Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

29.04.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Girolamo Cardano (1501 – 1576) Μιλάνο (γιατρός-μαθηματικός)

Ars Magna (1545)

$$x^3 + cx = d$$

«Κύβος και πρώτη δύναμη ισούνται αριθμό»

Λύση του Cardano

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{c}{3})^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{c}{3})^3} - \frac{d}{2}}$$

Η τιμή αυτή για το x είναι πάντα θετικός αριθμός.

$x^3+cx=d$: Εφαρμογή όταν το c=6, d=20

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{c}{3})^3}+\frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{c}{3})^3}-\frac{d}{2}}$$

$$x^3+6x=20$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Ο Cardano σημειώνει ότι η παραπάνω ποσότητα πρέπει να είναι ίση με 2.

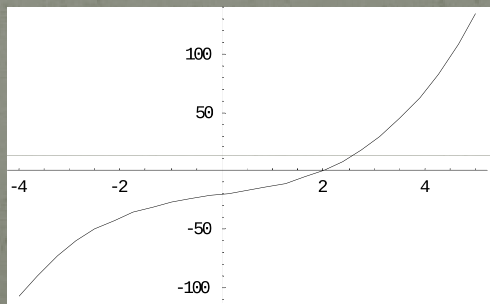
$$x^3 + 6x = 20$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Οι τιμές του x που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3+6x=20$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$x^3 + 6x - 20 = (x-2)(x^2 + 2x + 10)$$

Το γράφημα του $y=x^3+6x-20$ με Mathematica



Πως προκύπτει αλγεβρικά ο τύπος του Cardano

$$x^3 + cx = d$$

Έστω ότι u, v ώστε $u - v = d, \qquad uv = (\frac{c}{3})^3$

Τότε $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ είναι ρίζα για $x^3+cx=d$

Πράγματι $c = 3\sqrt[3]{uv}$

και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$x^3 + cx = (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + c(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})$$

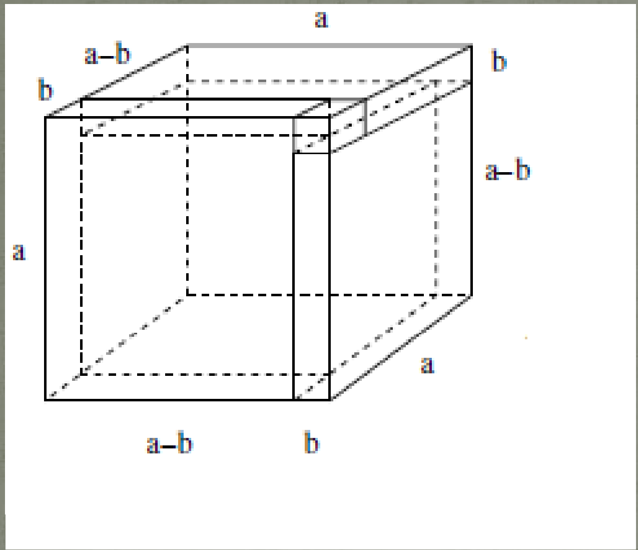
$$= (u - 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v) + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})$$

$$= u - v - 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})$$

$$= u - v = d$$

Θα δούμε λοιπόν αν υπάρχουν τέτοια u , v

Πως προκύπτει γεωμετρικά η ανάγκη αναζήτησης των u και v:



Έτσι η αντιστοιχία είναι u=κυβος α ενώ v=κύβος β

Από το σχήμα είναι φανερό ότι ο εξωτερικός κύβος (με ακμή a) προκύπτει από τον εσωτερικό κύβο (με ακμή $a-b$), τον μικρό κύβο (με ακμή b) στην επάνω δεξιά γωνία και άλλα τρία παραλληλεπίπεδα στις όψεις που φαίνονται στο σχήμα: μπροστά, επάνω και δεξιά. Έτσι συγκρίνοντας τους όγκους προκύπτει:

$$(a-b)^3 + 3(a-b)ab + b^3 = a^3 \quad \Rightarrow$$

$$(a-b)^3 + 3(a-b)ab = a^3 - b^3$$

Η ποσότητα $w = a - b$ εμφανίζεται ως εξής στη παραπάνω σχέση: $w^3 + 3ab\, w = a^3 - b^3$. Έτσι για να είναι w ρίζα της εξίσωσης $x^3 + cx = d$ θα πρέπει $3ab = c$ ενώ $a^3 - b^3 = d$.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΟΜΩΣ ΤΕΤΟΙΑ u ΚΑΙ v ?

$$u - v = d, \qquad uv = (\frac{c}{3})^3$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη πρώτη εξίσωση με v και αντικαταστήσουμε από τη δεύτερη τότε βρίσκουμε ότι

$$u^2 - (\frac{c}{3})^3 = du$$

Βρίσκουμε τη (θετική) ρίζα u. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στη σχέση u – v = d και βρίσκουμε v. Τέλος αφαιρούμε τις κυβικές ρίζες των u και v και προκύπτει ο τύπος του Cardano. (Γιατί υπάρχει θετική τέτοια ρίζα?)

$$x^3 + cx = d$$

x= $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{c}{3})^3} + \frac{d}{2}} -$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{c}{3})^3} - \frac{d}{2}}$$

Όταν $x^3 = cx + d$

ο Cardano έδωσε τον τύπο για ρίζα της εξίσωσης

$$x = \sqrt[3]{d/2 + \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}} + \sqrt[3]{d/2 - \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}}.$$

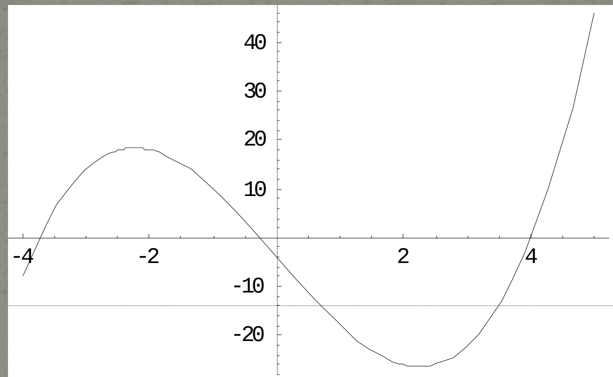
Τι γίνεται όταν $(d/2)^2 - (c/3)^3 < 0$?

Η κυβική εξίσωση $x^3 = 15x+4$ ανήκει στη παραπάνω κατηγορία.

$$x^3 = 15x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Το γράφημα του $y=x^3-15x-4$ με Mathematica



Οι τρεις ρίζες του $x^3= 15x+4$ είναι πραγματικές! Η ρίζα που προκύπτει από τον τύπο του Cardano ποια από όλες είναι?

- Ο Cardano δεν χρησιμοποίησε σύμβολα, και ο τύπος του δόθηκε ρητορικά (με λόγια).

- Ο προηγούμενος τύπος δίνει μόνο μία ρίζα του κυβικού πολυωνύμου. Τι γίνεται με τις υπόλοιπες?

- Υπάρχουν περιστάσεις στις οποίες βρίσκει αρνητικούς αριθμούς ως ρίζες: τους αποκαλεί «πλασματικούς».

- Παρατήρησε ότι το άθροισμα των ριζών είναι «το αντίθετο» του συντελεστή του x^2

- Έδωσε γεωμετρική δικαιολόγηση για τη μεθοδολογία και τον τύπο.

Στο έργο του Cardano έχουμε την εμφάνιση μιγαδικών για την επίλυση ενός προβλήματος με δευτεροβάθμια εξίσωση:

Πρόβλημα: Να διαιρεθεί το 10 σε δύο μέρη, έτσι ώστε το γινόμενο να είναι 40:

Ο Cardano βρίσκει ότι τα μέρη πρέπει να είναι

$$5+\sqrt{-15}, \quad 5-\sqrt{-15}$$

και σχολιάζει ότι η αριθμητική δεν οδηγεί πουθενά.