# Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

26.02.14

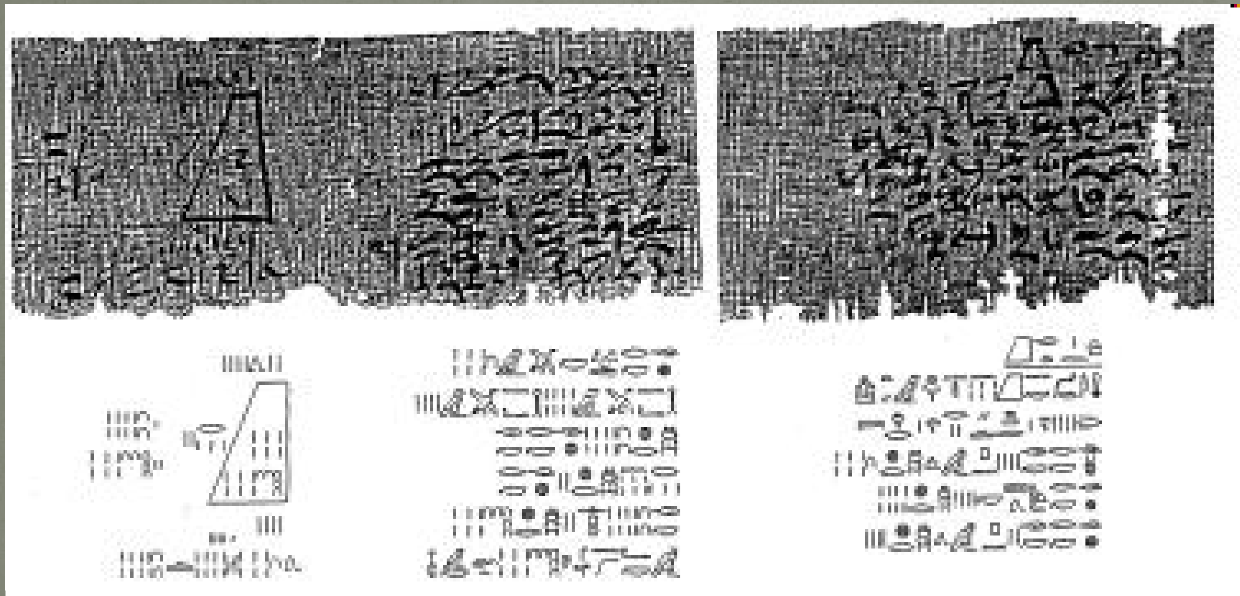
Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

# Μεσοποταμία-Αίγυπτος 3000-1000 π.Χ.


Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

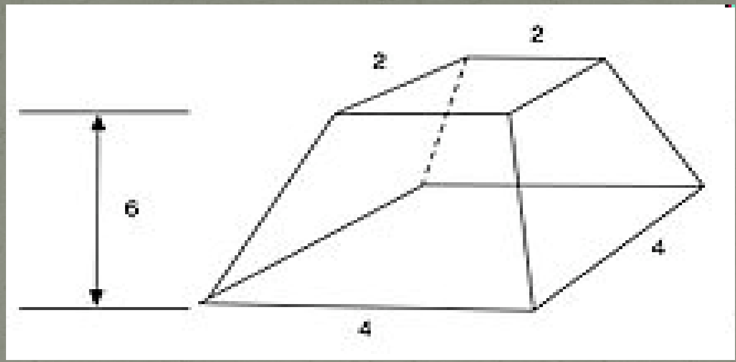
# ο πάπυρος της Μόσχας ~ 1600 π.Χ. περιέχει 25 προβλήματα. Έχει μήκος 6 μέτρα και πλάτος περίπου 5 εκατοστά.



14ο πρόβλημα

(βρίσκεται στο Μουσείο Καλών Τεχνών της Μόσχας από το 1893 μ.Χ.)

## πρόβλημα: να βρεθεί ο όγκος μίας (κομμένης) τετραγωνικής πυραμίδας




«μετάφραση των συμβόλων:
Εάν σου πουν: μία κομμένη πυραμίδα με ύψος 6, με βάση πλευρά 4 και κορυφή πλευρά 2 : πάρε το τετράγωνο του 4, βρες 16. Διπλασίασε το 4, βρες 8. Πάρε το τετράγωνο του 2, βρες 4. Πρόσθεσε το 16, το 8 και το 4, βρες 28. πάρε το 1/3 του 6, βρες 2. Διπλασίασε το 28, βρες 56. Επιβεβαίωσε ότι είναι 56. Θα βρεις ότι είναι σωστό. »

Απόδειξη: Ο όγκος της πυραμίδας με βάση εμβαδού Α ισούται και ύψος Η είναι 1/3ΑΗ. Έστω ότι η πλευρά της βάσης είναι a.

Αν το κομμάτι της αποκομμένης πυραμίδας έχει ύψος h τότε η πυραμίδα της κορυφής έχει ύψος H-h. Έστω ότι η πλευρά της βάσης της είναι b.

Από όμοια τρίγωνα προκύπτει ότι $\frac{H-h}{a}=\frac{H}{b}$

Έπεται ότι $\frac{H}{b}=\frac{h}{b-a}$

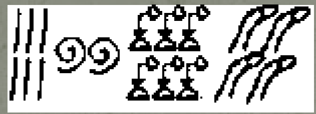
Έτσι ο όγκος της αποκομμένης πυραμίδας είναι

$$V=\frac{1}{3}b^2H-\frac{1}{3}a^2(H-h)$$

και τελικά αντικαθιστώντας

$$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2).$$

# Τα νούμερα στην ιερατική γραφή των αρχαίων Αιγυπτίων

46,206 = 

10 = 

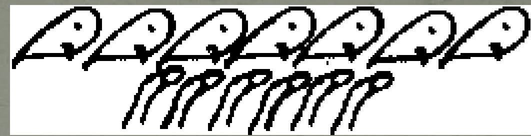
100 = 

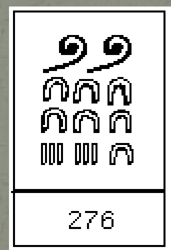
1000 = 

10,000 = 

100,000 = 

1,000,000 = 







Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

# Κλάσματα στους αρχαίους Αιγυπτίους

(παράδ. στην ιερογλυφική γραφή )

1/3

1/2+1/4

2/3

«Αιγυπτιακό κλάσμα»: άθροισμα κλασμάτων με αριθμητή 1 και με διαφορετικούς παρανομαστές.

Στον πάπυρο του Ahmes υπάρχει σειρά προβλημάτων που αφορούν το πως γράφονται οι εκφράσεις 2/n ως αιγυπτιακά κλάσματα

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

# Ο πάπυρος του Rhind---Ahmes

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

**Ο πάπυρος του Rhind /Ahmes ~1650 π.Χ. είναι κατά τον Ahmes αντιγραφή από κείμενο 200 χρόνων παλαιότερο και περιέχει 87 μαθηματικά προβλήματα. Έχει μήκος 2μέτρα, πλάτος 33 εκατοστά.**

81 από αυτά τα προβλήματα έχουν λύσεις που αναφέρονται σε κλασματικές ποσότητες

Πρόβλημα 3, π. του Rhind: «να διαιρέσεις 6 φραντζόλες σε 10 άνδρες. Απάντηση :1/2+1/10.»

Πρόβλημα 3, π. του Rhind:
να διαιρέσεις 6 φραντζόλες σε 10 άνδρες.

Απάντηση :1/2+1/10.

Με άλλα λόγια: 6/10= ½ +1/10.

Φυσική ερμηνεία: στον κάθε άνδρα δίνεις μισή φραντζόλα και 1/10. Στο τέλος θα έχεις κόψει στο
μισό τις 5 φραντζόλες και την έκτη
σε 10 κομμάτια. (Είναι πιο εύκολο στη πράξη από το 3/5?)

Ποια κλάσματα p/q (όπου p<q) γράφονται ως Αιγυπτιακά κλάσματα? (πόσους προσθετέους χρειαζόμαστε?)

Υπόδειξη:

Αν p=1, τότε ο αλγόριθμος έχει λήξει.

Διαφορετικά:

υπάρχει n έτσι ώστε $1/n < p/q < 1/(n-1)$.

Έπεται ότι $p/q-1/n > 0$. Από τη δεύτερη ανισότητα έπεται ότι ο αριθμητής του κλάσματος $pn-q/qn$ είναι μικρότερος του p. Επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο έως ότου φτάσουμε σε κλάσμα με αριθμητή 1.

- Πρόσθεση είναι εύκολη στο αιγυπτιακό σύστημα :

Προσθέτουμε τα όμοια σύμβολα και αντικαθιστούμε με κατάλληλο σύμβολο όταν ξεπεράσουμε τις δεκάδες, εκατοντάδες, κλπ.

# Πολλαπλασιασμός

Για να υπολογίσουμε a x b ξεκινάμε με την δυάδα 1 και b. Διπλασιάζουμε διαδοχικά το 1 και το b:

| | |
|---|---|
| 1 | b |
| 2 | 2b, |
| 4 | 4b, |
| 8 | 8b, |
| … | … |

κλπ έως ότου το στοιχείο της πρώτης στήλης είναι μεγαλύτερο του a. Βρίσκουμε τις δυνάμεις του 2 που αθροίζουν στο a και αθροίζουμε τα αντίστοιχα πολλαπλάσια του b.

# Παράδειγμα:

| | |
|---|---|
| 19 | x 12 |
| 1 | 12 |
| 2 | 24 |
| 4 | 48 |
| 8 | 96 |
| 16 | 192 |

19= 1+2+16      19 x 12=12+24+192=228

Εδώ καταφέραμε να γράψουμε το 19 ως άθροισμα δυνάμεων του 2. Μπορεί πάντα να γίνεται αυτό?

# (πολλαπλασιασμός στην αρχαία Αίγυπτο)

Φαίνεται ότι οι γραφείς πίστευαν ότι κάθε θετικός αριθμός γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων του 2.

Αυτό είναι όντως θεώρημα. Πως όμως αποδεικνύεται?

Όχι μόνο δεν έχει σωθεί απόδειξη για αυτό στους παπύρους αλλά ούτε καν ένδειξη το πώς το ανακάλυψαν οι Αιγύπτιοι.

Η διαίρεση είναι το αντίστροφο του πολλαπλασιασμού.

# Γραμμικές εξισώσεις και αρχαίοι Αιγύπτιοι

πρόβλημα από πάπυρο της Μόσχας:

«Βρες την τιμή που όταν την πάρουμε μία και μισή φορές και μετά προσθέσουμε το 4 βρίσκουμε 10. »

(αντίστοιχη εξίσωση $1\ \frac{1}{2}\ x+4=10$)

Περιγραφή λύσης:

«αφαίρεσε 4 από 10, βρες 6. πολλαπλασίασε με 2/3, βρες 4.»

- Πρόβλημα 26, *πάπυρος* του Rhind:

«Βρες την τιμή που όταν την προσθέσεις στο ¼ του εαυτού της το αποτέλεσμα είναι 15.»

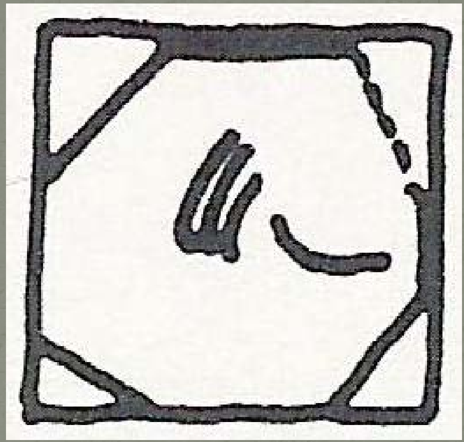
(αντίστοιχη εξίσωση x+ (1/4) * x= 15.)

Λύση:

«έστω ότι η απάντηση είναι 4. Τότε 1 και ¼ του 4 είναι 5. Πολλαπλασίασε το 5 για να βρεις 15. Η απάντηση είναι 3. Πολλαπλασίασε το 3 με το 4. Η απάντηση είναι 12.»

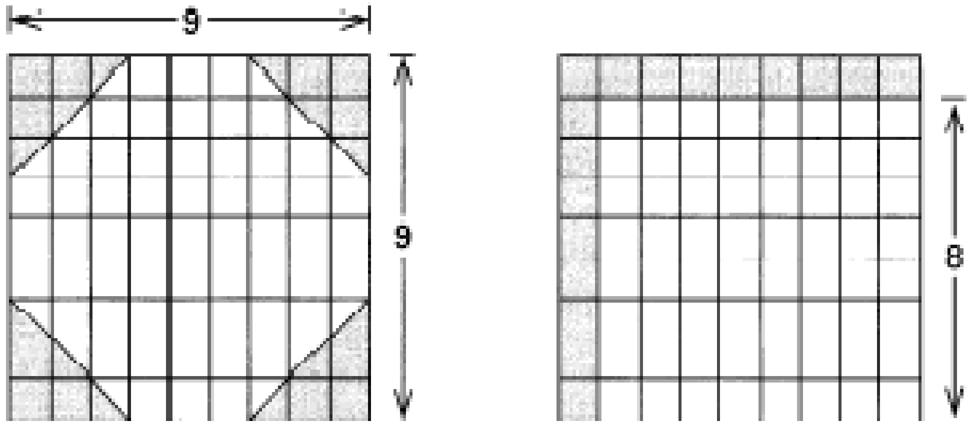
Η λύση προυποθέτει γνώση αναλογιών.

Οι Αιγύπτιοι αναγνώριζαν την σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν του κύκλου και το τετράγωνο της ακτίνας του. Θεωρούσαν ότι το εμβαδόν είναι 256/81 φορές το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου. (Έτσι έδιναν στο π τη τιμή 256/81 που είναι περίπου 3.1604). Πιθανή εξήγηση από πρόβλημα και αντίστοιχη εικόνα στον πάπυρο του Ahmes:



ο κύκλος μοιάζει με οκτάγωνο εγκλεισμένο σε τετράγωνο. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι 9, μετράμε τα τετραγωνάκια εκτός οκταγώνου. Είναι 18. Άρα στο οκτάγωνο μένουν 81-18=63 τετραγωνάκια.

**Τοποθετούμε τα τετραγωνάκια που λείπουν οριζόντια και κάθετα στις παρυφές του αρχικού τετραγώνου. Προκύπτει ένα τετράγωνο με πλευρά 8. Το τετράγωνο αυτό έχει (κατά προσέγγιση ) το εμβαδόν του αρχικού κύκλου με διάμετρο 9.**




Γενικότερα: αν ο κύκλος έχει ακτίνα r τότε το τετράγωνο που έχει (κατά προσέγγιση το ίδιο εμβαδό με τον κύκλο) έχει πλευρά

2r-2r/9. Δηλαδή η πλευρά του είναι

16r/9.

Σύμφωνα με τις οδηγίες του παπύρου για να βρει κανείς το εμβαδόν ενός κύκλου με διάμετρο d θα πρέπει να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα: από τη διάμετρο d να αφαιρέσει 1/9d και στη συνέχεια να υψώσει στο τετράγωνο:

$(8/9\ d)^2 = 64/81\ d^2 = 64/81\ (2r)^2$

$= 256/81\ r^2$

Ερωτήματα για τα μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων

- Υπήρχε διαχωρισμός ανάμεσα στις ακριβείς τιμές και στις προσεγγίσεις?

- Όλοι αυτοί οι γεωμετρικοί τύποι: πως προέκυψαν?

- Στηρίζανε οι Αιγύπτιοι τα αποτελέσματά τους σε αποδείξεις ή ήταν εμπειρικά?