

Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

2.04.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Τι είναι αριθμητική?

Τι είναι Άλγεβρα?

Είναι Άλγεβρα η «Γεωμετρική Άλγεβρα»?

Έκανε ο Διόφαντος Άλγεβρα?

Ασχολήθηκαν με Άλγεβρα οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι?

Πολυωνυμικές εξισώσεις και Βαβυλωνία



19^{ος} -17^{ος} π.Χ.
YBC 4663

Να βρεθεί το **μήκος** και το **πλάτος** έτσι
ώστε η περίμετρος να είναι 13 και το
εμβαδόν $7 \frac{1}{2}$:

Διαδικασία:

βρες το μισό του 13:	$6 \frac{1}{2}$
βρες το μισό του $6 \frac{1}{2}$:	$3 \frac{1}{4}$
βρες $(3 \frac{1}{4}) (3 \frac{1}{4})$:	$10 \frac{9}{16}$
αφαίρεσε $7 \frac{1}{2}$:	$3 \frac{1}{16}$
πάρε τη (τετραγωνική) ρίζα:	$1 \frac{3}{4}$
μήκος:	$3 \frac{1}{4} + 1 \frac{3}{4} = 5$
πλάτος:	$3 \frac{1}{4} - 1 \frac{3}{4} = 1 \frac{1}{2}$

Αν x, y είναι το μήκος και το πλάτος τότε θέλουμε να λύσουμε τις εξισώσεις: $x+y=6 \frac{1}{2}$ $xy=7 \frac{1}{2}$

$$y = 6 \frac{1}{2} - x, \quad x(6 \frac{1}{2} - x) = 7 \frac{1}{2}$$

$$-x^2 + 6 \frac{1}{2} x = 7 \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 6 \frac{1}{2} x - 7 \frac{1}{2} = 0$$

Οδηγίες:

το μισό του $6 \frac{1}{2}$:	$3 \frac{1}{4}$
$(3 \frac{1}{4}) (3 \frac{1}{4})$:	$10 \frac{9}{16}$
μείον $\frac{1}{2}$:	$3 \frac{1}{16}$
(τετραγωνική)ρίζα:	$1 \frac{3}{4}$
μήκος:	$3 \frac{1}{4} + 1 \frac{3}{4} = 5$
πλάτος:	$3 \frac{1}{4} - 1 \frac{3}{4} = 1 \frac{1}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{6 \frac{1}{2} \pm \sqrt{(6 \frac{1}{2})^2 - 4 * 7 \frac{1}{2}}}{2} =$$

$$\frac{6 \frac{1}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6 \frac{1}{2}}{2}\right)^2 - 7 \frac{1}{2}}$$

Το πρόβλημα με τη περίμετρο και εμβαδό αντιστοιχεί στην εύρεση λύσης μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής

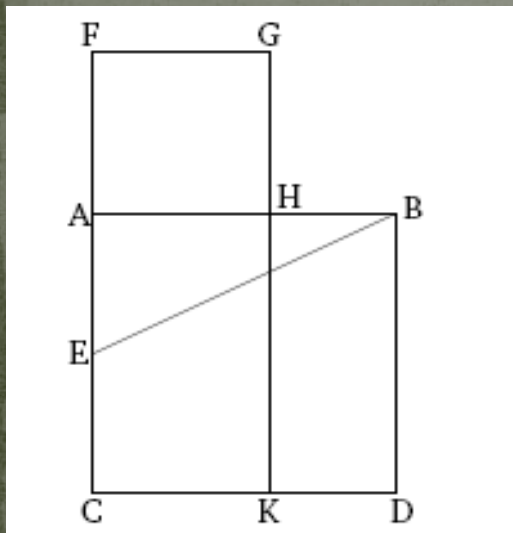
$$x^2 = bx + c, \quad b > 0, c > 0$$

Σε άλλη πλάκα υπάρχει παράδειγμα εύρεσης λύσης της εξίσωσης

$$7x + 11x^2 = 6 \frac{1}{4}$$

Ευκλείδης, βιβλίο 2. 1, Στοιχεία

Να διαιρεθεί δοθέν τμήμα ώστε το ορθογώνιο που ορίζει το τμήμα και το ένα μέρος του να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το άλλο μέρος.



$$a(a - x) = x^2$$

Λύση: Έστω $AB=a$. Τότε $x=AF$ όπου AE είναι ίσο $\frac{1}{2} AB$ και $EF=EB$.

Πράγματι: η γεωμετρική λύση που δίνει στη συγκεκριμένη αυτή δευτεροβάθμια εξίσωση ο Ευκλείδης για την εξίσωση $x^2+ax-a^2=0$ ακολουθεί τον τύπο των ριζών: από ρίζα του $5(a/2)^2$ αφαιρείς το $a/2$.

Διόφαντος ~τρίτος αιώνας μ.Χ.



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Ο Διόφαντος εξέτασε και τους 3 τύπους δευτεροβάθμιων εξισώσεων
όπου $a, b, c > 0$:

$$\begin{array}{rcl} ax^2 + bx & = & c \\ ax^2 & = & bx + c \\ ax^2 + c & = & bx \end{array}$$

- Πρόβλημα I-28

Να βρεθούν δύο αριθμοί έτσι ώστε το άθροισμά τους και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι δοθέντες αριθμοί:

$$z + y = a, \quad z^2 + y^2 = b$$

Συνθήκη του Διόφαντου για να έχει λύση το πρόβλημα:

«πρέπει δύο φορές το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών μείον το τετράγωνο του αθροίσματος των αριθμών να είναι τετράγωνο.»

Arithmeticon Liber II.

... (left column of text) ...

... (right column of text) ...

IN PROPOSITA...

... (text block) ...

QUESTIO VIII.

P... (left column of text) ...

T... (right column of text) ...

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

C... (text block) ...

QUESTIO IX.

R... (left column of text) ...

E... (right column of text) ...

tertillo quadratorum, & Canonis iidem hic etiam locum habebunt, ut inante-
 Præf. d.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum
 dividere in duos quadratos.
 Imperatum sit ut 16. dividatur
 in duos quadratos. Ponatur
 primus 1 Q. Oportet igitur 16
 - 1 Q. æquales esse quadrato.
 Fingo quadratum à numeris
 quotquot libuerit, cum defe-
 ctu tot unitatum quot conti-
 net latus ipsius 16. esto à 2 N.
 - 4. ipse igitur quadratus erit
 4 Q. - 16. - 16 N. hæc æqua-
 bantur unitatibus 16 - 1 Q.
 Communis adiciatur utrimque
 defectus, & à similibus aufe-
 rantur similia, sicut 1 Q. æqua-
 les 16 N. & sit 1 N. 7 Erit igitur
 alter quadratorum 7. alter
 verò 9. & utriusque summa est
 16 seu 16. & uterque quadratus
 est.

ΤΟΝ τετραγώνον τετράγωνον
 διαιρέσειν εἰς δύο τετράγωνα. ἰ-
 περάσθω δὲ τὸ 16 διησὶν εἰς δύο τε-
 τραγώνους. καὶ τετράγωνον ὁ ποσὸς τῆς
 δυναμικῆς μιας. διησὶν ἄρα μονά-
 δας 16 λείψι δυναμικῆς μιας ἴσας
 4 πρῶτων. σὺν δὲ τῷ τετράγωνον
 δὲ 16. ὅσων δὲ πρὸς λείψι το-
 σούτων μὲ ὅσων ἐστὶ τὸ 16 μὲ σὺν λεί-
 ψι. ἴσων εἶναι β' λείψι μὲ δ'. αὐτῶς
 ἄρα ὁ τετράγωνος ἴσων δυναμικῶν
 δ' μὲ 16 [λείψι εἶναι 16] πάντων ἴσων
 μονάδων 16 λείψι δυναμικῆς μιας.
 καὶ τὸ ποσὸς εἶναι ἢ λείψις, καὶ δὲ τὸ
 ὁμοίωσιν ὅμοια δυναμικῆς ἄρα ἴσων
 ἀριθμῶν 16. καὶ γίνονται ὁ ἀριθμὸς
 16 πέμπτων. ἴσων ὁ μὲν σὺν εἰκοσι-
 πέμπτων. ὁ δὲ μὲν εἰκοσιπέμπτων, ἐ
 4 δύο συνεπίδητες πηλοδοί ἢ
 εἰκοσιπέμπια, ἢ πη μονάδας 16. καὶ ἴσων ἑξαέτης τετράγωνον.

Γενικό πρόβλημα: Να διαιρέσεις τετράγωνο σε δύο τετράγωνα.

Ειδικό πρόβλημα: Να διαιρέσεις το 16 σε δύο τετράγωνα.

tertillo quadratorum, & Canonis idem hic etiam locum habebunt, ut manifestum est.

QUESTIO VIII.

PROPOSITUM quadratum dividere in duos quadratos. Imperatum sit ut 16. dividatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 - 1 Q. xquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot unitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. - 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. - 16. - 16 N. hæc xquabuntur unitatibus 16 - 1 Q. Communis adiciatur utrimque defectus, & à similibus auferantur similia, sicut 1 Q. xquales 16 N. & fit 1 N. Erunt igitur alter quadratorum 3, alter vero 5. & utriusque summa est 8 seu 16. & uterque quadratus est.

ΤΟΝ τετραγώνον τετράγωνον διαιρέσειν εἰς δύο τετράγωνα. ἰσότητος δὲ τῆς 16. διδόναι εἰς δύο τετράγωνα. καὶ τετράγωνον ὁμοειδέως μίας. διδοῦν ἄρα μονάδας 16 λείπει δυνάμειος μίας ἴσας 15 τετραγώνων. σκέπτεται τὸ τετράγωνον δὲ τῆς 16. ὅπως διὰ τῆς λείπει τοσούτων μὲν ὅσων ἐστὶν ἡ 16 μὲν σκέπτεται ἄρα ἴσων τῆς 16 λείπει μὲν 15. αὐτὴς ἄρα ὁ τετράγωνος ἴσων δυνάμειος δὲ μὲν 16 [λείπει τῆς 16] πάντως ἴσων μονάδων 16 λείπει δυνάμειος μίας. καὶ τὸ τετράγωνον ἢ λείπει, καὶ δὲ ὁμοίως ὅμοια δυνάμειος ἄρα ἴσων ἀριθμοῦ 16. καὶ ἴσων ὁ ἀριθμὸς 16 πέμπτων. ἴσων ὁ μὲν σὺν εἰκοσήμεπων. ὁ δὲ μὲν εἰκοσήμεπων, ἔστι δὲ δύο συνεπίδητοις πηλοῖσι ἢ εἰκοσήμεπων, ἢ πηλοῦ μονάδας 16. καὶ ἴσων ἑξήκτους τετράγωνον.

Γενικό πρόβλημα: Να διαιρέσεις τετράγωνο σε δύο τετράγωνα.

Ειδικό πρόβλημα: Να διαιρέσεις το 16 σε δύο τετράγωνα.