Ιστορία των Μαθηματικών

~~Εαρινό εξάμηνο 2012~~

6.05.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512

16 * 32
αντίστοιχοι εκθέτες
4, 5

άθροισμα εκθετών 9,

αντίστοιχη δύναμη 512

Ένας τέτοιος πίνακας με δυνάμεις του 2 δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για πολλαπλασιασμούς αφού οι δυνάμεις του 2 έχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους.

John Napier (1550–1617) Σκωτία

Ξεκίνησε τη μελέτη το 1594.

Δημοσίευσε το 1614 το

Mirafici logarithmorum canonis descriptio

Και το 1619

Mirafici logarithmorum canonis constructio

Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614).

57 σελίδες εξήγηση

Και

90 σελίδες με πίνακες

Αν

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$$

τότε L είναι ο λογάριθμος Napier του N
(για ευκολία τον γράφουμε Nap log N)

Έτσι Nap log 10,000,000 = 0 ενώ
Nap log 9,999,999=1

αν $a : b = c : d$ τότε

$$\text{Nap log } a - \text{Nap log } b = \text{Nap log } c - \text{Nap log } d.$$

Το πρώτο βιβλίο του Napier εκδόθηκε μετά από 20 χρόνια υπολογισμών: έδωσε τον πίνακα των λογαρίθμων για τους αριθμούς από το 5-10 εκατομμύρια.

Σε αντίθεση με τη γεωμετρική σειρά

$$1, 2, 4, 8, \cdots$$

ο Napier ήθελε τα κενά ανάμεσα στους διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής σειράς

$$c, cr, cr^2, cr^3, \cdots$$

να είναι μικρά. Έτσι ξεκίνησε με το λόγο

$$0.9999999 = 1 - 10^{-7}$$

Ο πρώτος πίνακας του Napier αποτελείται από τους πρώτους 101 όρους της γεωμετρικής σειράς με πρώτο όρο $c = 10,000,000 = 10^7$.

Δηλαδή υπολόγισε τους αριθμούς

$$10^7(1-10^{-7})^n, \quad n = 0, 1, \cdots, 100 \ .$$

Ονόμασε τους αριθμούς $0, 1, \cdots, 100$ logarithms.

Υπολόγισε τον iστο όρο του πρώτου πίνακα a_i με αφαίρεση:

$$a_i = a_{i-1} - a_{i-1}/10^7 \ .$$

Έτσι βρήκε

10000000 9999999 9999998.000001

$\cdots$ 9999900.0004950

Αν

$$x = 10^7(1-10^{-7})^n, \quad y = 10^7(1-10^{-7})^m$$

τότε

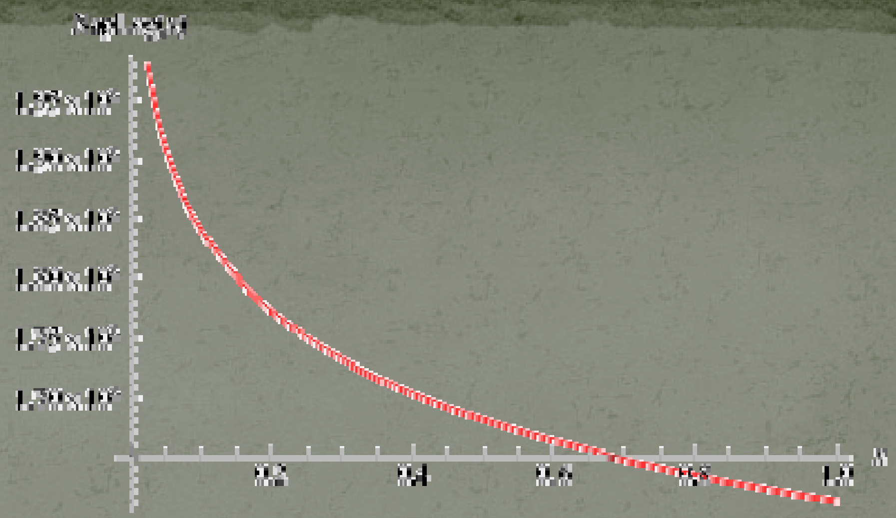
$$\frac{x}{y} = (1-10^{-7})^{n-m}$$

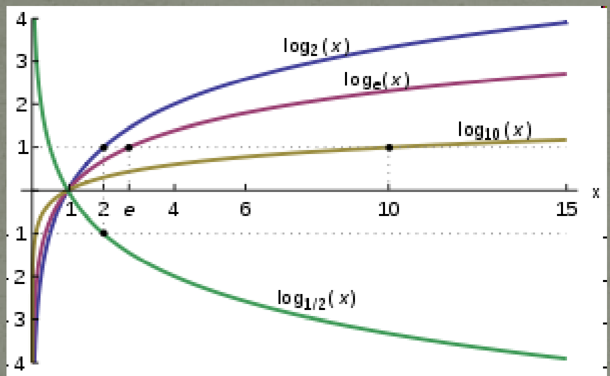
Στο δεύτερο πίνακα ο Napier υπολόγισε πάλι με τον ίδιο τρόπο (αφαίρεση) τους πρώτους 51 όρους της γεωμετρικής σειράς με λόγο $1-10^{-5}$ και πρώτο όρο 10^7.

Για τον τρίτο πίνακα χρησιμοποίησε γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιώντας τις τιμές των δύο παραπάνω πινάκων. Ο τρίτος πίνακας αποτελείται από 21 σειρές και 69 στήλες όπου το στοιχείο στη θέση i, j είναι

$$10^7(1-\frac{1}{2000})^{i-1}(1-\frac{1}{100})^{j-1}$$

Η κάθε σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $1-1/100$ όπως και κάθε στήλη με λόγο $1-1/200$.

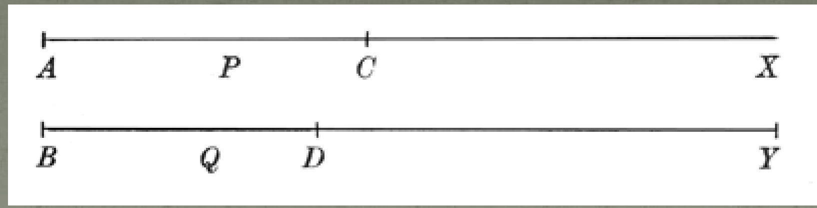




σήμερα

O Briggs (1561-1630, Άγγλος) μετά από συνεννόηση με τον Napier κατασκεύασε πίνακες με βάση 10 έτσι ώστε log 1=0

Ο επίσημος ορισμός του Napier



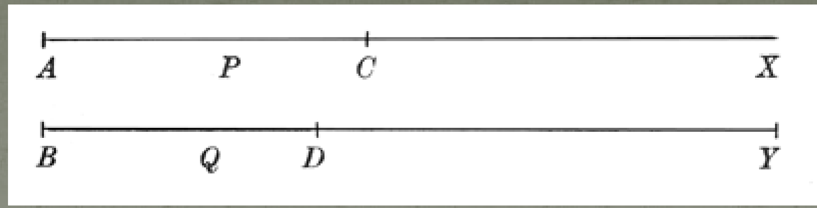
Έστω ευθύγραμμο τμήμα BY (μήκος r= 10,000,000= 10^7)

Έστω ημιευθεία AX. Τα P και Q ξεκινούν ταυτόχρονα από το A και B.

Η ταχύτητα του P παραμένει σταθερή, και ίση με 10^7.

Η ταχύτητα του Q όμως ελαττώνεται ανάλογα με την απόσταση του Q από την άλλη άκρη Y. Έστω ότι σε κάποιο χρόνο το P φτάνει στο C ενώ το Q φτάνει στο D. Τότε ο λογάριθμος του DY είναι το AC. Με άλλα λόγια

$$AC = \text{Naplog } DY$$



Έστω ότι πέρασε χρόνος t για να φτάσει P στο C. Έτσι y=AC=10^7t.

Αντίστοιχα έστω x=DY. (Σύγχρονα) θα γράφαμε ότι η ταχύτητα του Q, δηλ. dx/dt ικανοποιεί την ισότητα dx/dt=-x ενώ η αρχική της τιμή είναι 10^7

Nap log x= y:

Όταν t είναι πολύ μικρό, 10^{-7} τότε y=1 ενώ x= 9,999,999 .

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$$

Jobst Burgi (1552-1632) Ελβετός

Η δουλειά του όμως
δημοσιεύτηκε 1620.
Έδωσε πίνακες με
23,027 στοιχεία,
με λόγο
$1+10^{-4}$

- Εκτός από τους αριθημητικούς υπολογισμούς, οι λογάριθμοι επηρέασαν την εξέλιξη των μαθηματικών όταν το 1647 ο Βέλγος μοναχός St. Vincent (1854-1667) βρήκε ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στους λογαρίθμους και το εμβαδόν κάτω από τη καμπλύλη xy=1

René Descartes (Γαλλία) 1596-1650 φιλόσοφος

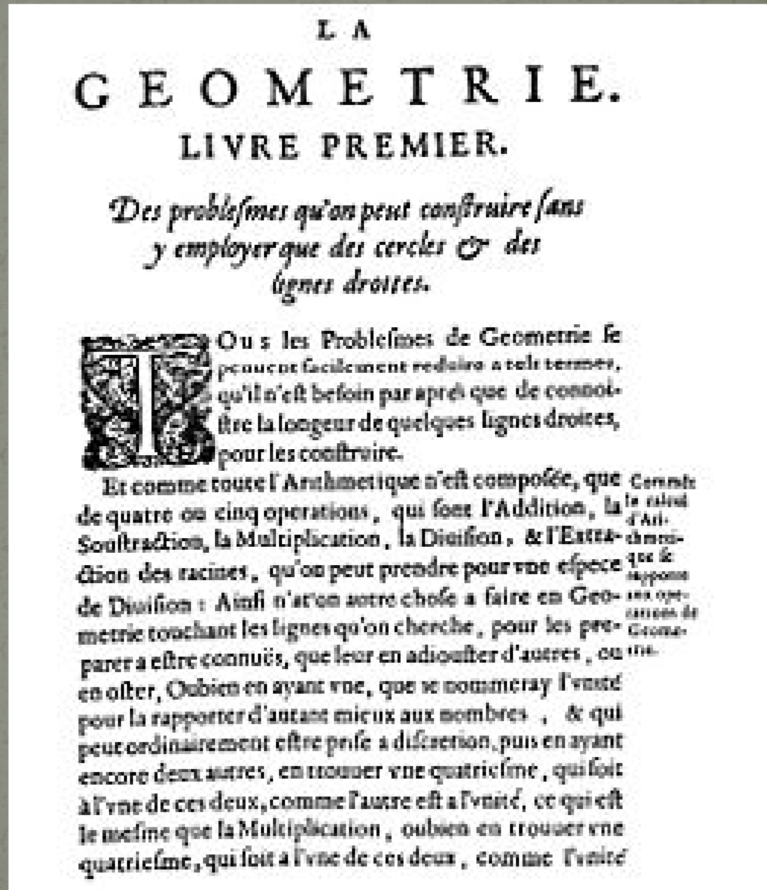
“Cogito ergo sum”

“Σκέφτομαι άρα υπάρχω”

1637 “La dioptrique”, “Les meteores”, “La geometrie”

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.



LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision: Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Καρτεσιανή γεωμετρία=αναλυτική γεωμετρία

Στόχος του:

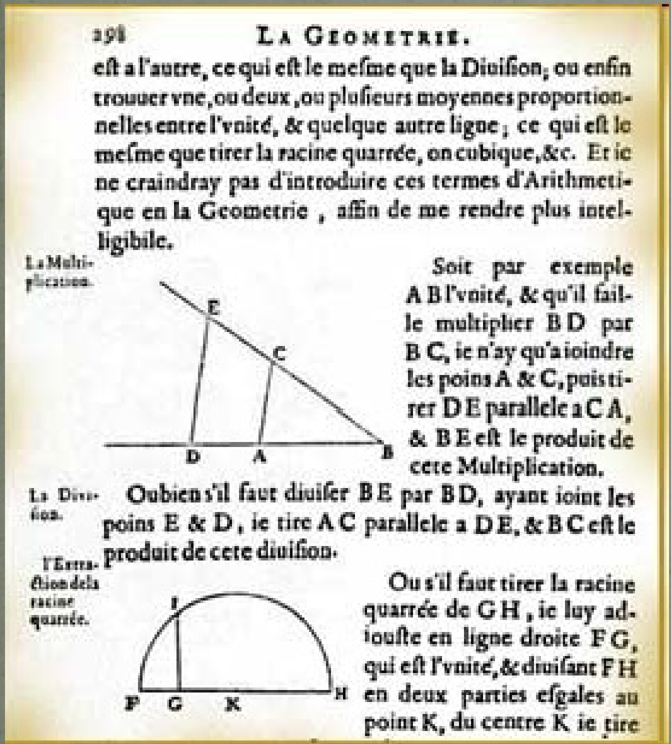
«κάθε πρόβλημα της γεωμετρίας μπορεί εύκολα να μετατραπεί έτσι ώστε η γνώση των μηκών ορισμένων ευθύγραμμων τμημάτων να αρκεί για την κατασκευή του.»

Συστηματική χρήση της συμβολικής άλγεβρας: σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός είναι βασισμένος στον συμβολισμό του Descartes.

(μετατροπή ενός γεωμετρικού προβλήματος σε αλγεβρικό)

Descartes θεωρούσε τις παραμέτρους και τους αγνώστους ευθύγραμμα τμήματα.

Για παράδειγμα: x τετράγωνο και x κύβος ερμηνεύονται και αυτά ως ευθύγραμμα τμήματα.



298 LA GEOMETRIE.

est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le produit de cete diuision.

l'Extraction dela racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouste en ligne droite F G, qui est l'vnité, & diuisant F H en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire

AB=1, τότε

BD BC= BE

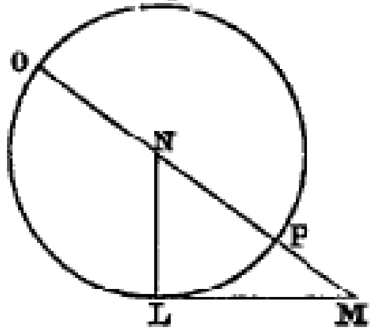
Μπορεί κανείς να ερμηνεύσει με τον ίδιο τρόπο και ριζικά?

Et lors cette racine, ou ligne inconnue, se trouve aisément ; car si j'ai par exemple

$$z^2 = az + b^2,$$

je fais le triangle rectangle NLM (*fig. 3*), dont le côté LM est égal à b, racine carrée de la quantité connue b^2, et l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre

Fig. 3.



quantité connue qui étoit multipliée par z, que je suppose être la ligne inconnue ; puis prolongeant MN, la base de ce triangle, jusques à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute OM est z, la ligne cherchée ; et elle s'exprime en cette sorte :

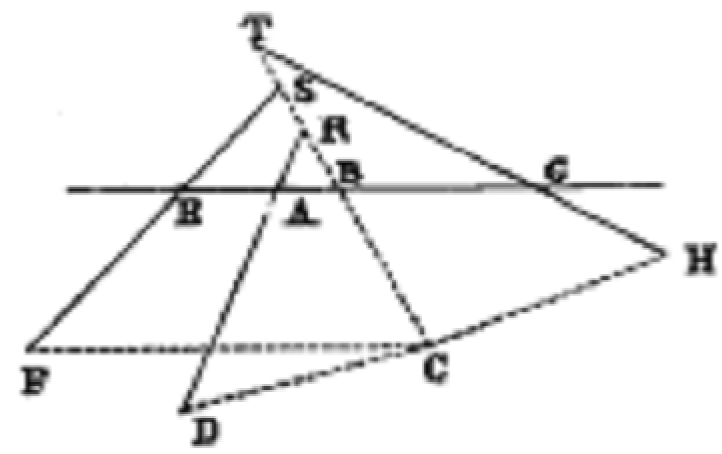
$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Λύση: LM=b, LN=a/2 (Geometrie)

z=OM

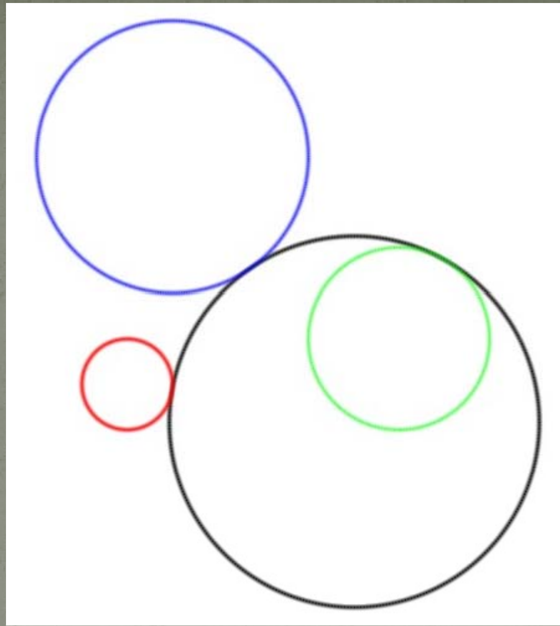
Χρήση συντεταγμένων:

Παράδειγμα:



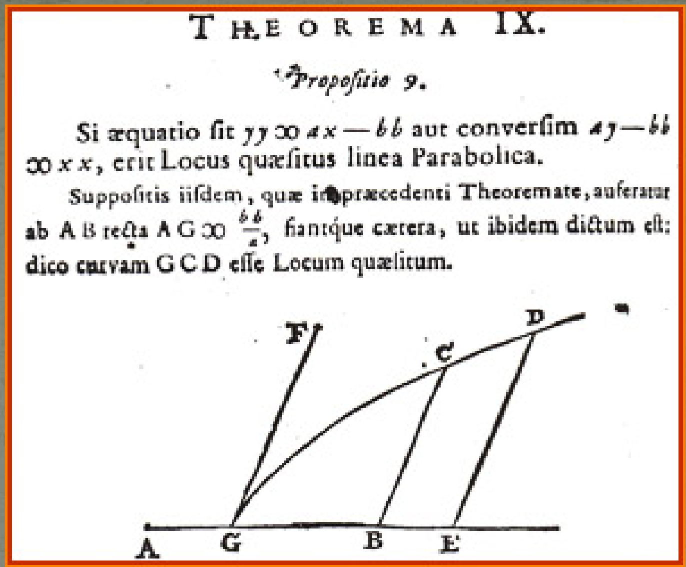
Για τη λύση του προβλήματος του Απολλώνιου: όλες οι γραμμές δίνονται αναφορικά με δύο: EG (x), CT (y)

Απολλώνιο πρόβλημα:



κατασκευή κύκλων (με κανόνα και διαβήτη), που είναι εφαπτόμενοι σε τρεις δεδομένους κύκλους στο επίπεδο.

Το πρόβλημα έθεσε ο Απολλώνιος ο Περγαίος (περ. 262 π.Χ. - περ. 190 π.Χ.) στο έργο του «Επαφαί».



THEOREMA IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy \infty ax - bb$ aut conversim $ay - bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab AB recta AG $\infty \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est: dico curvam GCD esse Locum quæsitum.

«Ελπίζω ότι το μέλλον θα με κρίνει με ευγενικά όχι μόνο για τα πράγματα που εξήγησα, αλλά και για αυτά που παρέλειψα για να αφήσω σε άλλους τη χαρά της ανακάλυψης.»