Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

27.05.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

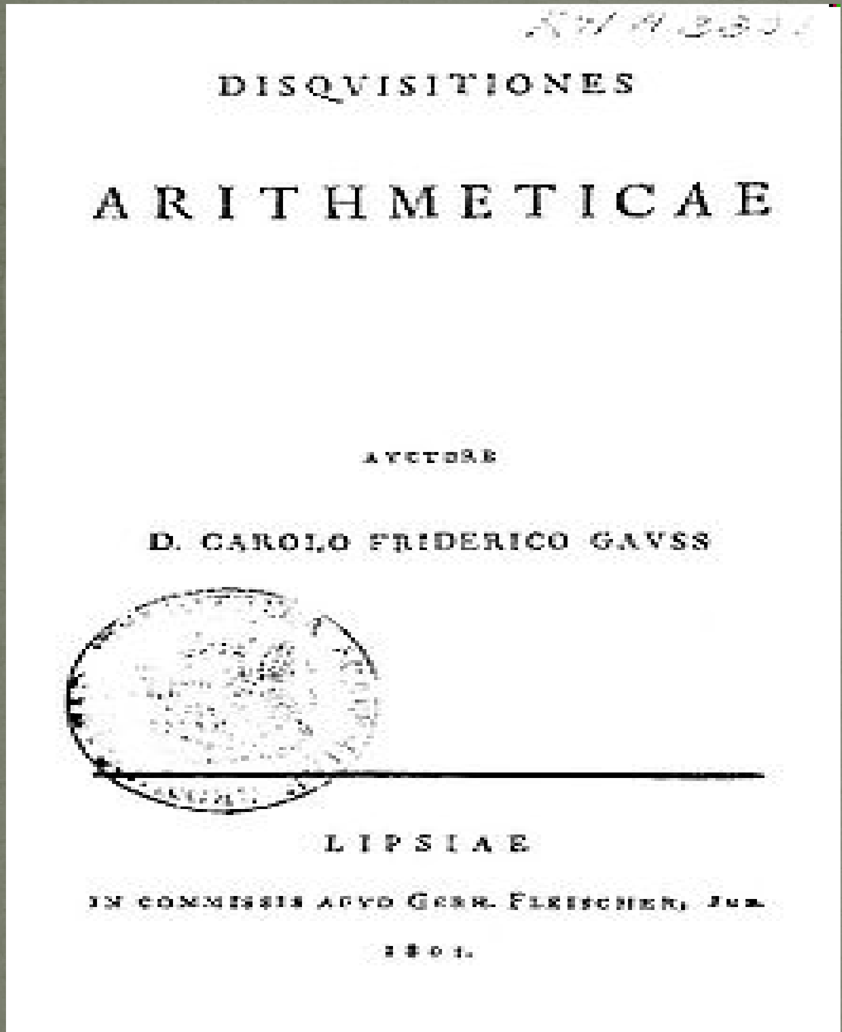
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Princeps mathematicorum

Αναφερόταν στα Μαθηματικά ως η «Βασίλισσα των Επιστημών»

Θεωρία Αριθμών, Στατιστική, Ανάλυση, Διαφορική Γεωμετρία, Αστρονομία, Ηλεκτροστατική, Οπτική, Γεωδαισία, κ.α.

Δίδαξε στο πανεπιστήμιο του Göttingen


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, IVN.

1801.

Θεωρία Αριθμών
(1798)

Ο Gauss συγκέντρωσε έργο μαθηματικών όπως Fermat, Euler, Lagrange, Legendre και δικά του πρωτότυπα αποτελέσματα με συστηματικό τρόπο, συμπληρώνοντας κενά και διορθώνοντας αποδείξεις.
Επέκτεινε τη θεωρία αριθμών στην αλγεβρική θεωρία αριθμών.

όρισε τις κλάσεις ισοδυναμίας

απέδειξε τον νόμο της τετραγωνικής αντιστροφής (theorema aureum) όταν p,q είναι περιττοί πρώτοι:

$$x^2 \equiv p(\mod q) \Leftrightarrow x^2 \equiv q(\mod p)$$

εκτός αν

$$p \equiv q \equiv 3(\mod 4)$$

$$x^2 \equiv p(\mod q) \Leftrightarrow x^2 \not\equiv q(\mod p)$$

ο Gauss έδωσε 8 διαφορετικές αποδείξεις για αυτό το θεώρημα

Κανονικά πολύγωνα, κατασκευές με κανόνα και διαβήτη και οι πρώτοι του Fermat

Ποια κανονικά n-γωνα είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη?

Απάντηση n πρέπει να είναι γινόμενο δύναμης του 2 και πρώτων του Fermat, (ικανή (Gauss 1801) και αναγκαία συνθήκη (Wantzel 1837).

(πρώτοι του Fermat είναι πρώτοι της μορφής $2^{2^n}+1$

π.χ. 3, 5, 17, 257, 65537, (υπάρχουν άλλοι?)

(γνωστό από αρχαιότητα ότι το τρίγωνο και το πεντάγωνο είναι κατασκευάσιμα, βλ. Ευκλείδη)

Ο Gauss έδειξε (θεωρητικά) ότι το κανονικό 17-γωνο είναι κατασκευάσιμο **(1796)** και το γενίκευσε to 1801 αφού πρώτα όρισε ως περιόδους ειδικά αθροίσματα ριζών της μονάδας, πχ . $\zeta+\zeta^{16}$ που είναι $2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ όπου

$$\zeta=\exp\left(\frac{2\pi i}{17}\right).$$

$$16\cos\frac{2\pi}{17} = -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

17-γωνο *κατασκευάσιμο Gauss 1796 (*

Ο Gauss έδειξε ότι οι ρίζες της $x^n - 1$ δίνονται με ριζικά

Συνδεση με Θεωρία Galois

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

πόσο είναι το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως το 100?

Σε δευτερόλεπτα η απάντηση από τον μικρό Gauss:
5050

1	2	3	4	…	50
100	99	98	97		51
101	101	101	101		101

50 x 101 =5050

(Γενίκευση: το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως το n όταν n άρτιος?

1	2	3	…	n/2
n	n-1	n-2		n/2+1
n+1	n+1	n+1		n+1

άρα το άθροισμα είναι n/2 (n+1)

ΘΘΑ (4 αποδείξεις 1799 πρώτη, 1849 η τελευταία)

Οι ακέραιοι του Gauss: a+bi όπου a,b ακέραιοι.

<u>προσοχή</u> 5=(1+2i)(1-2i) δεν είναι πρώτος σε αυτό το σύνολο!

Η ιδιότητα της μοναδικής παραγοντοποίησης ήταν γνωστή από την αρχαιότητα, βλ. «Στοιχεία» (Ευκλείδης).

Ο Gauss μελέτησε την ιδιότητα της μοναδικής παραγοντοποίσης σε συστήματα αριθμών μεγαλύτερα από τους ακεραίους--- γιατί κατάλαβε ότι πιθανόν να υπάρχουν συστήματα αριθμών που να μην την ικανοποιούν!

Εικασία του Gauss: το θεώρημα των πρώτων αριθμών

$\pi(x)$ είναι ο αριθμός των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του x

τότε η συνάρτηση $\pi(x)$ πλησιάζει ασυμπτωτικά τη συνάρτηση $x/(\log x)$

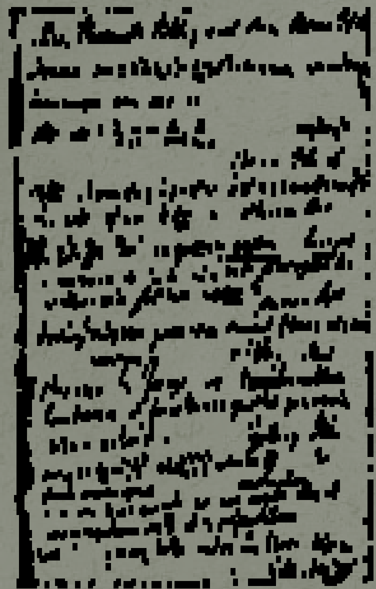
Απόδειξη: 1896 Hadamard, Poussin (ανεξάρτητα)

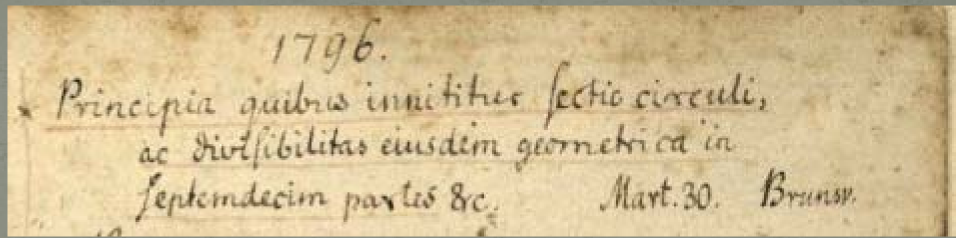
Gauss και μη Ευκλείδια γεωμετρία (σύνδεση του 5ο αξιώματος του Ευκλείδη και της έρευνας του Gauss, γεωμετρίες των Bolyai 1823, Lobachevsky 1829, Riemann)

1828

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Το ημερολόγιο του Gauss

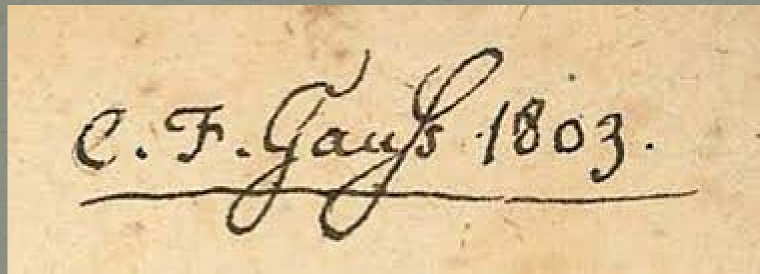




1796-1814
19 σελίδες,
146 εγγραφές (περισσότερες από αυτές σημαντικές μαθηματικές ανακαλύψεις)

δημοσιοποιήθηκε το 1898

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ


C. F. Gauss 1803.