Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

29.05.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Πίσω στην Άλγεβρα…

Έως το τέλος του 18ου αιώνα, άλγεβρα ήταν η μελέτη πολυωνυμικών εξισώσεων (κλασσική άλγεβρα).

Το 20ο αιώνα η άλγεβρα έγινε η μελέτη αφηρημένων συστημάτων, συστημάτων που καθορίζονται από αξιώματα (μοντέρνα άλγεβρα).

Η μετάβαση έγινε τον 19ο αιώνα. Τότε εμφανίστηκαν και αναγνωρίσθηκαν οι δομές για ομάδες, για αντιμεταθετικούς και μη δακτυλίους, για σώματα και για διανυσματικούς χώρους.

Οι τομείς αυτοί της αφηρημένης Άλγεβρας αναπτύχθηκαν παράλληλα και αλληλοεπιρρεάζοντας ο ένας τον άλλον.

Για παράδειγμα

η θεωρία Galois αφορά ομάδες και σώματα.

η αλγεβρική θεωρία αριθμών εμπλέκει ομάδες, αντιμεταθετικούς δακτυλίους, σώματα.

η θεωρία αναπαραστάσεων συνδυάζει ομάδες, μη αντιμεταθετικούς δακτυλίους, γραμμική άλγεβρα.

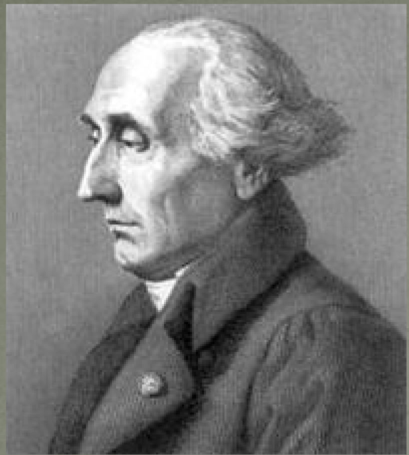
Η θεωρία ομάδων οφείλει την εξέλιξή της στις επόμενες πηγές:

Κλασσική άλγεβρα (Lagrange 1770) *

Θεωρία αριθμών (Gauss, 1801)*

Γεωμετρία (Klein, 1874, πρόγραμμα του Erlangen)

Ανάλυση (Lie 1874, Poincare και Klein, 1876)



Joseph-Louis Lagrange
1736-1813

Carl Friedrich Gauss
1777-1855

Felix Klein
1777-1855

Marius Sophus Lie
1842-1899

Henri Poincare
1854-1912

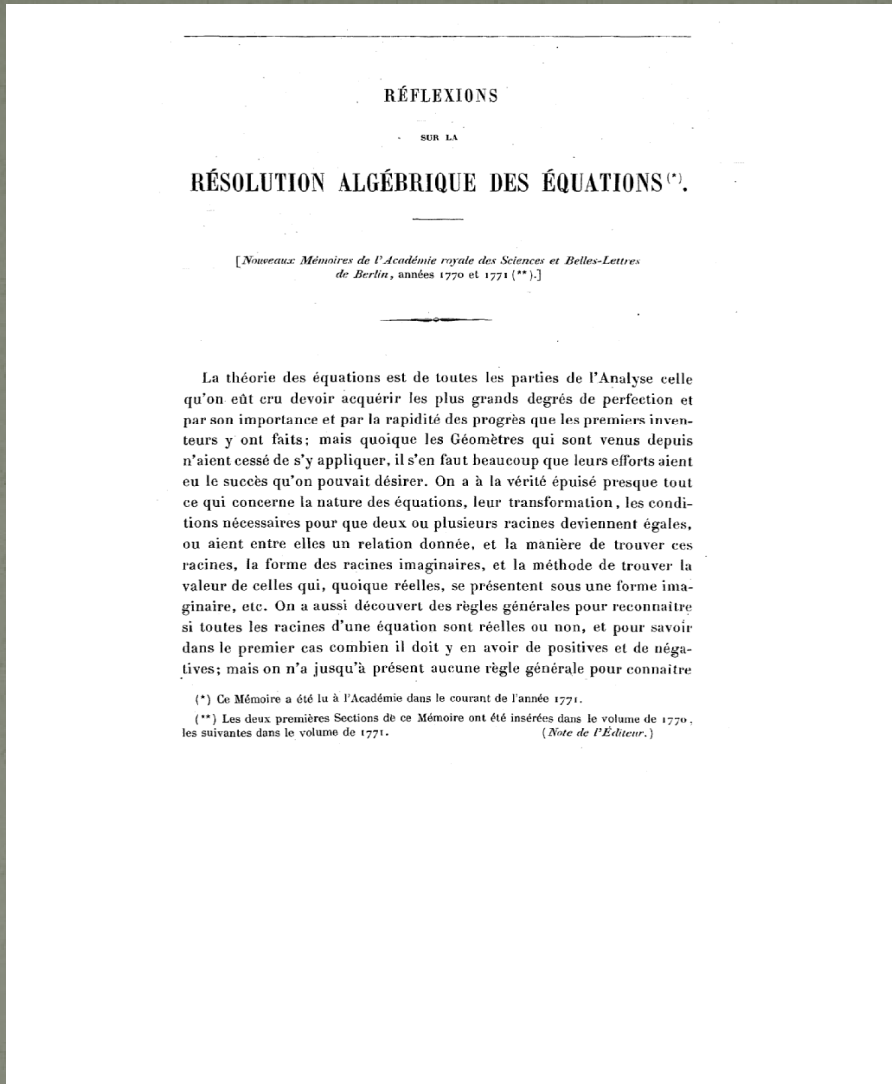
Κλασσική Άλγεβρα και Lagrange

Εύρεση μεθόδων για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων:

Περιπτώσεις ανάλογα με το βαθμό του πολυωνύμου.

- Βαθμός **2**: μέθοδοι ήταν γνωστές από την εποχή των Βαβυλωνίων (1600 π.Χ.)
- Βαθμός **3** και **4:** μέθοδοι δόθηκαν στα μισά του $16^{ου}$ αιώνα.
- Βαθμός **5**: το επόμενο κύριο πρόβλημα για τους επόμενους δύο αιώνες

Αυτό ήταν και το θέμα της εργασίας του Lagrange (1770) «Reflexions sur la resolution algebriques des equations»



RÉFLEXIONS

SUR LA

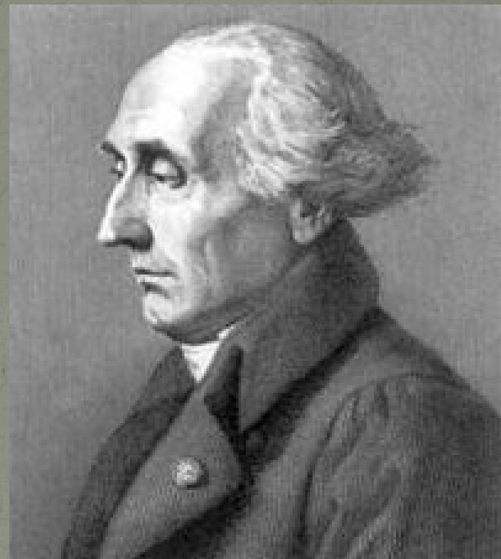
RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS (*).

[*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, années 1770 et 1771 (**).]

La théorie des équations est de toutes les parties de l'Analyse celle qu'on eût cru devoir acquérir les plus grands degrés de perfection et par son importance et par la rapidité des progrès que les premiers inventeurs y ont faits; mais quoique les Géomètres qui sont venus depuis n'aient cessé de s'y appliquer, il s'en faut beaucoup que leurs efforts aient eu le succès qu'on pouvait désirer. On a à la vérité épuisé presque tout ce qui concerne la nature des équations, leur transformation, les conditions nécessaires pour que deux ou plusieurs racines deviennent égales, ou aient entre elles un relation donnée, et la manière de trouver ces racines, la forme des racines imaginaires, et la méthode de trouver la valeur de celles qui, quoique réelles, se présentent sous une forme imaginaire, etc. On a aussi découvert des règles générales pour reconnaître si toutes les racines d'une équation sont réelles ou non, et pour savoir dans le premier cas combien il doit y en avoir de positives et de négatives; mais on n'a jusqu'à présent aucune règle générale pour connaître

(*) Ce Mémoire a été lu à l'Académie dans le courant de l'année 1771.

(**) Les deux premières Sections de ce Mémoire ont été insérées dans le volume de 1770, les suivantes dans le volume de 1771. (*Note de l'Éditeur.*)



Ο Lagrange ανέλυσε τις διάφορες μεθόδους για την αλγεβρική επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού 3 και 4 που είχαν δοθεί (πέρα από τους Ιταλούς) από τους Viete, Descartes, Euler, Bezout.

Αντιλήφθηκε ότι το κοινό στοιχείο αυτών των μεθόδων είναι η αναγωγή του προβλήματος σε ένα πρόβλημα εύρεσης ριζών μίας βοηθητικής πολυωνυμικής εξίσωσης:

όταν η αρχική εξίσωση έχει βαθμό 3 η βοηθητική επιλύουσα εξίσωση έχει βαθμό 2.

όταν η αρχική εξίσωση έχει βαθμό 4 η βοηθητική επιλύουσα εξίσωση έχει βαθμό 3.

Τύπος του Cardano

$$x^3 + cx = d$$

Αν u, v τέτοια ώστε $u - v = d, \qquad uv = (\frac{c}{3})^3$ τότε

$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ είναι ρίζα της εξισωσης

Η βοηθητική επιλύουσα είναι $u^2 - (\frac{c}{3})^3 = du$

Έστω ότι $f(x)$ έχει ρίζες $a_1, \ldots, a_n$ που προσπαθούμε να βρούμε αλγεβρικά.

Βρίσκουμε την κατάλληλη συνάρτηση $R(x_1, \ldots, x_n)$ και υπολογίζουμε τις διάφορες τιμές της όταν στην θέση των x_i αντικαταστήσουμε τα a_i με κάθε δυνατό τρόπο. (Εδώ εμφανίζεται η ιδέα της μετάθεσης των ριζών).

Έστω $y_1, \ldots, y_k$ οι διαφορετικές τιμές που παίρνει η $R(x_1, \ldots, x_n)$. Τότε η επιλύουσα εξίσωση είναι

$$g(x) = (x - y_1) \cdots (x - y_k)$$

Ο βαθμός της $g(x)$ είναι ίσος με το k. Το ζητούμενο είναι το k να είναι μικρότερο από τον βαθμό της $f(x)$. Οι συντελεστές του $g(x)$ εξαρτώνται από τα y_i που με τη σειρά τους εξαρτώνται από τις ρίζες a_i, και σε τελική ανάλυση από τους συντελεστές του $f(x)$. Η εύρεση της επιλύουσας εξίσωσης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη.

Έστω $\deg f(x) = 4$ και ότι $a_1, \ldots, a_4$ είναι οι ρίζες του $f(x)$. Διαλέγουμε

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) := x_1 x_2 + x_3 x_4$$

Υπάρχουν 24(4!) μεταθέσεις των 4 ριζών, δηλαδή πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $R(x_1, x_2, x_3, x_4)$ στις ρίζες 24 φορές. Για παράδειγμα

- $R(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1a_2 + a_3a_4$
- $R(a_2, a_3, a_4, a_1) = a_2a_3 + a_1a_4$
- $R(a_3, a_4, a_1, a_2) = a_3a_4 + a_1a_2$
- $R(a_4, a_1, a_2, a_3) = a_1a_4 + a_2a_3$
- $R(a_1, a_3, a_2, a_4) = a_1a_3 + a_2a_4$
- κ.ο.κ.ε.

και μπορεί να ελεγχθεί ότι τελικά υπάρχουν μόνο 3 διαφορετικές τιμές. Έτσι η επιλύουσα $g(x)$ έχει βαθμό 3.

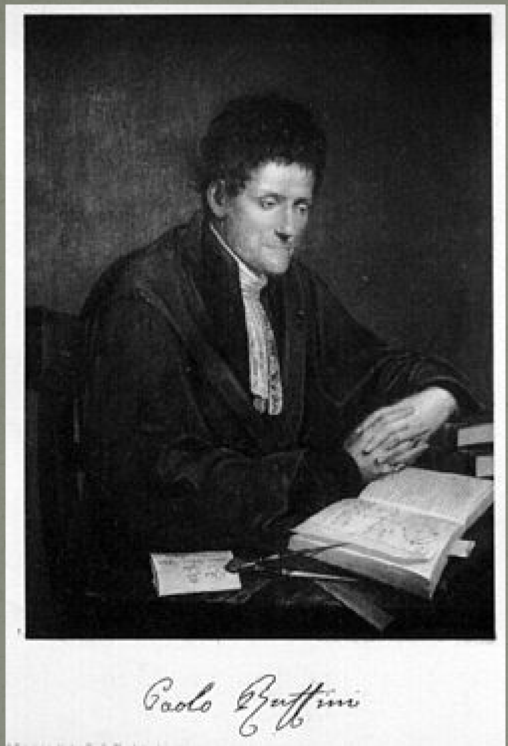
$(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3)$

Ο Lagrange απέδειξε ότι ο βαθμός k της επιλύουσας ενός πολυωνύμου βαθμού n διαιρεί το n!. (αντιστοιχεί στο Θεώρημα του Lagrange.)

Επίσης απέδειξε ότι αναγκαία συνθήκη για την επίλυση της εξίσωσης βαθμού n είναι η ύπαρξη κάποιας επιλύσουσας βαθμού <n.

Όταν επιχείρησε για την εξίσωση βαθμού 5 βρήκε μόνο επιλύουσες βαθμού 6.

Η συνέχεια με Ruffini, Abel και Galois…



Niels Abel
1802-1829

Paolo Ruffini
1765-1822

Ο Ruffini (1799) και ο Abel (1824) έδειξαν ότι δεν υπάρχουν επιλύουσες εξισώσεις βαθμού μικρότερου του n όταν ο βαθμός της αρχικής εξίσωσης n είναι >4. Το έργο τους συνέβαλλε στην ανάπτυξη της θεωρίας των μετασχηματισμών.

Η απόδειξη του Ruffini είχε λάθη.

1789 -1857

Ο Cauchy μελέτησε το έργο του Ruffini και συνέβαλλε ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της θεωρίας των μεταθέσεων.

Για τον Galois το κύριο ζήτημα ήταν να καταλάβει τις γενικές αρχές. Θεωρούσε ότι οι υπολογιστικές μέθοδοι είχαν γίνει τόσο περίπλοκες που πρόοδος με αυτόν τον τρόπο ήταν αδύνατη.

Για τον Galois υπήρξαν δύο ζητήματα:

1. αντιστοιχία ομάδων και σωμάτων (θεωρία Galois)

και

2. εφαρμογές για την επίλυση των εξισώσεων,
   --- πότε οι ρίζες ενός πολυωνύμου εκφράζονται αλγεβρικά.

Ο Galois πρώτος χρησιμοποίησε τον όρο <u>ομάδα:</u>

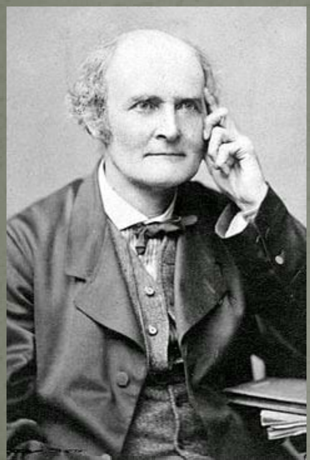
μία συλλογή από μεταθέσεις που το γινόμενο τους ανήκει σε αυτή τη συλλογή.

Έδειξε ότι οι ιδιότητες μίας αλγεβρικής εξίσωσης συνδέονται άμεσα με της ιδιότητες μία ομάδας μεταθέσεων. Η ομάδα αυτή αποτελείται από εκείνες τις μεταθέσεις ριζών που δεν αλλάζουν τις σχέσεις ανάμεσα στις ρίζες.

Για να περιγράψει αυτές τις ιδιότητες ανακάλυψε την έννοια των κανονικών υποομάδων και των ομάδων πηλίκα.

Παρατήρησε ότι η ύπαρξη επιλύουσας είναι ισοδύναμης με την ύπαρξη κανονικών υποομάδων με κατάλληλους δείκτες.

Το έργο του γράφτηκε το 1830 και εμφανίστηκε το 1846 (Louiville).



(O Cayley το 1854 έδωσε τον πρώτο αφηρημένο ορισμό ομάδας .)

Evariste Galois

25 Oct 1811- 31 May 1832

Bourg-la-Reine

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Οι γονείς του:
μορφωμένοι και σκεπτόμενοι: (φιλοσοφία, φιλολογία, θρησκευτικά)

πατέρας του: Δημοκρατικός και Δήμαρχος του Bourg-la-Reine 1814

μητέρα του: κόρη δικαστή, πρώτη του δασκάλα (έως τα 12) ελληνικά, λατινικά, θρησκευτικά

Καλός μαθητής
έως το 1825
Επανάληψη τάξης το 1826
(έμεινε στα ρητορικά)

1826: βιβλίο του Legendre «Στοιχεία της Γεωμετρίας»

«Είναι το πάθος των μαθηματικών που τον έχει καταλάβει. Πιστεύω ότι θα ήταν καλύτερα για αυτόν αν οι γονείς του του επέτρεπαν να μελετήσει μόνο τα μαθηματικά. Χάνει τον χρόνο του εδώ και δεν κάνει τίποτα άλλο από το να παιδεύει τους δασκάλους του και να τιμωρείται.»
«παράξενος, κλειστός...»
«πρωτότυπος, όχι μεθοδικός»

Νεανικά διαβάσματα-Επιρροές

Legendre

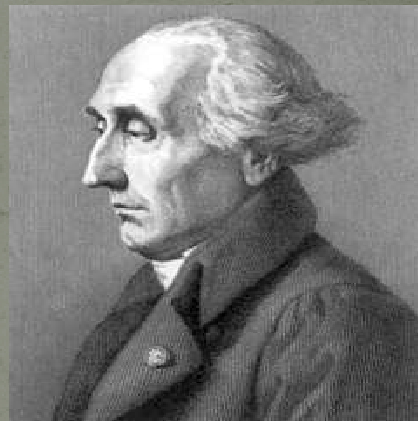
1752 - 1833

Abel

1802 - 1829

Lagrange

1736 - 1813



- 1828

- 1829 (τραγικός θάνατος πατέρα του)

École Polytechnique
Διπλή αποτυχία....

το καλύτερο ανώτατο ίδρυμα της εποχής,
Μεγάλο πολιτικό
φοιτητικό κίνημα
πανεπιστήμιο

Cauchy

1789 - 1857

Fourier

1768 - 1830

απόρριψη

-- υποβολή της εργασίας το 1830...
το χειρόγραφο δε βρέθηκε ποτέ

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

- 1830: Το μεγάλο βραβείο της Ακαδημίας αποδίδεται στον Abel και στον Jacobi
- Η εργασία του Galois δεν βρέθηκε ποτέ.
- 1831, η δουλιά του Galois απορίφθηκε ακόμα μία φορά από τον Poisson…

Poisson

1781 - 1840

Αποβολή από την ENS: Δεκέμβρης1830, λόγος: πολιτικό γράμμα, υπογεγραμμένο, κατά του διευθυντή της Σχολής στο Gazette des Ecoles

Φυλακή

- Μάιος 1831, λόγος: απειλή κατά του βασιλιά, χρόνος φυλάκισης: 1 μήνας
- Ιούλιος 1831 (ημέρα της Bastille) λόγος: στολή των Δημοκρατικών φρουρών (και με πιστόλια, τουφέκι, σπαθί..) χρόνος φυλάκισης: 6 μήνες

- Στη φυλακή της Αγίας Πελαγίας ο Galois

έλαβε την απόριψη από τον Poisson:

«το επιχείρημα του συγγραφέα δεν είναι σαφές ούτε αρκετά ανεπτυγμένο για να αποφασίσουμε ως προς την ισχύ του….

Προτείνουμε ο συγγραφέας να δημοσιεύσει το έργο του στο σύνολό του για να μπορέσουμε να διαμορφώσουμε οριστική άποψη.»

Απόπειρα αυτοκτονίας….

- Απρίλιο 1832, ανάρωση από χολέρα

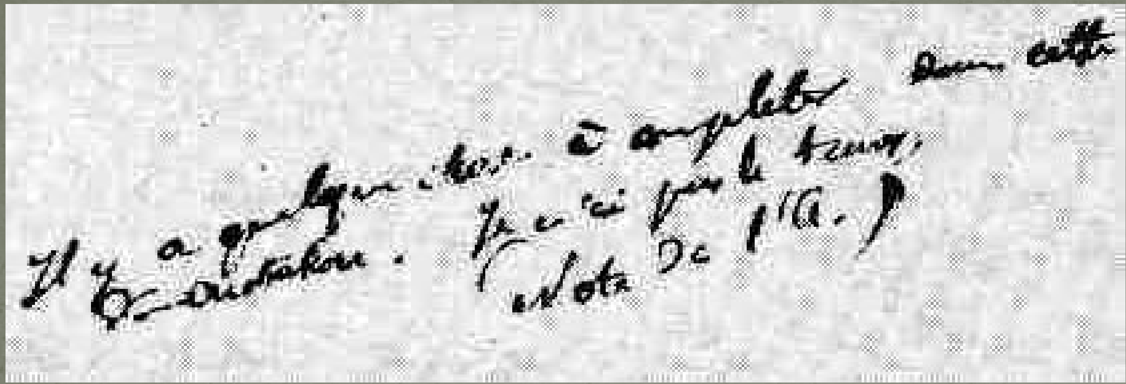
Θάνατος

- 30 Μαίου 1832: μονομαχία, έναν μήνα μετά την αποφυλάκιση…

29 Μαίου 1832: ολονυκτία για το περίφημο γράμμα στον φίλο Chevalier

Τελευταία λόγια στον αδελφό του Alfred:

Ne pleure pas, Alfred ! J'ai besoin de tout mon courage pour mourir à vingt ans !



«υπάρχει κάτι να
προστεθεί για να
ολοκληρωθεί αυτή η
απόδειξη.
Δεν προλαβαίνω.»

Σημείωση στο γράμμα προς τον Chevalier

«Ρώτα τον Jacobi ή τον Gauss για την γνώμη τους, όχι ως προς την ισχύ των όσων γράφω, αλλά ως προς την σημασία αυτών των θεωρημάτων.

Αργότερα ελπίζω ότι θα υπάρξουν κάποιοι που θα θεωρήσουν καλό να αποσαφηνίσουν όλα αυτά.... »

Αναγνώριση

- 1843: Liouville
- *1846: Δημοσίευση Journal des mathématiques pures et appliquées*

Liouville

1809 - 1882

Πίσω στο ξεκίνημα της Θεωρίας Ομάδων

Gauss

1777-1855

Θεωρία Αριθμών και Gauss

Στο έργο του «Disquisitions…» (1801) βρίσκονται οι απαρχές της θεωρίας των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων.

Οι ομάδες εμφανίζονται σε 4 μορφές:

1. ακέραιοι modulo m
2. ακέραιοι που είναι πρώτοι προς το m, modulo m
3. κλάσεις ισοδυναμίας διγραμμικών συναρτήσεων βαθμού 2
4. το σύνολο των n-στών ριζών της μονάδας

Ο Gauss απέδειξε σημαντικές ιδιότητες αυτών των ομάδων (χωρίς βέβαια να χρησιμοποιήσει την ορολογία της θεωρίας ομάδων).

Για παράδειγμα έδειξε ότι οι μη μηδενικοί ακέραιοι modulo p είναι δυνάμεις ενός στοιχείου, δηλαδή ότι

$$\mathbb{Z}_p^* = \langle a \rangle$$

και ότι ο αριθμός των στοιχείων modulo p που μπορούν να παράγουν όλα τα υπόλοιπα είναι ίσος με $\phi(p-1)$.

Μία διγραμμική μορφή βαθμού 2 είναι μία έκφραση $f(x,y)$ έτσι ώστε

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \ a,b,c \in \mathbb{Z} \ .$$

Το κύριο ερώτημα της εποχής ήταν να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι m που μπορούν να γραφούν ως

$$f(x,y) = m$$

για κατάλληλα x,y. Ο Gauss έδειξε ότι μπορεί να οριστεί σύνθεση τέτοιων μορφών και ότι αυτή η σύνθεση αντιστοιχεί σε "πράξη στοιχείων μίας αντιμεταθετικής ομάδας".

Οι παρενθέσεις έχουν μπει γιατί αυτή είναι η μετάφραση του αποτελέσματος του στη σύγχρονη γλώσσα της Θεωρίας Ομάδων.

Ο Gauss δεν φαίνεται να είχε την έννοια της αφηρημένης ομάδας.

Παρόλο που οι τεχνικές του ήταν γενικές, αντιμετώπισε τη κάθε περίπτωση ομάδας (από τις 4 που εμφανίζονται στη δουλειά του) χωριστά.

Δεν είχε μία μέθοδο που να εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις.