Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

27.03.12

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Προσέγγιση για το π (Αρχιμήδης)

"Κύκλου μέτρησις"

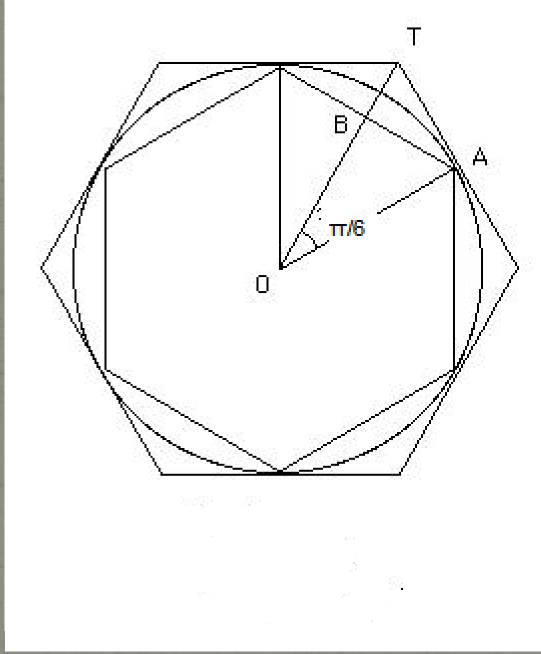
Το θεώρημα εκφράζει τον λόγο της περιφέρειας του κύκλου ως προς τη διάμετρο του κύκλου , δηλ. το π.

$3\,{}^{10}/_{71} < \pi < 3\ 1/7$

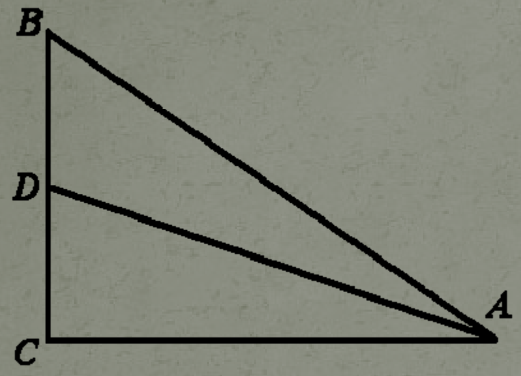
$(3.14085\ldots < \pi < 3.14286)$

Ο Αρχιμήδης κατασκευάζει δύο κανονικά 96-γωνα (ένα εγγεγραμένο και ένα περιγεγραμένο του κύκλου), διχοτομώντας διαδοχικά τις γωνίες.

Η ΟΑ είναι κάθετη στην εφαπτομένη. Έτσι οι γωνίες είναι π/ 6, π/12,…



Χρησιμοποιεί τη Πρόταση 3, βιβλίο 6, «Στοιχεία», Ευκλείδης

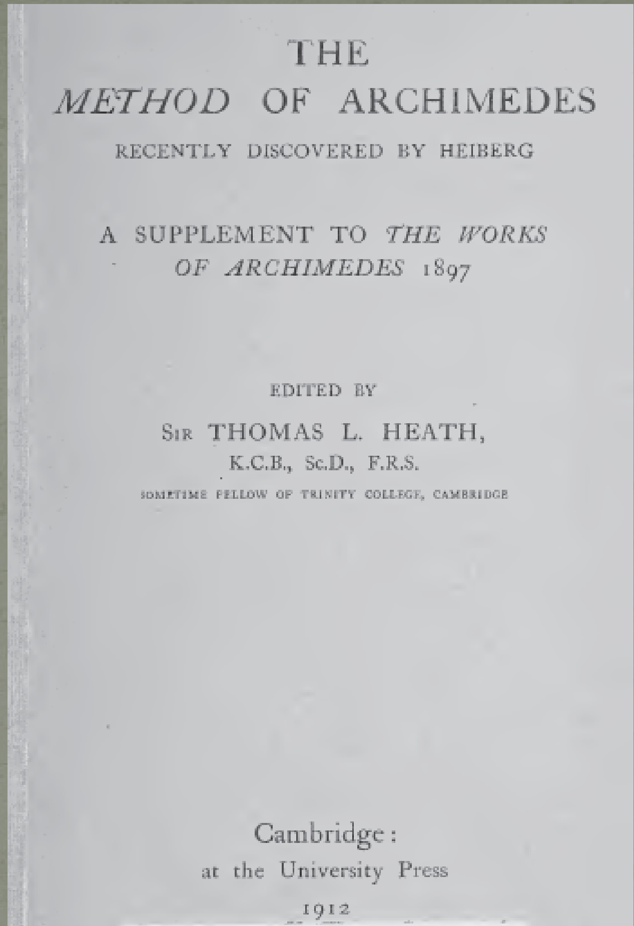


AD διχοτομεί την γωνία BAC

Τότε

BD: DC= AB: AC

Μαζί με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, συγκρίνει το λόγο της διαμέτρου του κύκλου με τις περιφέρειες των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων 96-γώνων και παίρνει άνω και κάτω όρια .


THE

METHOD OF ARCHIMEDES

RECENTLY DISCOVERED BY HEIBERG

A SUPPLEMENT TO *THE WORKS OF ARCHIMEDES* 1897

EDITED BY

SIR THOMAS L. HEATH,

K.C.B., Sc.D., F.R.S.

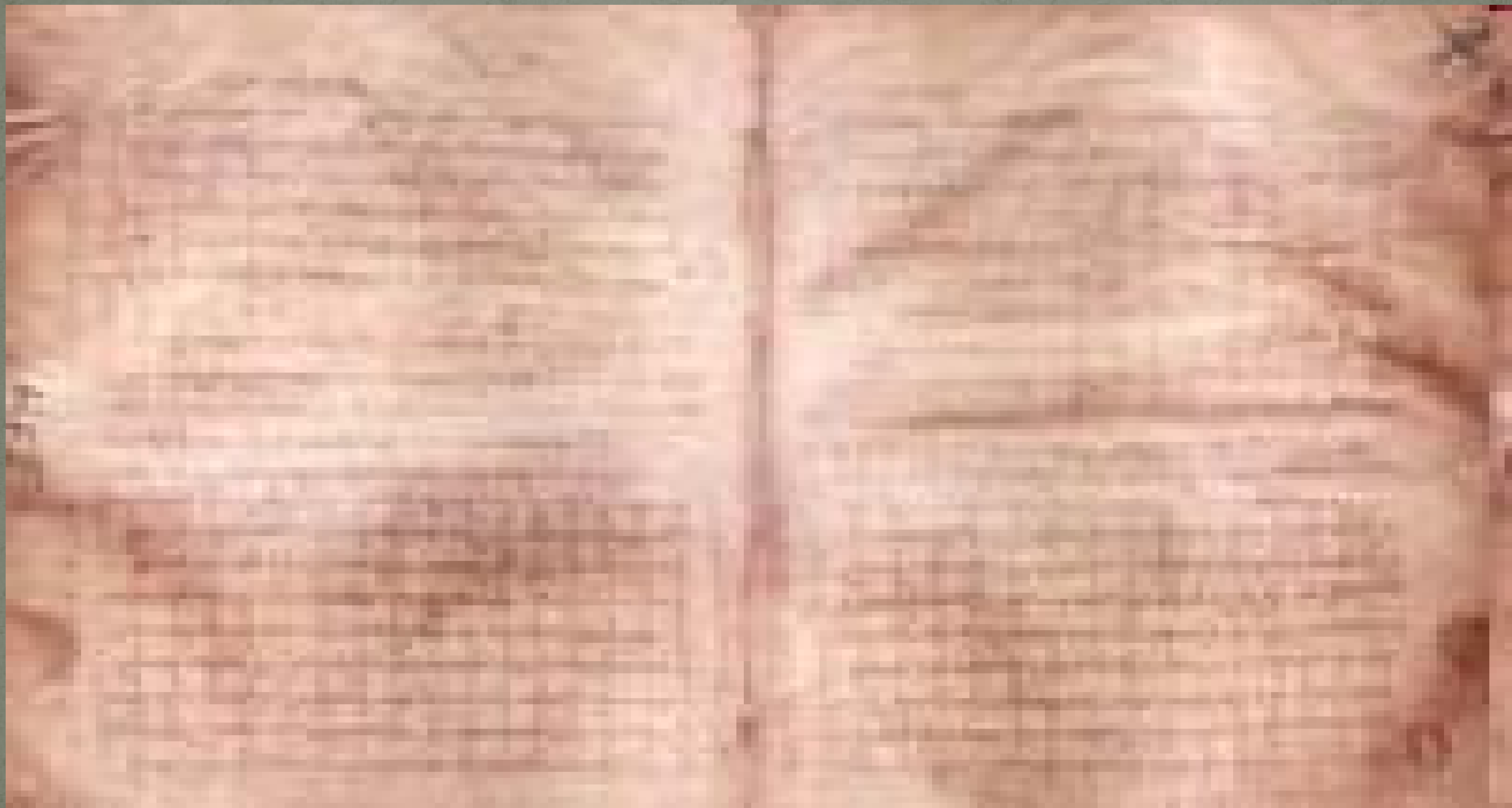
SOMETIME FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

Cambridge:

at the University Press

1912

Παλίμψηστος

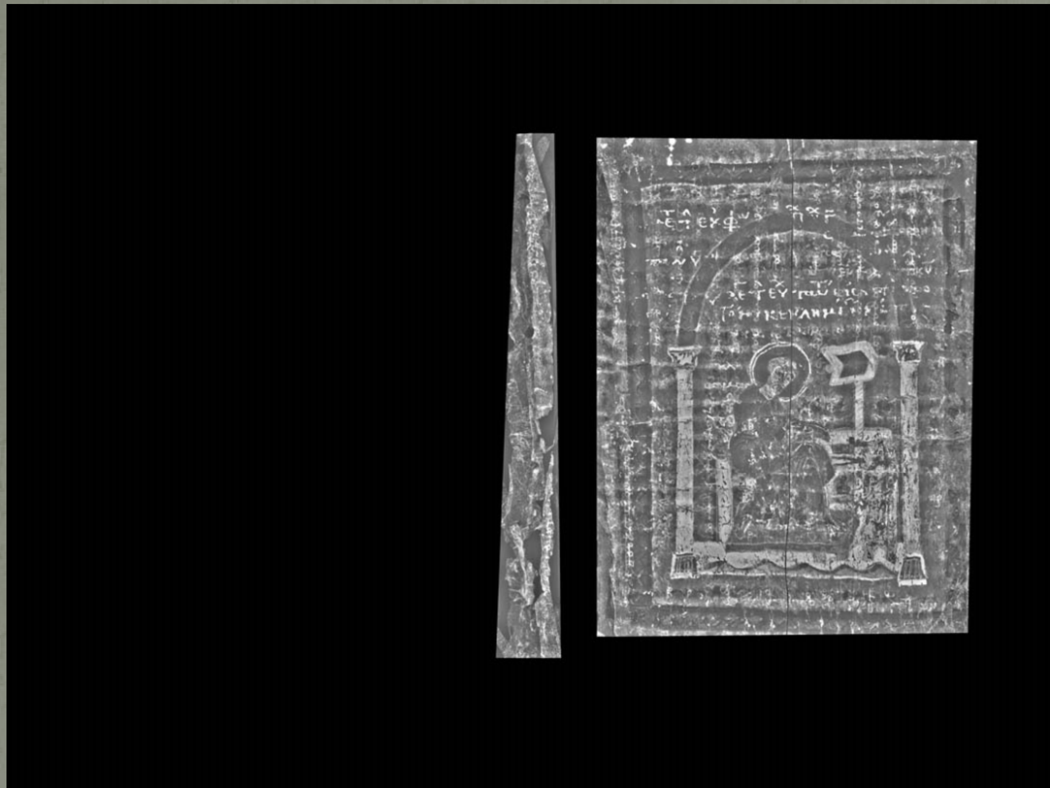


Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

- *Παλίμψηστα*: αρχαίοι πάπυροι και περγαμηνές πολλαπλής χρήσης.
- Το παλίμψηστο (συλλογή προσευχών) εξετάστηκε το 1906 στη Κωνσταντινούπολη από τον Heiberg που αντιλήφθηκε τη σημασία του. Διάβασε 80%, και βρήκε 7 κείμενα του Αρχιμήδη.
- Χάθηκε 1922-1998. Βρέθηκε σε πολύ χειρότερη κατάσταση…
- Το 1998 πουλήθηκε σε πλειστηριασμό του Christie's στην Νέα Υόρκη για 2,2 εκατομμύρια δολάρια. Αγοραστής: άγνωστος
- Σήμερα βρίσκεται στο Walters Art Museum

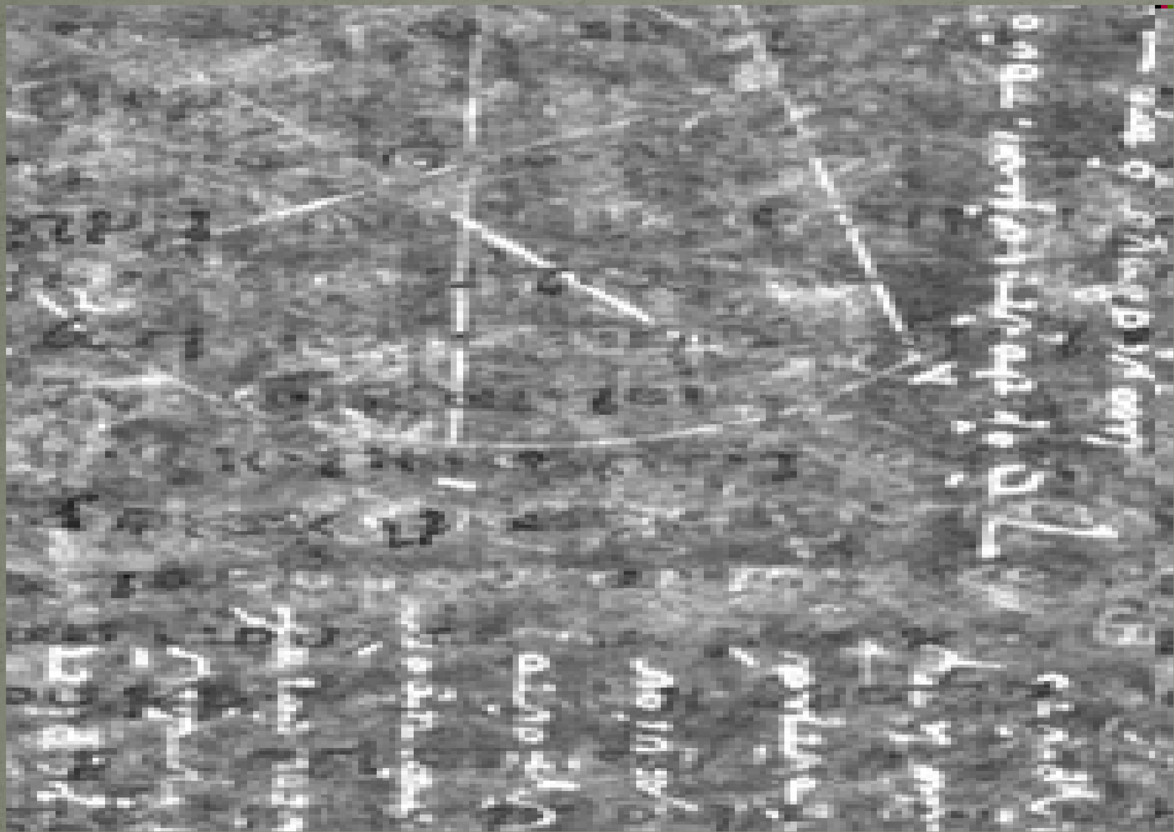
Στο Παλίμψηστο βρίσκονται 7 έργα του Αρχιμήδη

- **«Περί επιπέδων ισορροπιών»**
- **«Κύκλου μέτρησις»**
- **«Περί των μηχανικών θεωρημάτων, προς Ερατοσθένη έφοδος»**
- **«Περί ελίκων»**
- **«Στομάχιον»**
- **«Περί των επιπλεόντων σωμάτων»**
- **«Περί σφαίρας και κυλίνδρου».**



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Παλίμψηστος--ευχολόγιον



Δος μοι πα στω και τα γαν κινάσω

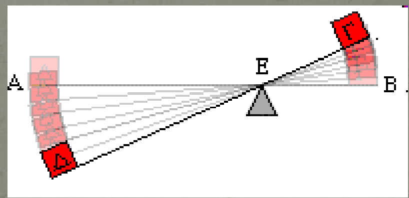
Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ

ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,
ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Αρχιμήδης,
Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος

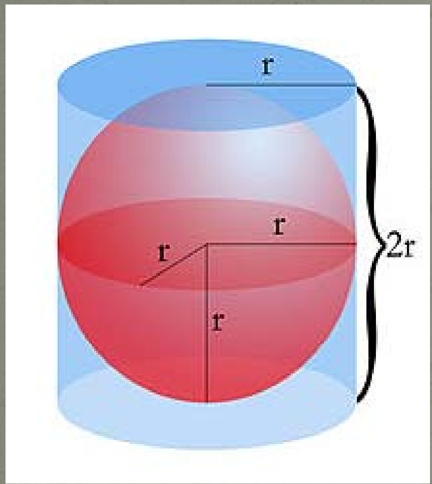
- Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἤ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν.

- Άλλωστε κάποιες ιδιότητες που στην αρχή μου αποκαλύφθηκαν με τη μηχανική στη συνέχεια αποδείχθηκαν με τη γεωμετρία, διότι η προσέγγιση που γίνεται με τη μέθοδο αυτή δεν επιδέχεται απόδειξης. Είναι ευκολότερο να οδηγηθείς στην απόδειξη, εάν έχεις αποκτήσει εκ των προτέρων κάποια γνώση του πράγματος, παρά αν ψάχνεις κάτι για το οποίο δεν έχεις την παραμικρή ιδέα.

- Ο Αρχιμήδης στην Έφοδο για την μέθοδό του:

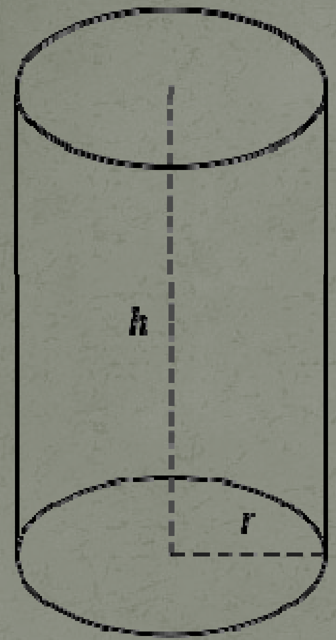
για να βρούμε ένα ζητούμενο εμβαδόν ή όγκο κόβουμε την επιφάνεια ή το σώμα σ' ένα πολύ μεγάλο αριθμό λεπτές, παράλληλες και επίπεδες λωρίδες ή λεπτές παράλληλες φέτες και (νοητά) κρεμάμε αυτά τα κομμάτια στο ένα άκρο δεδομένου μοχλού με τέτοιον τρόπο, ώστε αυτά να βρίσκονται σε ισορροπία με ένα σχήμα του οποίου η περιεκτικότητα και το κέντρο βάρους είναι γνωστά.

Το Θεώρημα του Αρχιμήδη:



Ο όγκος του κυλίνδρου (με ακτίνα r και ύψος 2r) είναι ίσος με τα 3/2 του όγκου της σφαίρας (με ακτίνα r)!

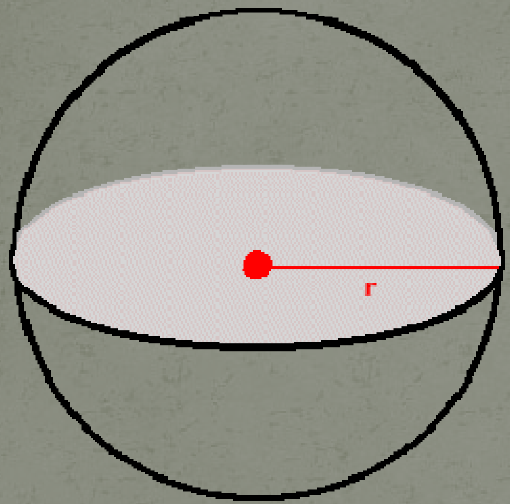
Ογκος κυλίνδρου



Σήμερα ο όγκος του κυλίνδου υπολογίζεται εύκολα ως το τριπλό ολοκλήρωμα

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r s ds \, d\phi \, dz = \pi r^2 h$$

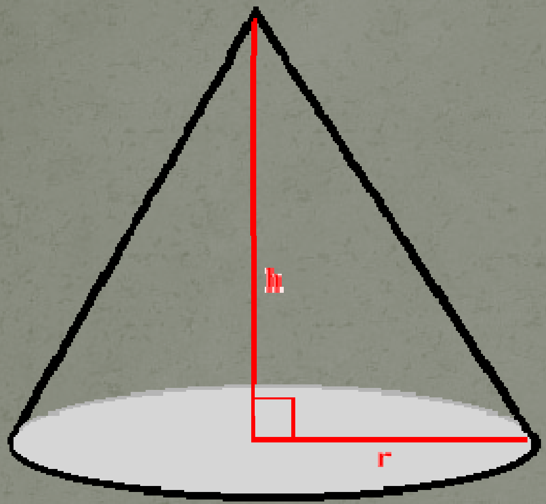
Όγκος σφαίρας



Ο όγκος της σφαίρας επίσης προκύπτει από κατάλληλο τριπλό ολοκλήρωμα (ποιο?)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Όγκος κώνου



Ο κώνος χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι (αν θεωρήσουμε ότι ξεκινάμε από τη βάση, με ύψος 0 και προχωράμε προς τη κορυφή) τότε η εγκάρσια τομή στο ύψος z είναι κύκλος ακτίνα r(h-z)/h. Έτσι ο όγκος του κώνου προκύπτει από το ολοκλήρωμα

$$V = \int_0^h \pi r^2 \frac{(h-z)^2}{h^2}\, dz = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Τι από όλα αυτά γνώριζαν οι αρχαίοι Έλληνες πριν τον Αρχιμήδη?

- Στο βιβλίο 12 των Στοιχείων του Ευκλείδη, στη πρόταση 18 (τη τελευταία του βιβλίου) ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι :

Αν S και T είναι δύο σφαιρες με ακτίνες r1 και r2 και όγκους V1 και V2 τότε

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Άρα ο όγκοςτης σφαίρας είναι ίσος με κάποια σταθερά επί το κύβο της ακτίνας. (Ποια σταθερά όμως?)

- Στο ίδιο βιβλίο ο Ευκλείδης δείχνει ότι ο όγκος του κώνου είναι το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου με το ίδιο ύψος.

- Το κάνει χρησιμοποιώντας την αρχή της εξάντλησης του Ευδόξου. Πρώτα κατασκευάζει δύο ακολουθίες πολυεδρικών στερεών εγγεγραμμένων στον κώνο και στον κύλινδρο αντίστοιχα και δείχνει ότι τα πολύεδρα ικανοποιούν την επιθυμητή σχέση.

Δος μοι πα στω και τα γαν κινάσω

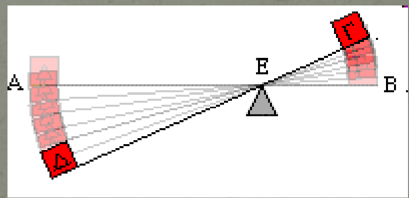
Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

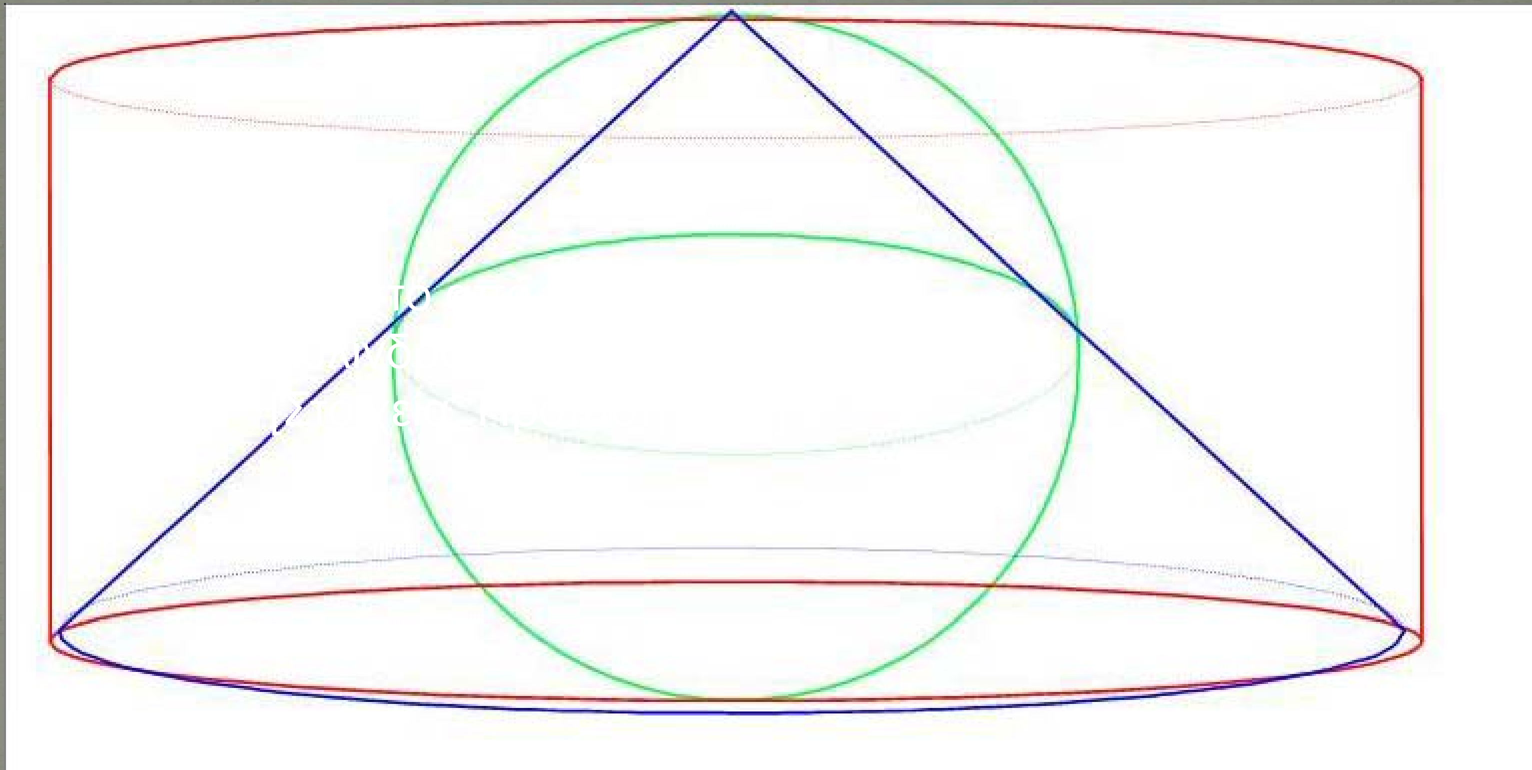
Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ

ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,
ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.

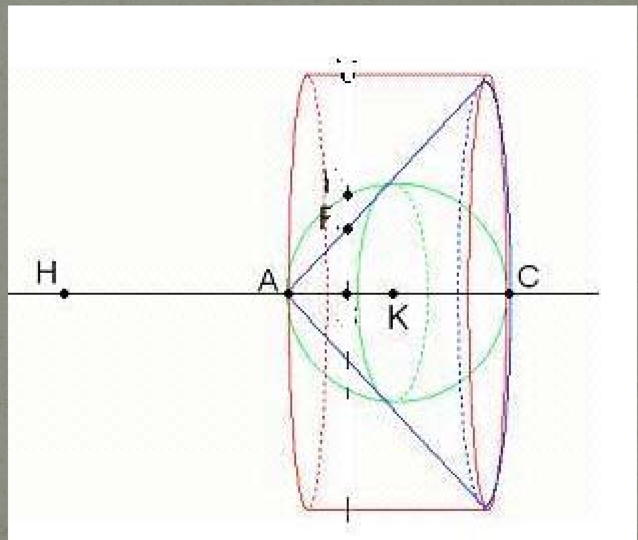


Θεωρούμε τον κύλινδρο και τον κώνο που οι βάσεις τους έχουν ακτίνα ΔΥΟ φορές την ακτίνα της σφαίρας

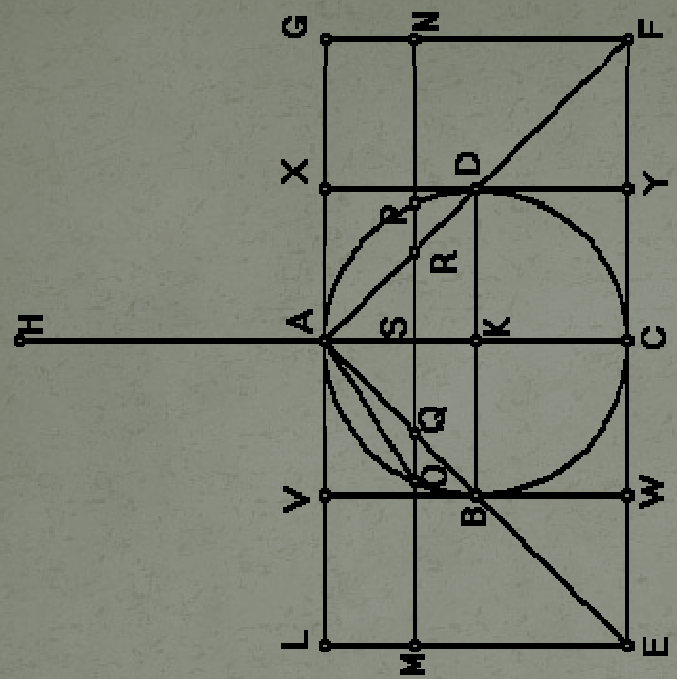


Κύλινδρος =3 κώνος [Στοιχεία, Πρόταση 13.10]

Θα ισορροπήσουμε το σύστημα σφαίρας,κώνου, κυλίνδρου ως προς Α, τη κορυφή του κώνου. Έστω ΗΑ=AC=2r



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ



Οι εγκάρσιες τομές σφαίρας, κώνου και του κυλίνδρου, είναι κύκλοι!!

Θεωρούμε την τομή MN

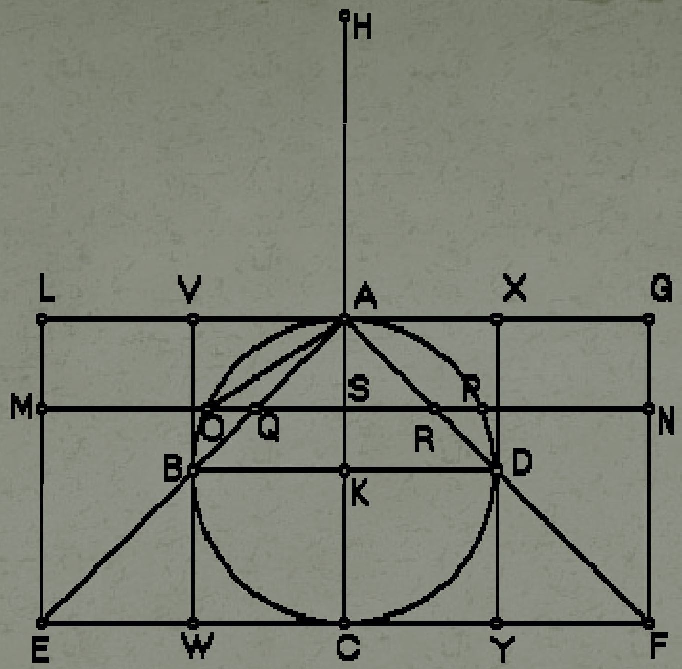
Από ιδιότητες ομοίων τριγώνων προκύπτει ότι

$$AC : AS = MN^2 : (OP^2 + QR^2)$$

Το τετράγωνο MN^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κυλίνδρου.

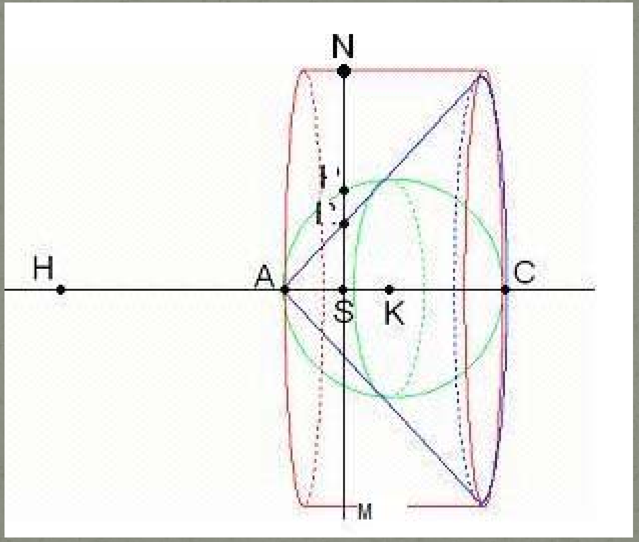
Το τετράγωνο OP^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή της σφαίρας.

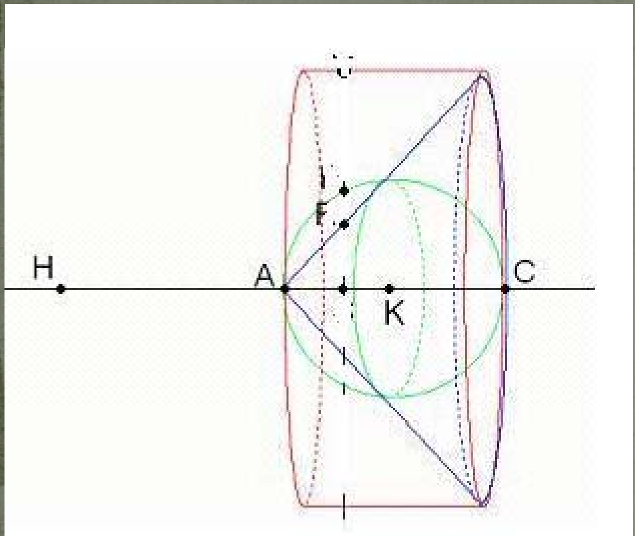
Το τετράγωνο QR^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κώνου.



Αφού HA=AC, από τη προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι
το σύστημα των εγκάρσιων τομών κυλίνδρου, σφαίρας και κώνου
ισορροπεί ως προς το A αν τις τομές της σφαίρας και του κώνου στο
H και τη τομή του κυλίνδρου στο S. Το S όμως (σε αντίθεση με το A) είναι
μεταβλητό: για κάθε τομή του κυλίνδρου είναι το κέντρο του κύκλου. Τι γίνεται
αν θεωρήσουμε τα στερεά και όχι μόνο τις τομές τους?

Συμπέρασμα: Το σύστημα ισορροπεί ως προς το Α αν θέσουμε στο Η την σφαίρα και τον κώνο και τον κύλινδρο στο Κ (αφού Κ είναι το κέντρο βάρους του).





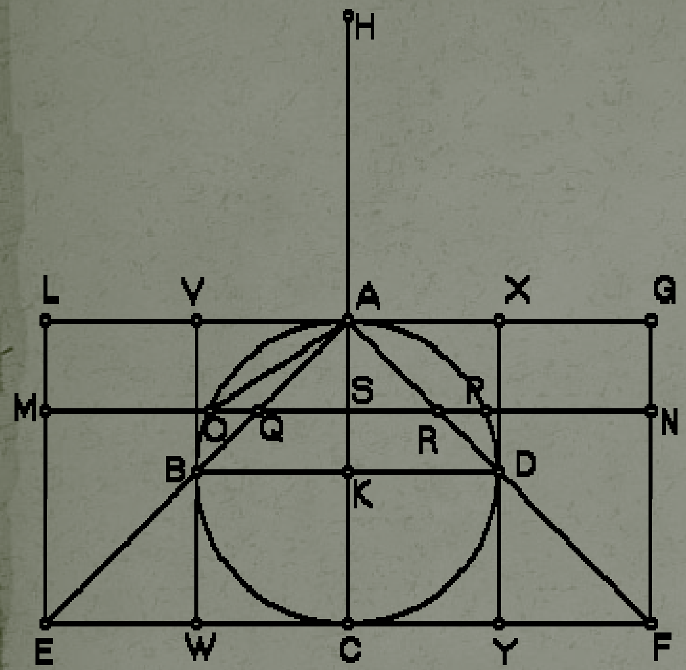
Άρα

HA: AK=κύλινδρος : σφαίρα + κώνος

Αφού HA=2 AK συμπεραίνουμε ότι

όγκος κόκκινου κυλίνδρου είναι διπλάσιος του αθροίσματος των όγκων της σφαίρας και του μπλέ κώνου).

Αφού όπως γνωρίζουμε από τον Ευκλείδη ο όγκος του κόκκινου κυλίνδρου είναι τρεις φορές ο όγκος του μπλέ κώνου, τελικά ο όγκος του μπλε κώνου είναι δύο φορές ο όγκος της σφαίρας.



Τέλος συγκρίνουμε τον όγκου του μπλέ κώνου με τον όγκο του κώνου με βάση στο BD και ύψος KA.

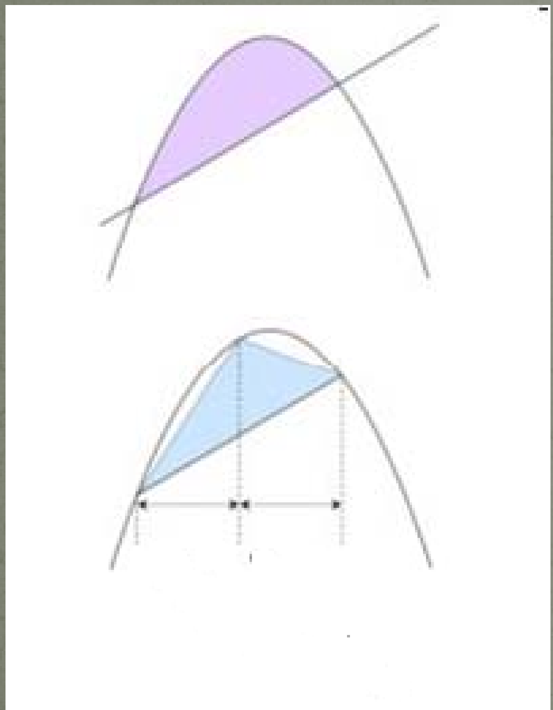
Σύμφωνα με τον Ευκλείδη (12.12) ο μπλε όγκος είναι οκταπλάσιος του μικρότερου. Άρα η σφαίρα μας έχει τετραπλάσιο όγκο από τον όγκου του μικρού κώνου.

Πάλι από τον Ευκλείδη ο όγκος του μικρού κώνου είναι το 1/3 του όγκου του αντίστοιχου κυλίνδρου, και άρα το 1/6 του όγκου του κυλίνδου που μας ενδιαφέρει.

Έτσι προκύπτει ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι 3/2 του όγκου της εγγεγραμμένης σφαίρας.

Λογισμός και Αρχιμήδης: η μέθοδος της εξάντλησης "Τετραγωνισμός παραβολής"

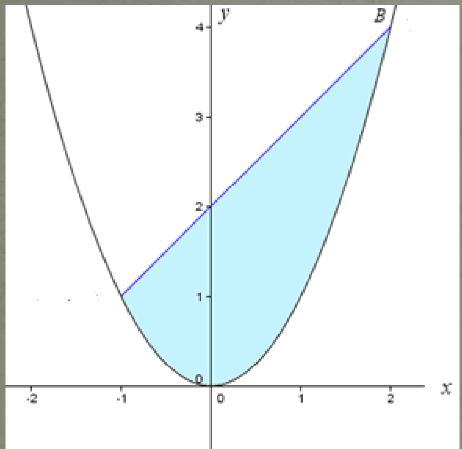
Το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του αντίστοιχου τριγώνου (προσοχή στη κατασκευή του τριγώνου)

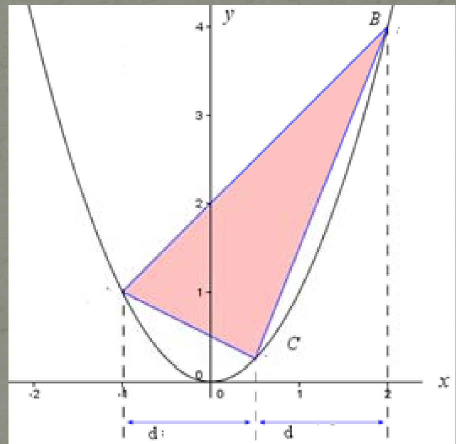


Το σημείο στη παραβολή που προσδιορίζει το τρίγωνο απέχει το μέγιστο από τη τέμνουσα, και η εφαπτομένη σε αυτό το σημείο είναι παράλληλη προς τη τέμνουσα.

Ισορροπία και εμβαδά

Το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του αντίστοιχου τριγώνου



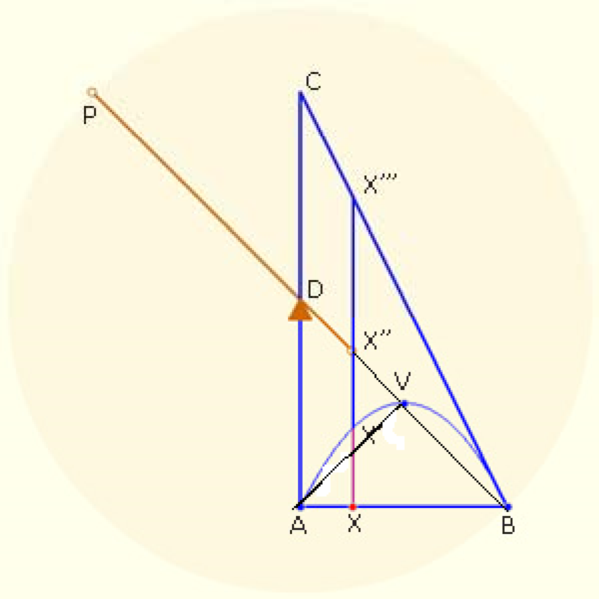


Ιδιότητα τριγώνου: τέμνουσα παράλληλη με εφαπτομένη στο C

Μία απόδειξη ήταν Γεωμετρική. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης και υπολόγισε ένα άπειρο άθροισμα (όριο σειράς).

Απόδειξη βασισμένη στην έννοια της ισορροπίας

(θέμα παρουσίασης)



BC εφαπτομένη στο B,
BD=DP
Τρίγωνο ABC = 4 τρίγωνο ABV
Ιδιότητες παραβολής

$$\frac{XX'''}{XX'} = \frac{AB}{AX} = \frac{BD}{DX''} = \frac{DP}{DX''}$$

Βασική ιδέα: παίρνουμε τομές και θεωρούμε ότι το τρίγωνο ABC και το κομμάτι ανάμεσα στη παραβολή και τέμνουσα AB αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα που θα ισορροπήσουμε ως προς D.