Ιστορία των Μαθηματικών

~~Εαρινό εξάμηνο 2012~~

30.04.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις και Cardano (Ferrari)

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x = z - \frac{a}{4} \Rightarrow$$

$$z^4 + ez^2 + fz + g = 0$$

ΙΔΕΑ: Αν και από τις δύο μεριές της ισότητας είχαμε τέλεια τετράγωνα τότε θα παίρναμε τις ρίζες τους και θα είχαμε απλούστερες εξισώσεις για x. Προσπαθούμε λοιπόν να κάνουμε δύο τέλεια τετράγωνα. Ας συμμαζέψουμε πρώτα τα x στο αριστερό σκέλος. Προσθέτουμε $6x^2$ (και στα δύο σκέλη) και το πρώτο γίνεται τέλειο τετράγωνο.

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x \Rightarrow$$

$$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x \Rightarrow$$

Υπολείπεται βέβαια το δεξιό σκέλος. Θα δοκιμάσουμε να εισάγουμε μία νέα μεταβλητή y μέσα στο τετράγωνο του αριστερού σκέλους έχοντας ως στόχο να δημιουργήσουμε τετράγωνο στο δεξιό σκέλος.

Η ποσότητα που προστέθηκε στο αριστερό σκέλος έτσι ώστε να έχουμε το το τετράγωνο με ακμή x^2+6+y είναι $y^2+12y+2yx^2$. Η ίδια ποσότητα πρέπει να προστεθεί και στο δεξιό σκέλος.

$$\Rightarrow (x^2+6+y)^2 = 6x^2+60x+(y^2+12y+2yx^2)$$

ποια τιμή πρέπει να έχει το y έτσι ώστε

$(6+2y)\, x^2 +60x+ (y^2+12y)= (ax+c)^2$

Γενικότερα, πότε $Ax^2+Bx+C= (ax+c)^2$?

Στη περίπτωση αυτή το πολυώνυμο Ax^2+Bx+C έχει μία διπλή ρίζα.

$$Ax^2 + Bx + C = (ax + c)^2 \Leftrightarrow B^2 - 4AC = 0$$

Αφού A=6+2y, B=60, C= y^2+12y θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$60^2 - 4(2y + 6)(y^2 + 12y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450$$

Η συνθήκη: «Διακρίνουσα =0» δίνει την εξίσωση της **επιλύουσας τριτοβάθμιας.**

Τύπος του Cardano για το y -----Mathematica

$$y \to -5 + \frac{1}{3}\left(5130 - 81\sqrt{3767}\right)^{1/3} + \left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{1/3}$$

Για το συγκεκριμένο y θα έχουμε ότι
$(x^2 + r)^2 = (s\,x + t)^2$ και άρα $x^2 + r = sx + t$ που μπορούμε να επιλύσουμε.
Σύμφωνα με την Mathematica η λύση είναι:

$$x \to -\frac{1}{2}\sqrt{-4 + \frac{1}{3}\left(41040 - 648\sqrt{3767}\right)^{1/3} + 2\left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{1/3}} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{3}\left(-24 - \left(41040 - 648\sqrt{3767}\right)^{1/3} - 6\left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{1/3} - 360 \Big/ \left(\sqrt{\left(-4 + \frac{1}{3}\left(41040 - 648\sqrt{3767}\right)^{1/3} + 2\left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{1/3}\right)}\right)\right)\right)}$$

Νέο παράδειγμα

$$x^4 + 3 = 12x \Rightarrow$$

$$x^4+3+(2yx+y^2-3) = 12x+(2yx+y^2-3) \Rightarrow$$

$$(x^2+y)^2 = 2yx^2 + 12x + (y^2-3)$$

Επιλύουσα τριτοβάθμια

$$2y^3 - 6y - 36 = 0$$

λύση y=3

Αντικατάσταση του y:

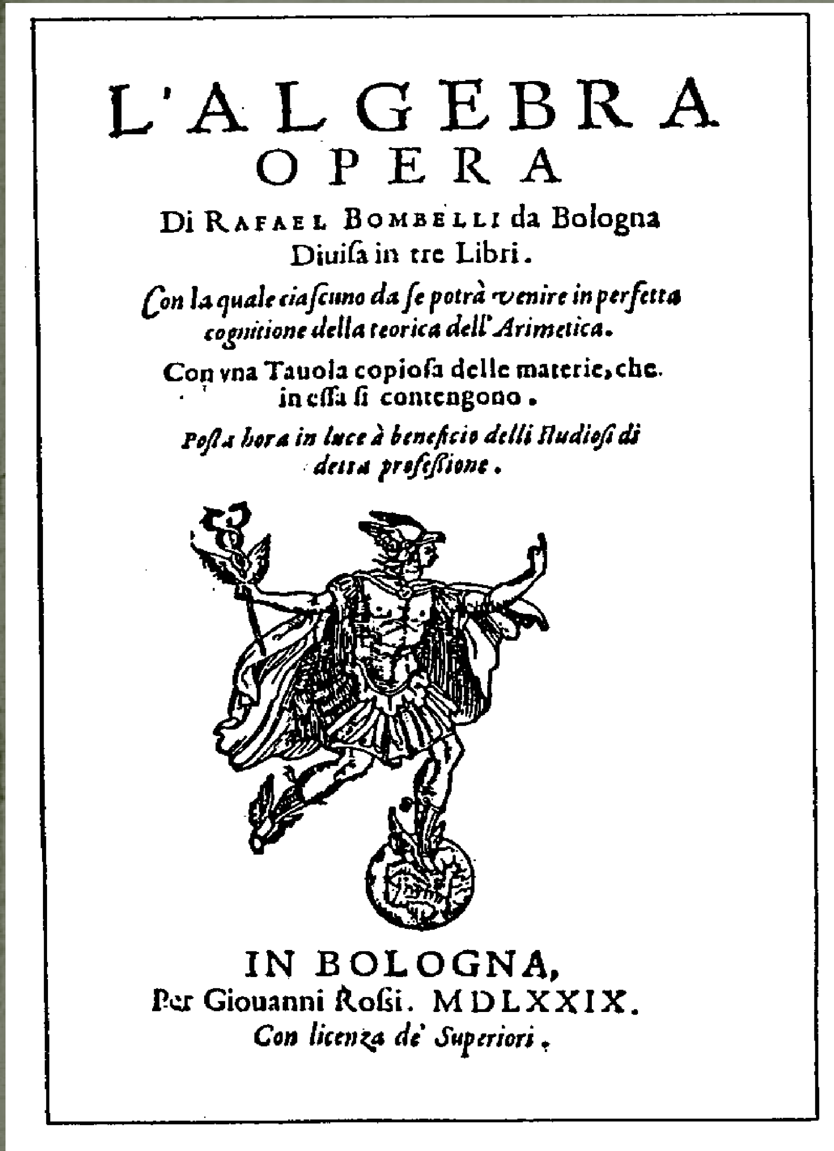
$$(x^2+3)^2 = 6x^2+12x+6 = 6(x+1)^2 \Rightarrow$$

Παίρνουμε τετραγωνικές ρίζες και από τα δύο σκέλη και επιλύουμε τη δευτεροβάθμια

$$x^2+3 = \sqrt{6}(x+1) \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\sqrt{6}-1\frac{1}{2}}$$

Υπάρχουν άλλες ρίζες?



L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.

Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.

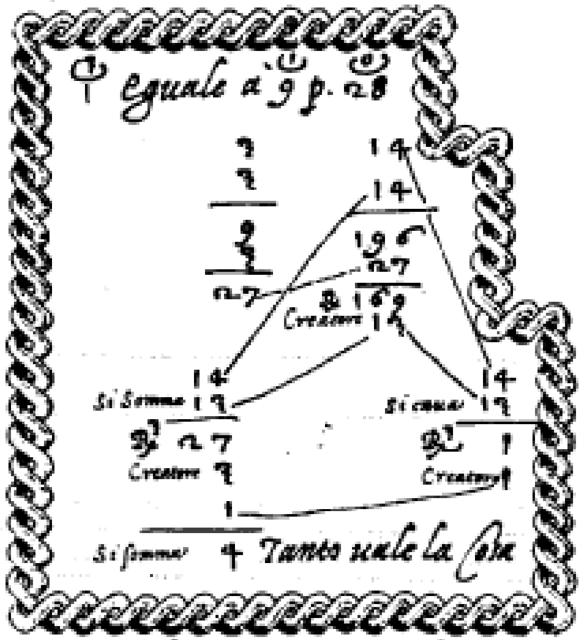
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.

Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

Rafael Bombelli (1526-1573)
Μηχανικός
«Άλγεβρα» 1572

FIGURE 3. Bombelli (1557, 71v): a computational diagram for solving a cubic equation



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

$$x^3 + 6x = 20$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Ο Bombelli έδειξε ότι το 2 ισούται με αυτή τη ποσότητα!

Ο συλλογισμός του Bombelli

Έστω ότι

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}=\sqrt{b}+a$$

ποια είναι τα b,a?

Τότε:

$$(\sqrt{b}+a)^3=b\sqrt{b}+3ba+3a^2\sqrt{b}+a^3$$

$$=(3a^2+b)\sqrt{b}+(a^3+3ab)=\sqrt{108}+10$$

Επίσης

$$(\sqrt{b}-a)^3=b\sqrt{b}-3ba+3a^2\sqrt{b}-a^3$$

$$=(3a^2+b)\sqrt{b}-(a^3+3ab)=\sqrt{108}-10$$

Δηλαδή:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=\sqrt{b}-a$$

Επίσης, αφού

$$\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

προκύπτει αντι καθιστώντας ότι

$$(3a^2 + b)\sqrt{b} + (a^3 + 3ab) = 6\sqrt{3} + 10$$

$$b = 3, \qquad 3a^2 + b = 6, \qquad a^3 + 3ab = 10$$

και άρα a=1 .

Έτσι

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} = \sqrt{b}+a = \sqrt{3}+1 \ ,$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = \sqrt{b}-a = \sqrt{3}-1 \ ,$$

και επομένως

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} =$$

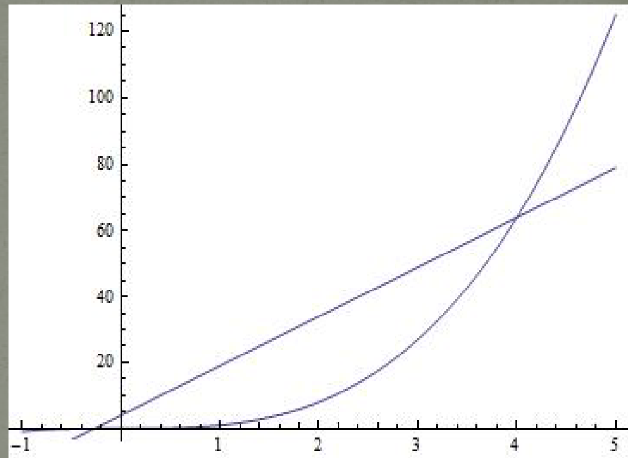
$$\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1) = 2$$

Στην εξίσωση $x^3 = cx + d$ όπου $c, d > 0$ τότε ο τύπος του Cardano είναι:

$$\sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{(\frac{d}{2})^2 - (\frac{c}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{(\frac{d}{2})^2 - (\frac{c}{3})^3}}$$

Σύμφωνα με την απόδειξη του Cardano αυτός είναι ένας θετικός αριθμός.

Ο Bombelli εδειξε οτι $x^3 = cx + d$ οπου $c, d > 0$ έχει <u>ακριβώς μία</u> θετική πραγματική λύση. Πράγματι αν κοιτάξουμε το γράφημα της καμπύλης x^3 και της γραμμής $cx + d$ βλέπουμε ότι όταν $x = 0$ τότε η καμπύλη έχει την τιμή 0 ενώ η γραμμή την τιμή d αλλά μετά η καμπύλη αυξάνεται με πολύ γρηγορότερο ρυθμό. Άρα για θετικά x η καμπύλη και η γραμμή τέμνονται ακριβώς μία φορά.



Συντεταγμένες και Oresme
($14^{ο}$ αιώνα)

ρίζες αρνητικών αριθμών: μέθοδος σοφιστείας

$$x^3 = 15x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ο Bombelli έκανε πράξεις ακολουθώντας τους κανόνες για τα ριζικά και έδειξε ότι η τιμή (από τον τύπο) του Cardano είναι ίση με το 4.

Αν

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$

τότε

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

Επίσης προκύπτει ότι

$$a^2 + b = 5$$

$$a^3 - 3ab = 2$$

Όμως αφού

$$a^2 < 5, \qquad a^3 > 2$$

Στους ακεραίους η μόνη λύση είναι το a=2 και b=1.
Έπεται ότι

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

και

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} =$$

$$(2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4$$

Τεράστια Σημασία των λύσεων τρίτου-τετάρτου βαθμού εξισώσεων :

Οι λύσεις δεν ήταν αποτέλεσμα πρακτικών υπολογισμών
Οι λύσεις δεν χρησίμευαν στους μηχανικούς.
Προσεγγιστικές λύσεις για αυτές τις εξισώσεις υπήρχαν.

Έδωσαν ώθηση στην αλγεβρική έρευνα προς διάφορες κατευθύνσεις.
Στην Άλγεβρα: προσπάθεια για γενίκευση για εξισώσεις οποιουδήποτε βαθμού
Ενασχόληση με άλλο είδος αριθμών: τις τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών.

Στην εξίσωση $x^3 + cx = d$ όπου $c, d > 0$ ο τύπος του Cardano είναι:

$$\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{c}{3})^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{c}{3})^3} - \frac{d}{2}}$$

Στην εξίσωση $x^3 = cx + d$ όπου $c, d > 0$ ο τύπος του Cardano είναι:

$$\sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{(\frac{d}{2})^2 - (\frac{c}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{(\frac{d}{2})^2 - (\frac{c}{3})^3}}$$

Μπορούμε να τους ενοποιήσουμε για τη περίπτωση $x^3 + cx + d = 0$ (χωρίς περιορισμούς στα πρόσημα των c, d);