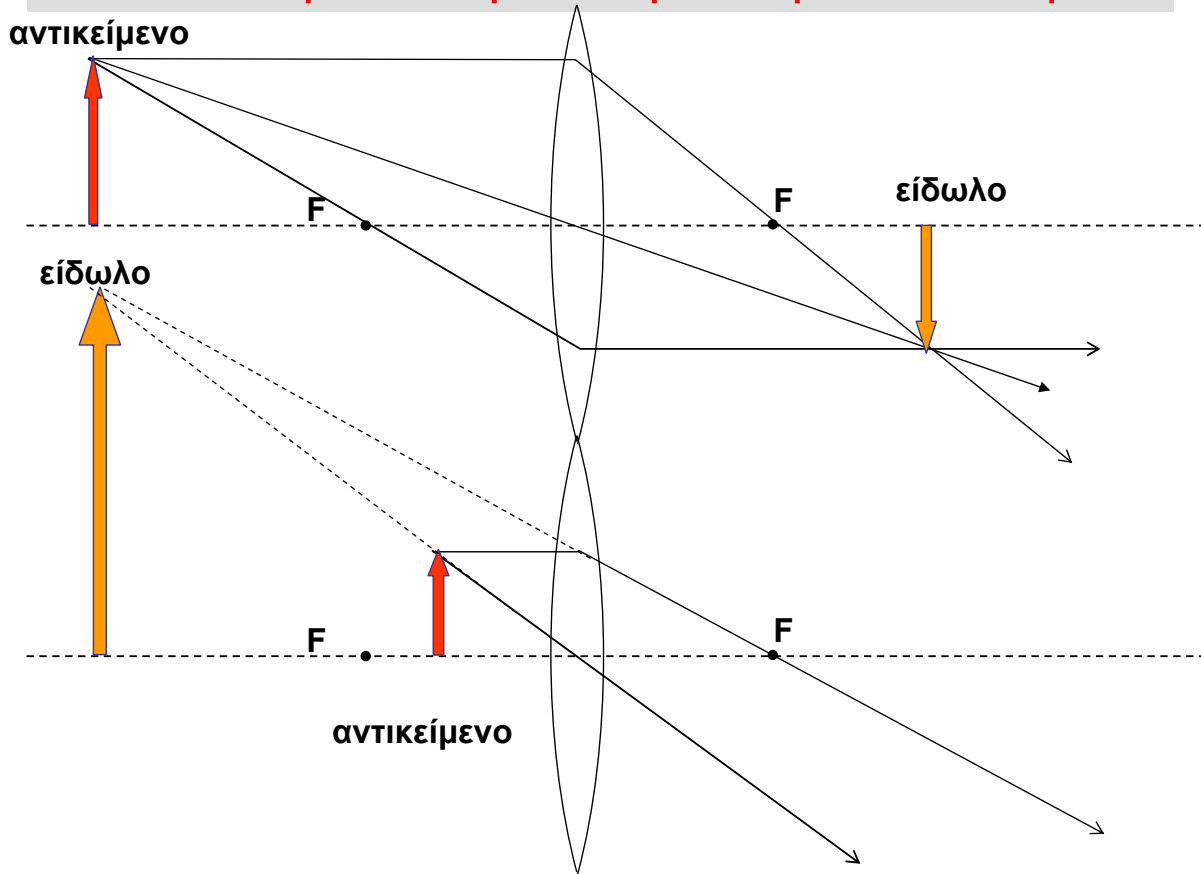
Απεικόνιση με αποκλίνοντα φακό



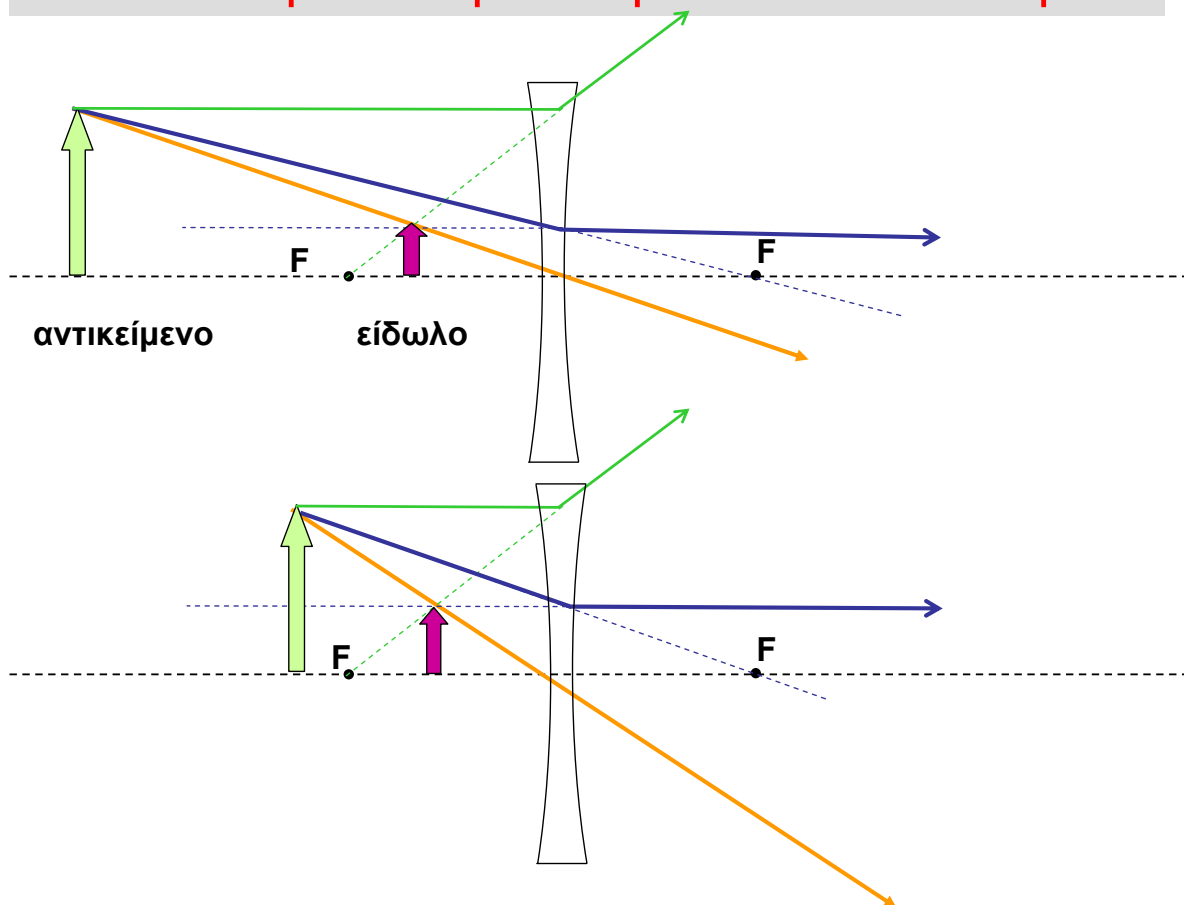
Για την απεικόνιση με ένα φακό αρκούν δύο ακτίνες

- (1) Ακτίνα που διαδίδεται πάνω στον κύριο άξονα δεν εκτρέπεται
- (2) Ακτίνα που διαδίδεται παράλληλα στον κύριο άξονα όταν διαθλασθεί από τον φακό φαίνεται ότι προέρχεται από την κύρια εστία του
- (3) Ακτίνα που διέρχεται από φακό έτσι ώστε η προέκτασή της να διέρχεται από την κύρια εστία, διαδίδεται παράλληλα στον κύριο άξονα
- (4) Ακτίνα που διέρχεται από το κέντρο του φακού δεν εκτρέπεται

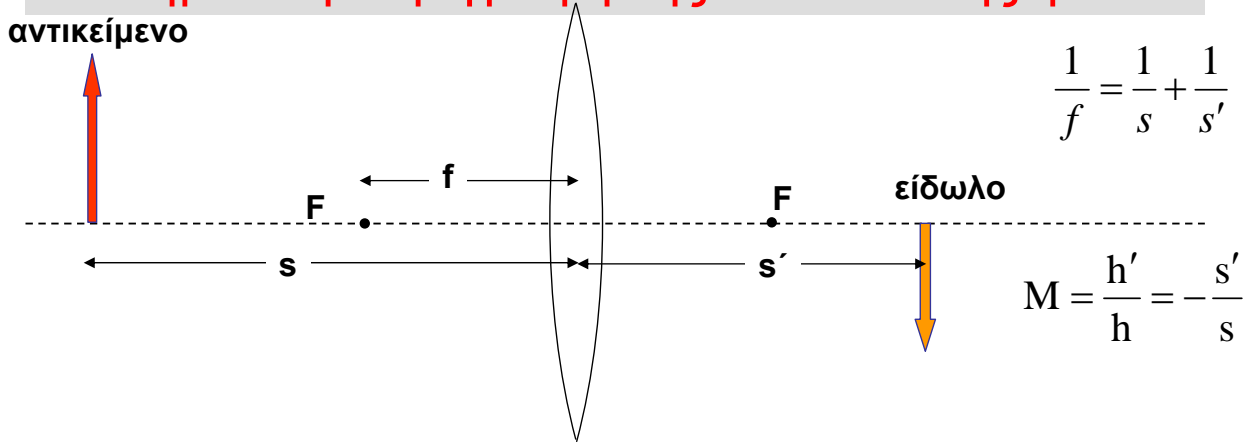
Απεικόνιση αντικειμένου με συγκλίνοντα φακό



Απεικόνιση αντικειμένου με αποκλίνοντα φακό



Μαθηματική περιγραφή της απεικόνισης φακού

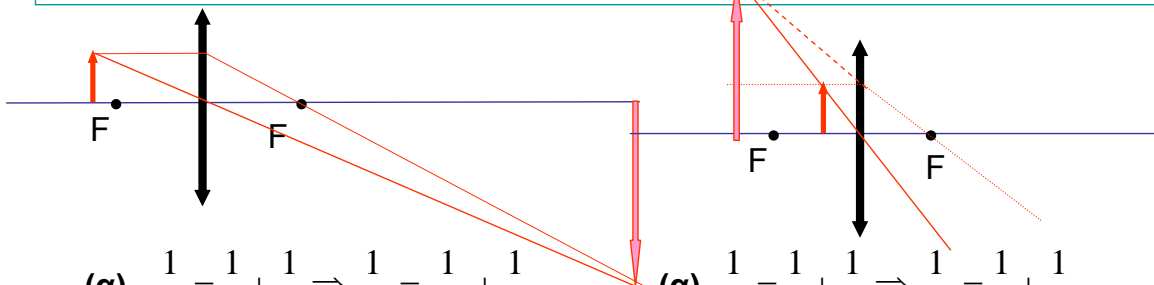


ΣΥΜΒΑΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ

- Η πρόσπτωση θεωρείται ότι γίνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά
- Οι ακτίνες καμπυλότητας θεωρούνται θετικές για κυρτές επιφάνειες και αρνητικές για κοίλες
- Η s θεωρείται θετική όταν το αντικείμενο βρίσκεται αριστερά του φακού
- Η s' θεωρείται θετική όταν το είδωλο σχηματίζεται δεξιά του φακού (πραγματικό) και αρνητική όταν σχηματίζεται αριστερά του φακού (φανταστικό)
- Η f θεωρείται θετική για συγκλίνοντα φακό και αρνητική για αποκλίνοντα

Άσκηση

Ένας συγκλίνων φακός έχει εστιακή απόσταση 15cm. Για ένα αντικείμενο σε αποστάσεις 20cm και 5cm προσδιορίστε (γραφικά και ποσοτικά): α) τη θέση του ειδώλου, β) τη μεγέθυνση, γ) το είδος του ειδώλου (πραγματικό ή φανταστικό) (δ) αν το είδωλο είναι ορθό η ανεστραμμένο



(α) $\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{1}{20} + \frac{1}{s'}$
 $\Rightarrow s' = 60cm$

(β) $M = -\frac{s'}{s} = -\frac{60}{20} = -3$

(γ) πραγματικό ($s' > 0$)

(δ) ανεστραμμένο ($M < 0$)

(α) $\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{s'}$
 $\Rightarrow s' = -7.5cm$

(β) $M = -\frac{s'}{s} = -\frac{-7.5}{5} = 1.5$

(γ) φανταστικό ($s' < 0$)

(δ) ορθό ($M > 0$)

Άσκηση

Αποκλίνων φακός $f = -20\text{cm}$ σχηματίζει ένα φανταστικό είδωλο ύψους 1cm σε απόσταση 15cm αριστερά του φακού. Προσδιορίστε τη θέση και το μέγεθος του αντικειμένου. Είναι ορθό το είδωλο ή ανεστραμμένο;

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \Rightarrow -\frac{1}{20} = \frac{1}{s} + \frac{1}{-15} \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{60} \Rightarrow s = 60\text{cm}$$

→ 60 cm αριστερά του φακού

$$M = -\frac{s'}{s} = -\frac{-15}{60} = 0.25$$

→ $h = h' / 0.25 = 4\text{ cm}$

ορθό είδωλο ($M > 0$)

Χρήσιμες εξισώσεις

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΩΝ ΤΩΝ ΦΑΚΩΝ

$$P = \frac{1}{f} = (\eta - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Ισχύς του φακού

Μονάδα μέτρησης : 1 διοπτρία, $1D (=1\text{m}^{-1})$

- η εστιακή απόσταση είναι ίδια για τις δύο πλευρές του φακού αν αυτός είναι λεπτός
- η εστιακή απόσταση εξαρτάται από το υλικό που είναι κατασκευασμένος ο φακός και από την καμπυλότητά του

ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$$

ΜΕΓΕΘΥΝΣΗ

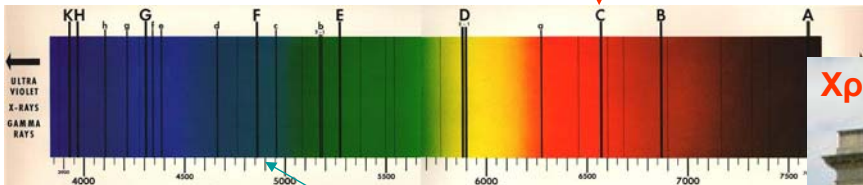
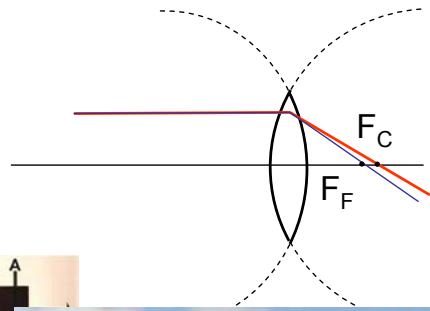
$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{s'}{s}$$

Άσκηση

Σε συγκλίνοντα φακό ($R_1=30\text{m}$, $R_2=40\text{m}$) προσπίπτει λευκό φως. Εάν $n_C=1.58$ και $n_F=1.61$ να σχολιαστεί η εικόνα που θα παρατηρηθεί μέσω του φακού.

$$\frac{1}{f_C} = (n_C - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_C} = (1.58 - 1) \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{-40} \right) \Rightarrow f_C = 29.6\text{m}$$



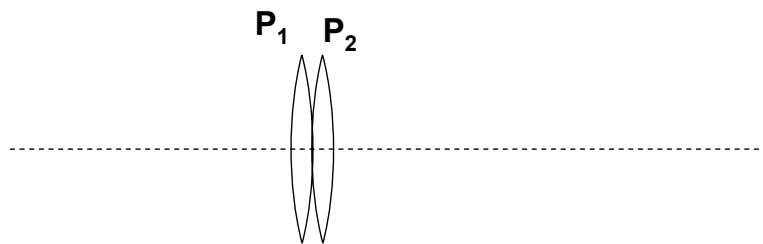
Χρωματική εκτροπή



$$\frac{1}{f_F} = (n_F - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_F} = (1.61 - 1) \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{-40} \right) \Rightarrow f_F = 28.1\text{m}$$

Φακοί σε σειρά

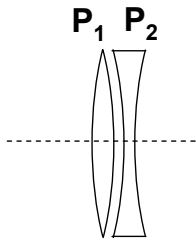


Η ισχύς ενός συστήματος λεπτών φακών που βρίσκονται σε επαφή ισούται με το άθροισμα των ισχύων των φακών του συστήματος

$$P = \sum P_i$$

Άσκηση

Όταν ένα αντικείμενο τοποθετείται 50cm αριστερά ενός λεπτού συγκλίνοντα φακού, δημιουργείται πραγματικό είδωλο σε απόσταση 33.33cm δεξιά του φακού. Όταν ένας λεπτός αποκλίνων φακός τοποθετηθεί σε επαφή με τον συγκλίνοντα η απόσταση του ειδώλου γίνεται 50cm. Ποια είναι η εστιακή απόσταση του αποκλίνοντος φακού;



$$P_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{50} + \frac{1}{33.33} \Rightarrow P_1 = 0.05\text{cm}^{-1}$$

$$P_{\text{tot}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'_{\text{tot}}} \Rightarrow P_{\text{tot}} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50} \Rightarrow P_{\text{tot}} = 0.04\text{cm}^{-1}$$

$$P = P_1 + P_2 \Rightarrow P_2 = P_{\text{tot}} - P_1 \Rightarrow P_2 = 0.04 - 0.05 = -0.01\text{cm}^{-1}$$

$$P_2 = \frac{1}{f_2} \Rightarrow f_2 = -\frac{1}{0.01} = -100\text{cm}$$