Τα 23 Προβλήματα του Hilbert

Κουλακίδου Π.

Ιστορία των Μαθηματικών

Υπεύθυνη Καθηγήτρια: Χ. Χαραλάμπους

Εισαγωγή

David Hilbert (1862 Königsberg - 1943 Göttingen). Διδακτορικό το 1885 υπό την επίβλεψη του Ferdinand von Lindemann με τίτλο "Über invariante Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen". Έγινε το 1895 καθηγητής το Göttingen. Από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς με συμβολή σε:

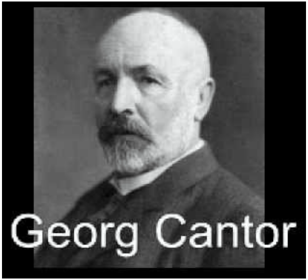
- Άλγεβρα, αναλλοίωτοι (1885-1893)
- Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών (1893-1898)
- Γεωμετρία (1898-1902)
- Ανάλυση (1902-1912)
- Μαθηματική Φυσική (1910-1922)
- Θεμελίωση των Μαθηματικών (1918-1930).

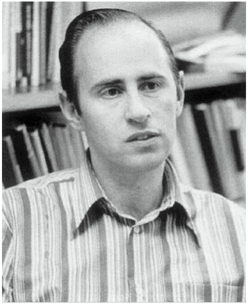
Διάλεξη στο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900, όπου και εξέθεσε μία λίστα με 23 προβλήματα που αφορούσαν πολλούς κλάδους των Μαθηματικών.

1ο Πρόβλημα: Η υπόθεση του συνεχούς

Δύο σύνολα λέμε ότι έχουν τον ίδιο πληθάριθμο αν μπορούμε να φέρουμε σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία τα στοιχεία του ενός συνόλου με αυτά του άλλου συνόλου. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει κάποιο σύνολο με πληθάριθμο (αυστηρά) μεγαλύτερο από του $\mathbb{N}$, δηλαδή $\aleph_0$ και (αυστηρά) μικρότερο από του $\mathbb{R}$, δηλαδή $2^{\aleph_0}$. Ήταν γνωστό ότι $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ αλλά όχι αν υπάρχει ενδιάμεσος πληθάριθμος. Ο Cantor (1845-1918) έθεσε πρώτος αυτή την ερώτηση και προσπάθησε για πολλά χρόνια να την αποδείξει χωρίς επιτυχία. Η απάντηση ήρθε από δύο πλευρές. Το 1940 ο Kurt Gödel (1906-1978) απέδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι λανθασμένη από τη θεωρία συνόλων ZF των Zermelo-Fraenkel ακόμη κι αν συμπεριλάβουμε στη θεωρία το αξίωμα της επιλογής ZFC.

1ο Πρόβλημα: Η υπόθεση του συνεχούς



Το 1963 ο Paul Cohen (1934-2007) έδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς δε μπορεί να αποδειχθεί στη θεωρία ZFC και βραβεύτηκε γι΄ αυτό με το βραβείο Fields. Τα δύο αποτελέσματα συνεπάγονται ότι η υπόθεση του συνεχούς δε μπορεί να αποδειχεί ούτε σωστή ούτε λανθασμένη στα πλαίσια της θεωρίας ZFC. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα βασίζονται στην υπόθεση ότι τα αξιώματα Zermalo-Fraenkel είναι συνεπή, δηλαδή ότι δεν οδηγούν σε αντιφάσεις.

2ο Πρόβλημα: Η συνέπεια των αριθμητικων αξιωμάτων

Το δεύτερο πρόβλημα είναι κι αυτό στα πλαίσια της θεωρίας συνόλων. Το ερώτημα που τέθηκε είναι αν κάποια από τα αξιώματα της αριθμητικής του Peano προκύπτουν από άλλα. Ο Hilbert ζήτησε να αποδειχθεί ότι τα αξιώματα δεν είναι αντιφατικά, δηλαδή σε πεπερασμένο πλήθος λογικών βημάτων να μη μπορεί να οδηγηθεί κανείς σε αντίφαση υποθέτοντας κάποια από τα αξιώματα. Σε "δυνατά" μαθηματικά συστήματα, όπως αυτό των Zermelo-Fraenkel η ερώτηση απαντάται θετικά, πράγμα που δε δίνει όμως λύση στο ερώτημα του Hilbert καθώς αναφέρεται σε εσωτερικές αντιφάσεις του συστήματος. Το πρόβλημα δε θεωρείται ότι έχει λυθεί πλήρως, ωστόσο οι πιο γενικά αποδεκτές απαντήσεις στο ζήτημα προέρχονται από τους Gödel και Gentzen. Ο Gödel με το δεύτερο θεώρημα της μη πληρότητας έδειξε το 1931 ότι δε μπορεί να υπάρχει απόδειξη για την συνέπεια της Peano αριθμητικής μέσα στο ίδιο το σύστημα των αξιωμάτων του Peano.

2ο Πρόβλημα: Η συνέπεια των αριθμητικων αξιωμάτων

Από την άλλη, ο Gerhard Gentzen (1909-1945) δημοσίευσε το 1936 μία απόδειξη για τη συνέπεια της Peano αριθμητικής. Το αποτέλεσμά του λέει πως η απόδειξη της συνέπειας μπορεί να είναι δυνατή σε ένα σύστημα που είναι πολύ πιο αδύναμο από τη θεωρία συνόλων. Ο Gentzen όρισε για κάθε (διαφορετική) απόδειξη της Peano αριθμητικής ένα διατακτικό αριθμό ανάλογα με τη δομή της απόδειξης με κάθε διατακτικό να είναι μικρότερος του

$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\}$, όπου ω ο μικρότερος άπειρος διατακτικός. Έπειτα, με υπερπεπερασμένη επαγωγή πάνω σε αυτούς τους διατακτικούς (γενίκευση της γνωστής επαγωγής των φυσικών αριθμών) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι καμία απόδειξη δε μπορεί να οδηγήσει σε αντίφαση. Έτσι, σύμφωνα με το Gentzen μία θεωρία δε μπορεί να αποδείξει τη συνέπεια μιας άλλης θεωρίας που έχει μεγαλύτερο διατακτικό στις αποδείξεις της. Ακόμα και σήμερα οι μαθηματικοί δεν έχουν καταλήξει σε μία κοινά αποδεκτή λύση του προβλήματος.

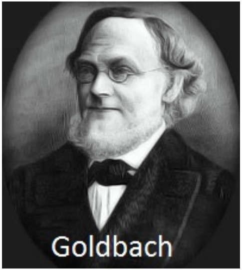
8ο Πρόβλημα: Υπόθεση του Riemann και άλλα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών

Το πρόβλημα αυτό είναι ίσως το πιο γνωστό από τη λίστα και παραμένει μέχρι και σήμερα άλυτο. Ένα ερώτημά του είναι αν αληθεύει η υπόθεση του Georg F. B. Riemann (1826-1866), δηλαδή αν το πραγματικό μέρος των μη τετριμμένων ριζών της συνάρτησης $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$ του Riemann είναι $\frac{1}{2}$. Η υπόθεση του Riemann αν λυθεί θα δώσει απαντήσεις στο πρόβλημα της κατανομής των πρώτων αριθμών, γι΄ αυτό και θεωρείται από τα πιο σημαντικά ερωτήματα στην ιστορία των Μαθηματικών.

Riemann

8ο Πρόβλημα: Υπόθεση του Riemann και άλλα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών

Τα άλλα ερωτήματα που συμπεριέλαβε ο Hilbert είναι η εικασία του Goldbach, δηλαδή ότι κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων και η εικασία των διδύμων πρώτων αριθμών, δηλαδή ότι υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι. Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για την απόδειξή τους και έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι και ηλεκτρονικοί υπολογιστές μήπως και βρεθούν αντιπαραδείγματα αλλά δεν έχει δοθεί η απάντηση μέχρι και σήμερα.



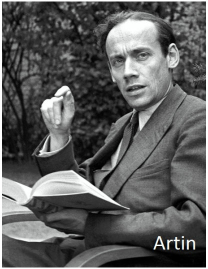
9ο Πρόβλημα: Γενίκευση του νόμου αντιστροφής για οποιοδήποτε αλγεβρικό σώμα αριθμών

Στα τέλη του 18ου αιώνα ο Gauss είχε αποδείξει το νόμο τετραγωνικής αντιστροφής που αναφερόταν σε ακεραίους: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

Υπενθυμίζουμε ότι το σύμβολο του Legendre ορίζεται ως: $\left(\frac{a}{p}\right) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{αν } a \text{ τετραγωνικό υπόλοιπο modulo p και } a \not\equiv 0 \pmod{p} \\ -1 & \text{αν } a \text{ δεν είναι τετραγωνικό υπόλοιπο modulo p} \\ 0 & \text{αν } a \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Ο Hilbert ζήτησε από τη μαθηματική κοινότητα να γενικεύσει αυτό το νόμο στην περίπτωση που δουλεύουμε σε τυχαίο αλγεβρικό σώμα αριθμών, δηλαδή πεπερασμένη ($\Rightarrow$ αλγεβρική) επέκταση του $\mathbb{Q}$. Το πρόβλημα λύθηκε εν μέρει από τον Emil Artin (1898-1962) σε σειρά δημοσιεύσεων (1924, 1927, 1930).



10ο Πρόβλημα: Επίλυση διοφαντικής εξίσωσης

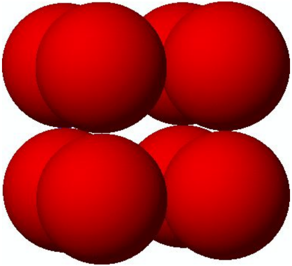
Μία διοφαντική εξίσωση είναι μία πολυωνυμική εξίσωση για την οποία μας ενδιαφέρουν μόνο οι ακέραιες λύσεις. Η πιο διάσημη ίσως διοφαντική εξίσωση είναι η $x^n + y^n = z^n$, η οποία για $n = 2$ έχει ως λύση τις πυθαγόρειες τριάδες, ενώ για n ακέραιο μεγαλύτερο του 2 δεν έχει καμία ακέραια λύση. Οι διοφαντικές εξισώσεις γενικά είναι πολύ δύσκολο να λυθούν. Το ερώτημα που έθεσε ο Hilbert είναι αν μας δοθεί μία διοφαντική εξίσωση με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών αν μπορούμε να βρούμε ένα αλγόριθμο- διαδικασία που να προσδιορίζει σε πεπερασμένο πλήθος βήματα εάν η εξίσωση έχει λύση. Ένα σημαντικό βήμα για να δοθεί η απάντηση έγινε το 1936 από τους Church και Turing, οι οποίοι έβαλαν τα θεμέλια της θεωρίας αλγορίθμων. Η οριστική απάντηση δόθηκε το 1970 από τον Yuri Matiyasevitch ο οποίος βασιζόμενος στο έργο των Martin Davis, Julia Robinson και Hilary Putnam απέδειξε ότι είναι αδύνατη η κατασκευή ενός τέτοιου αλγορίθμου.

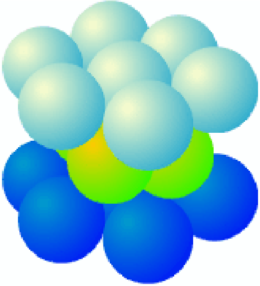
18ο Πρόβλημα: Τρία προβλήματα Τοπολογίας και Γεωμετρίας

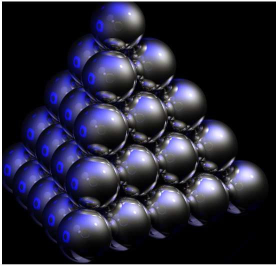
- Υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους διαφορετικές space groups; Δηλαδή υποομάδες της ομάδας των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$ με συμπαγή fundamental domain (δοθέντος τοπολογικού χώρου και ομάδας που δρα πάνω του, οι εικόνες ενός σημείου μέσω της δράσης σχηματίζουν τροχιά. Fundamental domain είναι ένα υποσύνολο του χώρου που περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε μία από τις τροχιές - γεωμωρική αναπαράσταση ενός συνόλου αντιπροσώπων των τροχιών). Ο L. Bieberbach έδωσε θετική απάντηση στο ερώτημα το 1910.
- Το δεύτερο μέρος του προβλήματος ρωτά αν υπάρχει πολύεδρο που καλύπτει τον $\mathbb{R}^3$ αλλά δεν είναι fundamental region καμίας space group. Ο Karl Reinhardt βρήκε πρώτος το 1928 ένα παράδειγμα τέτοιου πολυέδρου. Ο Hilbert έθεσε το ερώτημα για τις τρεις διαστάσεις πιστεύοντας ότι αυτό είναι αδύνατο στις δύο διαστάσεις, κάτι που αποδείχθηκε ότι δεν ισχύει από τον Hesch το 1935.

18ο Πρόβλημα: Τρία προβλήματα Τοπολογίας και Γεωμετρίας

- Ποια είναι η πιο πυκνη διάταξη μη επικαλυπτόμενων σφαιρών (και άλλων σχημάτων) στο χώρο; Το ερώτημα προέρχεται από μία παλιά εικασία του Kepler που λέει ότι καμία διάταξη ισομεγέθων σφαιρών δε μπορεί να κάνει τις σφαίρες να καταλαμβάνουν περισσότερο από 74% του χώρου. Ο Thomas Callister Hales το 1998 κατέληξε σε αυτό το συμπέρασμα με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή (κάτι που δεν θεωρείται αυστηρή απόδειξη).

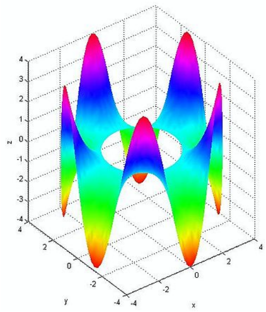


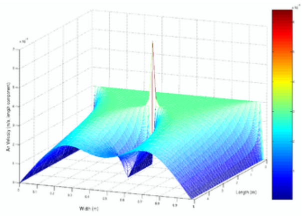


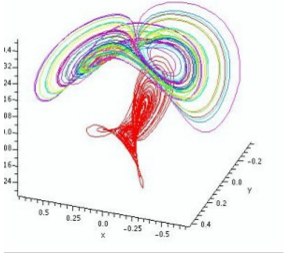


20ο Πρόβλημα: Προβλήματα οριακών τιμών

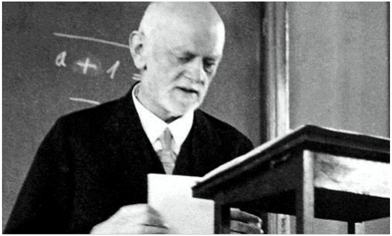
Στις αρχές του 20ου αιώνα τα προβλήματα οριακών τιμών (διαφορικές εξισώσεις με αρχικές συνθήκες) μόλις είχαν αρχίσει να μελετώνται συστηματικά. Η δουλειά που έγινε μέσα στον προηγούμενο αιώνα για τη μελέτη τέτοιων προβλημάτων και την ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων ήταν τεράστια και σε πολύ μεγάλο βαθμό απαντήθηκε το ερώτημα αν έχουν όλα τα προβλήματα οριακών τιμών λύση.

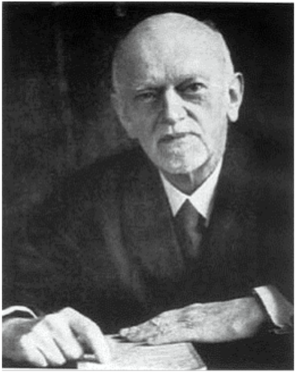






Ο Hilbert με τη διορατικότητά του μπόρεσε και έθεσε σημαντικά ερωτήματα που απασχόλησαν γενιές μαθηματικών. Τα προβλήματά του έδωσαν τροφή για σκέψη και ώθησαν τη μαθηματική έρευνα για ένα ολόκληρο αιώνα. Ακόμη και σήμερα οι μαθηματικοί προσπαθούν να απαντήσουν σε κάποια από αυτά, πράγμα που δείχνει πόσο σημαντική ιστορικά ήταν η ομιλία του Hilbert για τα Μαθηματικά και πως είναι πολύ βασικό να θέτονται σωστά προβλήματα για την ανάπτυξη της επιστήμης.






DAVID
HILBERT
WIR MÜSSEN WISSEN
WIR WERDEN WISSEN