Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

26.03.12

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Αρχιμήδης 287 π.Χ. - 212 π.Χ.

Domenico Fetti 1620

Fields medal προτομή, κύβος+κύλινδρος

Fields medal (το Nobel των μαθηματικών): 1936, 1950 και κάθε 4 χρόνια (σε κάποιον ηλικίας < 40 ετών) (15.000 καναδέζικα δολάρια)

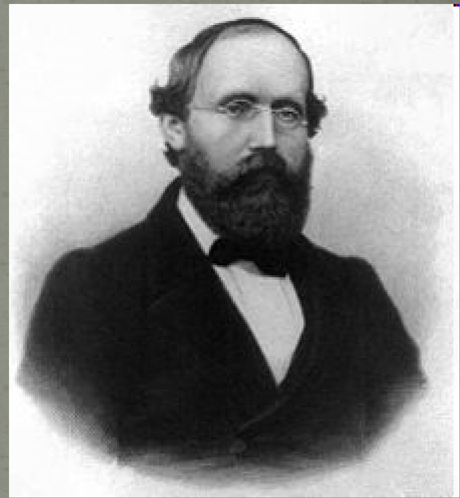
Άλλα βραβείας:

Abel prize: Νορβηγία, από το 2003, κάθε χρόνο, (περίπου 1 εκατομμύριο δολάρια)

Chern's prize: International Mathematical Union (IMU) κάθε 4 χρόνια, (250.000 αμερικάνικα δολάρια)

Παρένθεση: Το ένα εκατομμύριο δολλάρια, η συνάρτηση ζ(s) του Riemann (1826-1866) και η Κατανομή πρώτων αριθμών (1859)

Η υπόθεση του Riemann:
τα «μη τετριμμένα μηδενικά» της ζ(s) έχουν τη μορφή ½+i t όπου t πραγματικός.



$$\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\cdots$$

Όταν Re(s)>1 τότε

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prime}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \frac{1}{1-7^{-s}} \cdots \frac{1}{1-p^{-s}} \cdots$$

Και όταν 0< Re(s)<1 ισχύει

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s).$$

(τα s=-2,-4,… μηδενίζουν την ζ(s) και είναι τα τετριμμένα μηδενικά της)

Παρένθεση: το ένα εκατομμύριο δολλάρια και η εικασία του Poincaré (1904) στη Τοπολογία

Perelman (1966-) Ρωσία

2002 (η απόδειξη)
2006 (η αποδοχή)

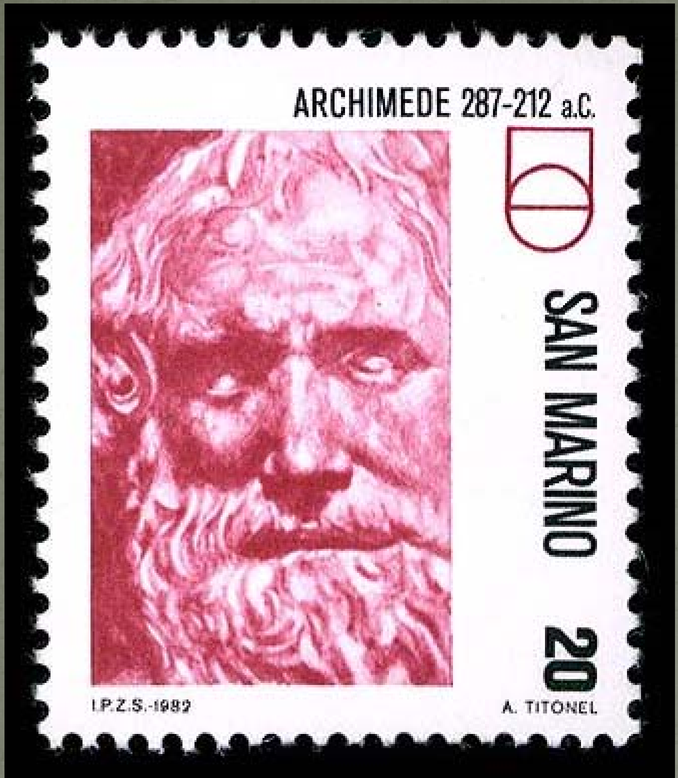
2006: Fields medal(αρνήθηκε)

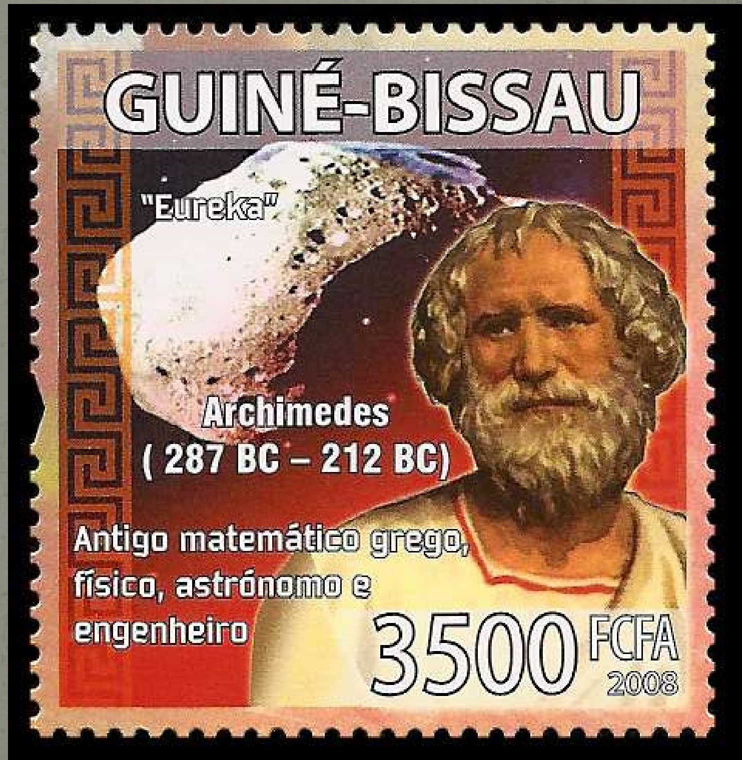
2010: βραβείο 1,000,000 $
Clay Institute (αρνήθηκε)

(Θέμα παρουσίασης)

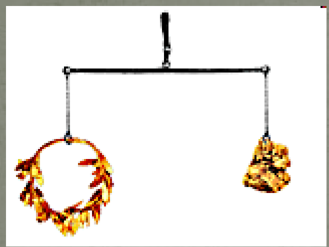
Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

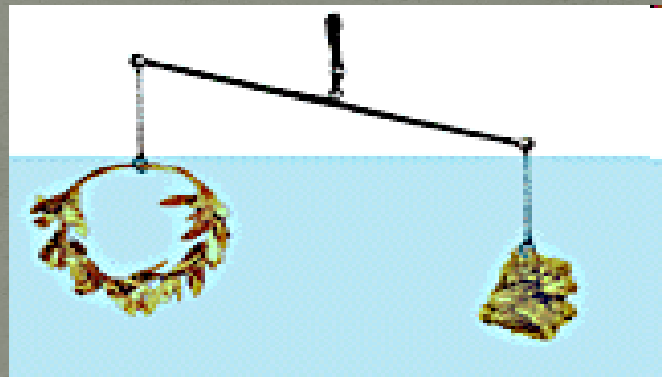

EUROPA CEPT 1983
HELLAS
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ 80


ARCHIMEDE 287-212 a.C.
SAN MARINO
20
I.P.Z.S.-1982
A. TITONEL


GUINÉ-BISSAU
"Eureka"
Archimedes
(287 BC – 212 BC)
Antigo matemático grego, físico, astrónomo e engenheiro
3500 FCFA
2008

Εύρηκα, Εύρηκα
(η ιστορία με το χρυσό και το στέμμα του Ιέρωνα)





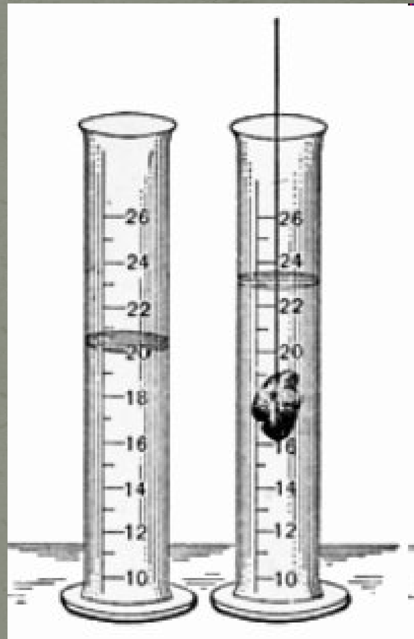
Το στέμμα έχει το σωστό βάρος: όσο το χρυσό που δόθηκε για να φτιαχτεί. Είναι όμως ολοκάθαρο χρυσό? Έχει το σωστό όγκο? Πως μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στέμματος?

Κάθε σώμα που βυθίζεται μέσα σ΄ ένα υγρό χάνει τόσο από το βάρος του, όσο το βάρος του υγρού που εκτοπίζει. (Αρχή του Αρχιμήδη στην υδροστατική)

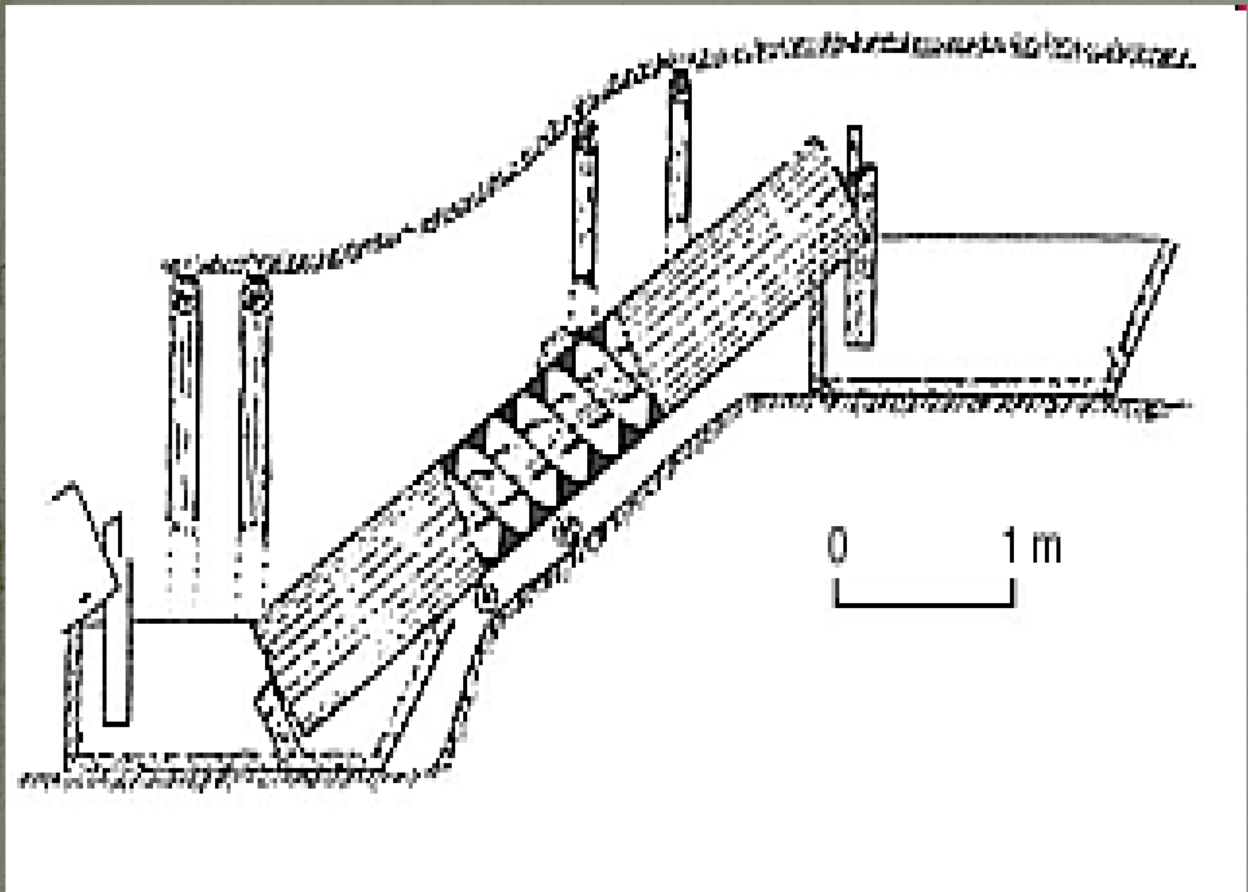
Το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται είναι ανάλογο του όγκου του.

Ο όγκος του υγρού που εκτοπίζεται είναι ίσος με τον όγκο του σώματος που είναι βυθισμένο.

Έτσι βυθίζοντας σώματα σε υγρό μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο τους.



Η έλικα του Αρχιμήδη



Για την άρδευση στην Αίγυπτο

Εφαρμοσμένη μηχανική

Άρπαγας

Κάτοπτρα του Αρχιμήδη

Giulio Parigi (1571-1635) ~1600

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

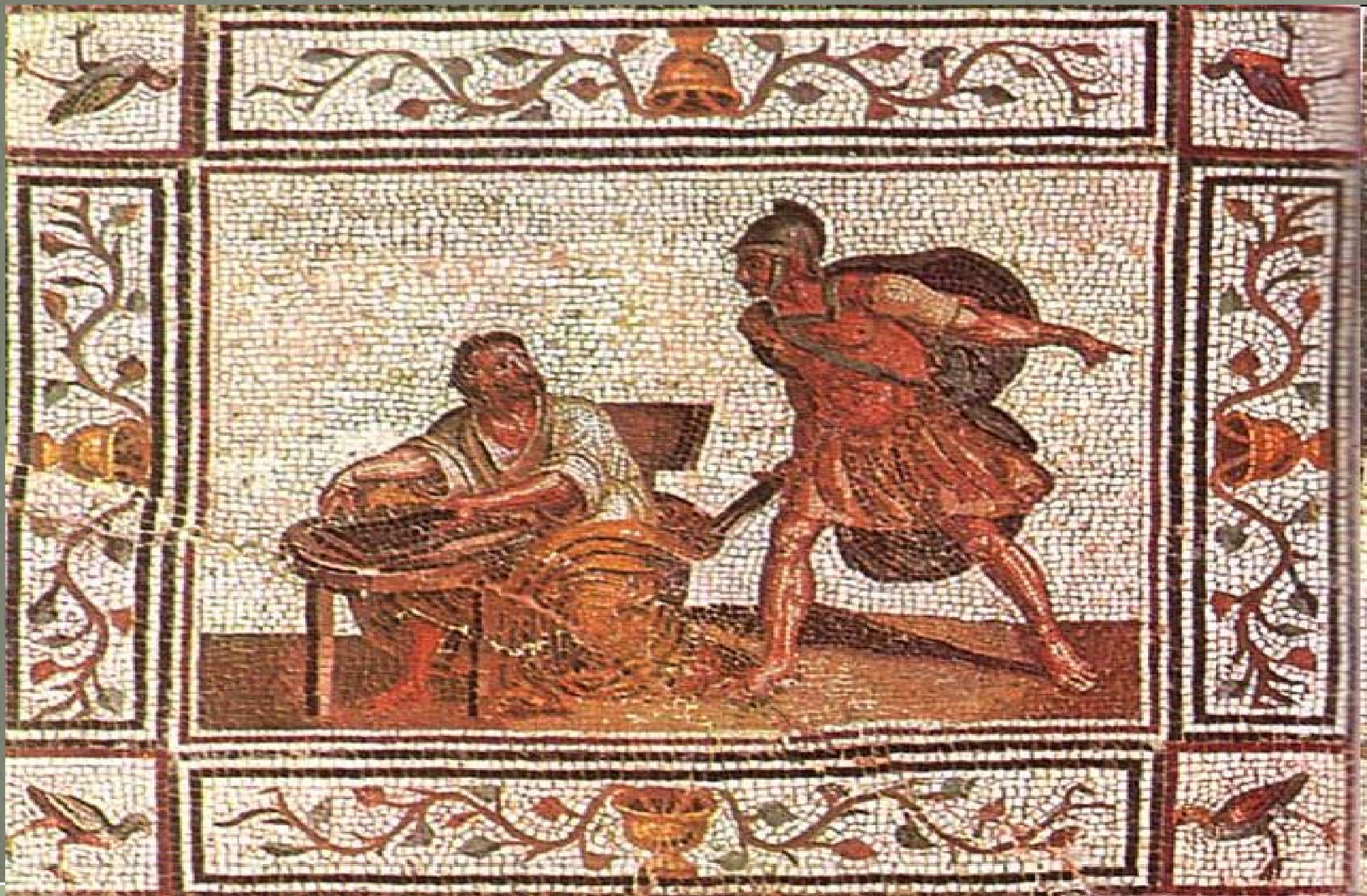
Πείραμα
 του
Σακκά
1973

(ανάφλεξη?)

Το πλανητάριο του Αρχιμήδη:
έβρισκε ταυτόχρονα την θέση ήλιου, σελήνης και 6 πλανητών
(σύμφωνα με τον Κικέρωνα, Cicero Marcus Tullius, 106-43 π.Χ)
οδοντωτός τροχός?

Μηχανισμός
Των Αντικυθήρων
(στηρίζεται στο πλανητάριο?

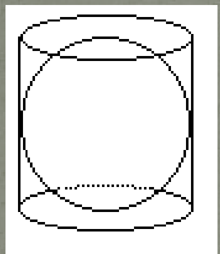
Ο Θάνατος του Αρχιμήδη
«Μη μου τους κύκλους τάραττε»



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ciceron Decouvrant le Tombeau d'Archimede,
by the French painter Pierre Henri de Valenciennes (1750-1819)

Τάφος του Αρχιμήδη: Η σφαίρα και ο κύλινδορς



Ο όγκος της σφαίρας είναι τα 2/3 του όγκου του κυλίνδρου

Πλούταρχος, Βίοι Παράλληλοι Μάρκελλος 45-120 μ.χ

Πολλῶν δὲ καὶ καλῶν εὑρετὴς γεγονὼς λέγεται τῶν φίλων δεηθῆναι καὶ τῶν συγγενῶν ὅπως αὐτοῦ μετὰ τὴν τελευτὴν ἐπιστήσωσι τῷ τάφῳ τὸν περιλαμβάνοντα τὴν σφαῖραν ἐντὸς κύλινδρον, ἐπιγράψαντες τὸν λόγον τῆς ὑπεριχῆς τοῦ περιέχοντος στερεοῦ πρὸς τὸ περιεχόμενον.

Εργα του Αρχιμήδη

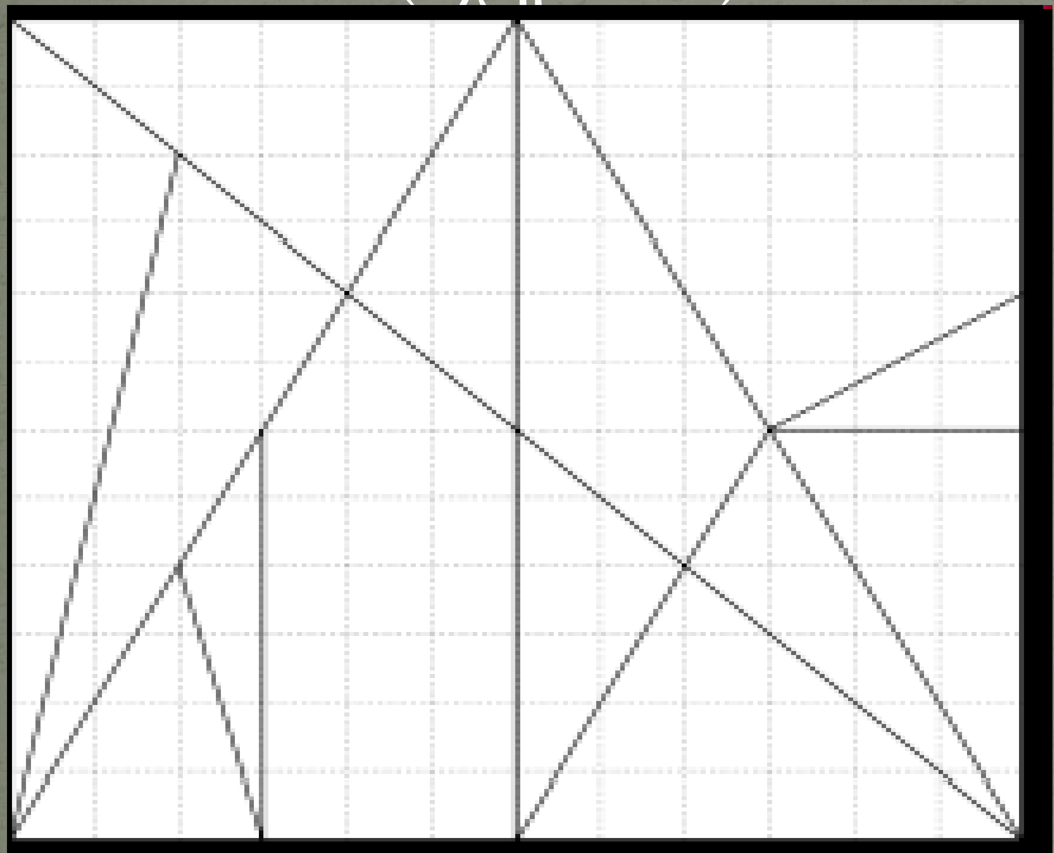
(έχουν βρεθεί)

1. "Περί σφαίρας και κυλίνδρου" Βιβλίο α' και β'
2. "Κύκλου μέτρησις" Σώζονται τρία θεωρήματα.
3. "Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων" (32 θεωρήματα, 1 πόρισμα)
4. "Περί ελίκων" (28 θεωρήματα, 6 πορίσματα)
5. "Περί επιπέδων ισορροπιών ή κέντρα βαρών επιπέδων ή Μηχανικά" Βιβλ α' και β'.
6. "Βιβλίο λημμάτων"
7. "Πρόβλημα Βοεικόν"
8. "Κατασκευή πλευράς του περιγραφομένου εις κύκλο επταγώνου"
9. "Ωρολόγιον Αρχιμήδους" (Σώζεται στα αραβικά)
10. "Περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων"
11. "Αρχαί της Γεωμετρίας"
12. «Ψαμμίτης"
13. "Τετραγωνισμός παραβολής"
14. Πρόσφατα διαβάστηκαν από το Παλίμψηστο αποσπάσματα από τα έργα που διασώθηκαν σε αυτό:
15. «Οστομάχιο»
16. «Περί μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος» (=μέθοδος)
17. «Περί των επιπλεόντων σωμάτων"
18. «Οχουμένων" (Υδροστατική επιπλεόντων σωμάτων)

Έργα του Αρχιμήδη που δεν έχουν ακόμα βρεθεί:

1. "Αριθμητικά"
2. "Βαρουλκός, Υδροσκοπίαι, Πνευματική"
3. "Επισίδια Βιβλία" (Μάλλον περί στατιστικής -Τζέτζης)
4. "Περί τριγώνων"
5. "Περί τετραπλεύρου"
6. "Περί ζευγών"
7. "Περί 13 ημικανονικών πολυέδρων"
8. "Ισοπεριμετικά"
9. "Ισορροπίαι"
10. "Καύσις δια κατόπτρων" "Περί Αρχιτεκτονικής"
11. "Περί βαρύτητος και ελαφρότητος (Πυκνόμετρα - Αραιόμετρα)
12. "Περί δρομομέτρων" (Οδόμετρα πλοίων)
13. "Περί κέντρου Βάρους ή Κεντροβαρικά"
14. "Κατοπρικά"
15. "Περί παραλλήλων γραμμών"
16. "Περί κοίλων και παραβολικών κατόπτρων"
17. "Προοπτική"
18. "Στοιχεία μηχανικών"
19. "Πλινθίδες και Κύλινδροι"
20. "Στοιχεία επί των στηρίξεων"
21. "Σφαιροποιΐα"

«Οστομάχιον»: η μάχη των οστών (σχημάτων)



Ο Ψαμμίτης ("*Άμμου Καταμέτρης*")

I. Οἴονταί τινες, βασιλεῦ Γέλων, τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει· λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ Συρακούσας τε και τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν τάν τε οἰκημέναν καὶ τὰν ἀοίκητον. Ἐντί τινες δέ,

Η αρχή

Το τέλος

ιθμῶν. Φανερὸν τοίνυν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρᾳ ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσόν ἐστιν ἢ $\overline{\text{͵α}}$ μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. Ταῦτα δέ, βασιλεῦ Γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα φανήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσιν καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθέων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἀλίου καὶ τᾶς σελήνας καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικότεσσιν πιστὰ διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι· διόπερ ᾠήθην καὶ οὐκ ἀνάρμοστον εἶμεν [ἔτι] ἐπιθεωρῆσαι ταῦτα.

Ο Ψαμμίτης (*"Άμμου Καταμέτρης"*)

- το σύνολο των στοιχειωδών σωματιδίων (πρωτονίων και ηλεκτρονίων) σε όλο το σύμπαν υπολογίζεται κάπου ανάμεσα στο 10 εις την 70 και 10 εις την 85,
- Η τελική εκτίμηση του Αρχιμήδη δίνει άνω όριο 10 εις την 64 κόκκων σε ένα σύμπαν πλήρες άμμου.

(Θεωρία του Αρίσταρχου για ένα ηλιοκεντρικό σύστημα)

$\overline{\text{͵θϡϙθ}}$ =9999

$\overset{\text{α}}{\mathrm{M}}$ =10,000 Μυριάς

$\overset{\text{͵θϡϙθ}}{\mathrm{M}}$ ͵θϡϙθ

=9,999 x 10,000+9,999=99,990,000+9,999=
99,999,999=
10 εις την ογδόη -1

Μυριάς μυριάδων

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Σύστημα αρίθμησης του Αρχιμήδη του επιτρέπει να φτάσει έως

10^{64}

Η περίμετρος της γης είναι μικρότερη των 300 μυριάδων στάδια (~$5 \cdot 10^5$ km.)

Ο ήλιος είναι μικρότερος των 30 φορές τη Σελήνη

Η γωνιακή διάμετρος του Ήλιου από τη Γη μεγαλύτερη 1/200 ορθής γωνίας

Άρα η διάμετρος του σύμπαντος (καθορίζεται από τη τροχιά της Γης γύρω από τον ήλιο) είναι το πολύ 10^{14} στάδια.

Αρκούν 10^{64} κόκκοι άμμου

Βοεικό πρόβλημα και εξίσωση Pell

Σε ένα ποίημα που αποδίδεται στον Αριστοτέλη και που εστάλη ως επιστολή στον Ερατοσθένη.

Να βρεθεί το πλήθος των βοών του (θεού) Ηλίου.

Το πρόβλημα αφορά την εύρεση του αριθμού των αγελάδων και ταυρών 8 χρωμάτων συνολικά, που ικανοποιούν γραμμικό ομογενές σύστημα με 7 εξισώσεις (8 άγνωστοι, 7 εξισώσεις) . Στη συνέχεια τίθεται το πρόβλημα να βρεθεί το πλήθος τους αν ικανοποιούν δύο πρόσθετε συνθήκες (το ένα άθροισμα να είναι τετραγωνικός αριθμός ενώ το άλλο άθροισμα να είναι τριγωνικό).

Οι 7 εξισώσεις έχουν άπειρες λύσεις: ο αριθμός των αγελάων και των βοδιών για κάθε χρώμα είναι:

10,366,482 t

7, 460,514 t

7,358,060 t

4, 149, 387 t

7, 026, 360 t

4, 893,246 t

3, 515,820 t

5, 439,213 t

όπου t φυσικός αριθμός

Οι άλλες δύο οδηγούν σε μία εξίσωση Pell:

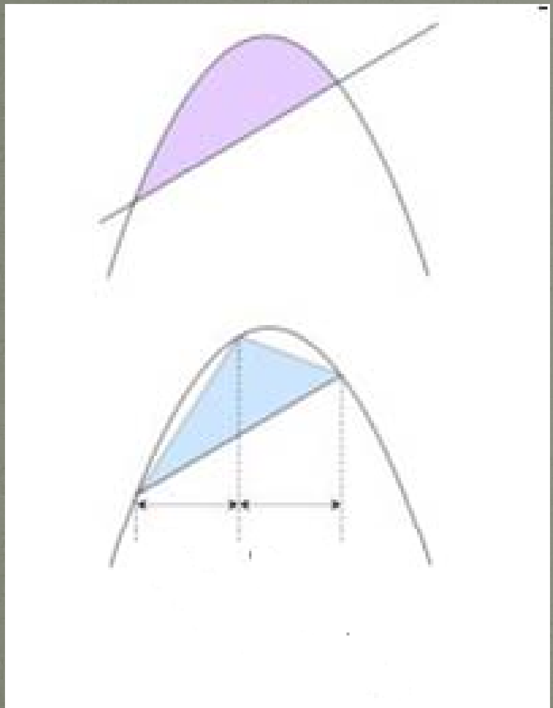
$$x^2 - 410,286,423,278,424y^2 = 1$$

Η απάντηση είναι αριθμός με περισσότερα από 200,000 ψηφία (1880 Amthor)!
Δόθηκε το 1965 με χρήση δύο υπολογιστών IBM.
(Η μέθοδος επίλυσης εξισώσεων Pell με συνεχή κλάσματα βρέθηκε από τον Lagrange το 1780).

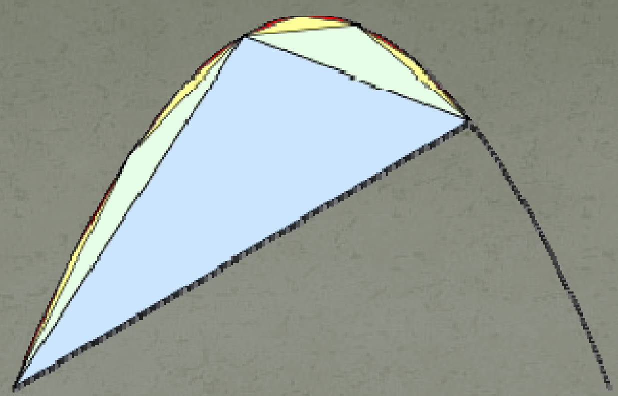
Ο Αρχιμήδης είχε χρησιμοποιήσει εξισώσεις Pell για τη προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 3. Στη Δύση εμφανίζεται και πάλι τον 16^{ο} αιώνα από τον Fermat.

Λογισμός και Αρχιμήδης: η μέθοδος της εξάντλησης "Τετραγωνισμός παραβολής"

Υπολογίζεται ότι το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα
ισούται τα 4/3 του τριγώνου με τρίτη κορυφή το μακρύτερο (από τη τέμνουσα) σημείο του παραβολικκού τμήματος.



Ο Αρχιμήδης δίνει δύο αποδείξεις:
μία βασισμένη στις αρχές της μηχανικής και
μία γεωμετρική.



Στη γεωμετρική απόδειξη ο Αρχιμήδης δείχνει ότι το εμβαδόν των πράσινων τριγώνων είναι ίσο με το 1/8 του εμβαδού του μπλε τριγώνου και ούτω καθεξής.

Ο Αρχιμήδης «γεμίζει» το χώρο ανάμεσα στη παραβολή και τέμνουσα με τρίγωνα: ξεκινά με το μπλε τρίγωνο και προσθέτει τα πράσινα. Για κάθε πράσινο προσθέτει τα αντίστοιχα νέα πράσινα, και ούτω καθεξής.

Έτσι αν Α είναι το εμβαδόν του τριγώνου, το εμβαδόν ανάμεσα στη τέμνουσα και στη παραβολή είναι:

$A,\ A + A/_4\ ,\ A + A/_4 + A/_{16}\ ,\ A + A/_4 + A/_{16} + A/_{64}\ , \ldots$

Θέλει λοιπόν να υπολογίσει το άθροισμα

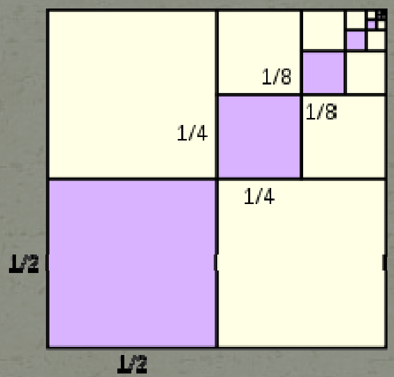
Α (1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + …)= Α 4/3

Γνωρίζουμε ότι

$$\sum 4^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Όμως οι αρχαίοι Έλληνες δεν είχαν αυτούς τους τύπους για σειρές.

Γεωμετρικά η παραπάνω σχέση προκύπτει από την εικόνα:



Το σύνολο των εμβαδών των μωβ τετραγώνων της εικόνας αντιστοιχούν στο άθροισμα 1/ 4 + 1/16 + …

Στα δεξιά και πάνω από κάθε μωβ τετράγωνα υπάρχουν άλλα δύο ίσα κίτρινα τετράγωνα. Άρα μώβ είναι το 1/ 3 του συνολικού εμβαδού.

Δος μοι πα στω και τα γαν κινάσω

Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ

ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,
ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.