Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

22.05.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Ο Argand (1768-1822) το 1814 δημοσίευσε μία απόδειξη του ΘΘΑ στην εργασία του *Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse*. Η απόδειξη του Argand βασιζόταν στην ιδέα του d'Alembert.

Μιγαδικό επίπεδο και Argand (1813)

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι το απλούστερο σύστημα που περιέχει τους πραγματικούς και μπορεί να κατασκευαστεί από αυτούς με πολύ απλό τρόπο:

C= R+R i όπου i i =-1

(δηλαδή το i είναι αλγεβρικό πάνω από το R)

Υπάρχουν άλλα τέτοια συστήματα? (Ο Gauss φαίνεται να το πίστευε: αποκαλούσε τα άλλα τέτοια συστήματα "σκιά της σκιάς") .

Η πρώτη κατασκευαστική απόδειξη βασισμένη στην απόδειξη (ύπαρξης) του Argand δόθηκε το 1940 από τον Kneser (1898-1973) (μαθητής του Hilbert).

5 ερωτήματα για πολυωνυμικές (πραγματικές) εξισώσεις.

1. Έχει κάθε πολυώνυμο ρίζα ? ΝΑΙ στο C σύμφωνα με ΘΘΑ

2. Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n?

3. Μπορούμε να καθορίσουμε πότε οι ρίζες είναι ρητές, πραγματικές, θετικές, κλπ?

4. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου και στους συντελεστές του?

5. Πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου?

2. Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n?

Ο Descartes έδειξε ότι αν a είναι ρίζα του p(x) τότε

$$p(x)=(x-a)q(x)$$

όπου βαθμός q(x) είναι βαθμός p(x) μείον 1.

Επαναλαμβάνοντας (και θεωρώντας ότι το ΘΘΑ ισχύει) προκύπτει ότι αν ο βαθμός του p(x) είναι n>0 τότε

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

3. Μπορούμε να καθορίσουμε πότε οι ρίζες είναι ρητές, πραγματικές, θετικές, κλπ?

κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μία πραγματική ρίζα. Παρόλο αποδεκτό τον 17 και 18 αιώνα αποδείχτηκε τον $19^{ο}$ αιώνα ως συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής από τον Λογισμό:

(Κάθε συνεχής συνάρτηση που είναι θετική για κάποιες τιμές και αρνητική για κάποιες άλλες πρέπει να διασχίζει τον άξονα των x και να έχει μία ρίζα.)

- Descartes: κριτήριο για το ποιοί ρητοί a/b μπορούν να είναι ρίζες ενός πολυωνύμου.
- Descartes: (χωρίς απόδειξη) άνω όριο για τον αριθμό των θετικών ριζών ενός πολυωνύμου

  όριο: μετράμε τον αριθμό των αλλαγών των προσήμων των συντελεστών από + σε – και από – σε + (ο αριθμός είναι ίσος με το όριο, ή μειωμένο κατά πολλαπλάσια του δύο)
- Descartes: (χωρίς απόδειξη) άνω όριο για τον αριθμό των αρνητικών ριζών ενός πολυωνύμου

  όριο: ο αριθμός των θετικών ριζών του f(-x)

Ερώτημα 4: Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου και στους συντελεστές του? πως προκύπτουν οι συντελεστές από τις ρίζες?

σχέση ανάμεσα στις ρίζες ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου και στους συντελεστές του πολυωνύμου: γνωστή.

αντίστοιχη σχέση για τις ρίζες και τους συντελεστές πολυωνύμων βαθμού έως και 5 από τον Viete.

Ο Newton εισήγαγε την έννοια των **συμμετρικών συναρτήσεων** που εκφράζουν αυτές τις σχέσεις ανάμεσα στις ρίζες και τους συντελεστές για πολυώνυμα βαθμού n. (Ρόλος συμμετρικών συναρτήσεων στην επίλυση με ριζικά και Θεωρία Galois).

5. Πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου?

Το επιθυμητό είναι να δοθεί η λύση με ριζικά όπως για πολυώνυμα βαθμού 2,3,4.

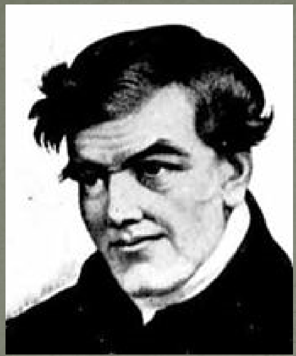
Προσπάθεια: εύρεση τέτοιας λύσης (ακριβής λύση) για πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου του 4.

Παράλληλα: όταν δεν υπάρχει ακριβής λύση γίνεται ανάπτυξη μεθόδων για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων π.χ. Newton (17^{ος} αιώνας), Horner (19^{ος} αιώνας)

- Μελέτη των λύσεων οδηγεί στην μελέτη των ιδιοτήτων διάφορων συστημάτων αριθμών (πχ σύστημα των φυσικών αριθμών, των ρητών, των μιγαδικών, κλπ)

- Newton: αρνητικοί αριθμοί «ποσότητες μικρότερες του τίποτα»
- Leibniz: μιγαδικοί αριθμοί « αμφίβια ανάμεσα στα όντα και μη όντα»

- Κανόνες όπως (-1)(-1)=1 γνωστοί από την αρχαιότητα. Όμως χωρίς δικαιολόγηση. Από πότε γίνονται δεκτοί για σύμβολα (δηλ. (-a) (-a)=a)?



(1791-1858)

Peacock: «Treatise on Algebra»(1830) και

αργότερα μετά το 1839

την «αριθμητική άλγεβρα» και στην «συμβολική άλγεβρα».

«αριθμητική άλγεβρα»: αφορά τις πράξεις σε σύμβολα που αντιπροσωπεύουν θετικούς αριθμούς και οι κανόνες τους γίνονται αυτόματα αποδεκτές, π.χ.

$a-(b-c)=a-b+c$ όταν $b > c$ και $a > b-c$

«συμβολική άλγεβρα»: πράξεις σε σύμβολα που δεν αντιπροσωπεύουν κάποιες θετικές ποσότητες, π.χ.

$a-(b-c)=a-b+c$

Euler 1707-1783

Ελβετία, Ρωσία, Γερμανία, Ρωσία

886 βιβλία και εργασίες

- **«Introduction in analysin infinitorum»** 1748

Ο Euler πήρε τον διαφορικό λογισμό του Leibniz και τη μέθοδο ρυθμών μεταβολής (fluxions) του Newton και τα έκανε μέρος ενός γενικότερου κλάδου των μαθηματικών : της «Ανάλυσης» που ασχολείται με τη μελέτη άπειρων διαδικασιών.

Σύγκριση της σημασίας της « Εισαγωγής στην ανάλυση» του Euler με

1. τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη: (συνδυασμός της γεωμετρικής δουλειάς του Ευδόξου και Θεαίτητου)

2. την «Εισαγωγή» του Viete: (συνδυασμός της αλγεβρικής δουλειάς των al Qwarismi και Cardano)

Συμβολισμοί που εισήγαγε ο Euler

- f(x) (1734)
- e (1727)
- π (1737)
- i (1777)
- Σ (1755)
- και άλλα πολλά

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$ (1748)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

φ(m) : αριθμός φυσικών αριθμών μικρότεροι του m που είναι πρώτοι προς το m

- Θεωρία Αριθμών και Euler

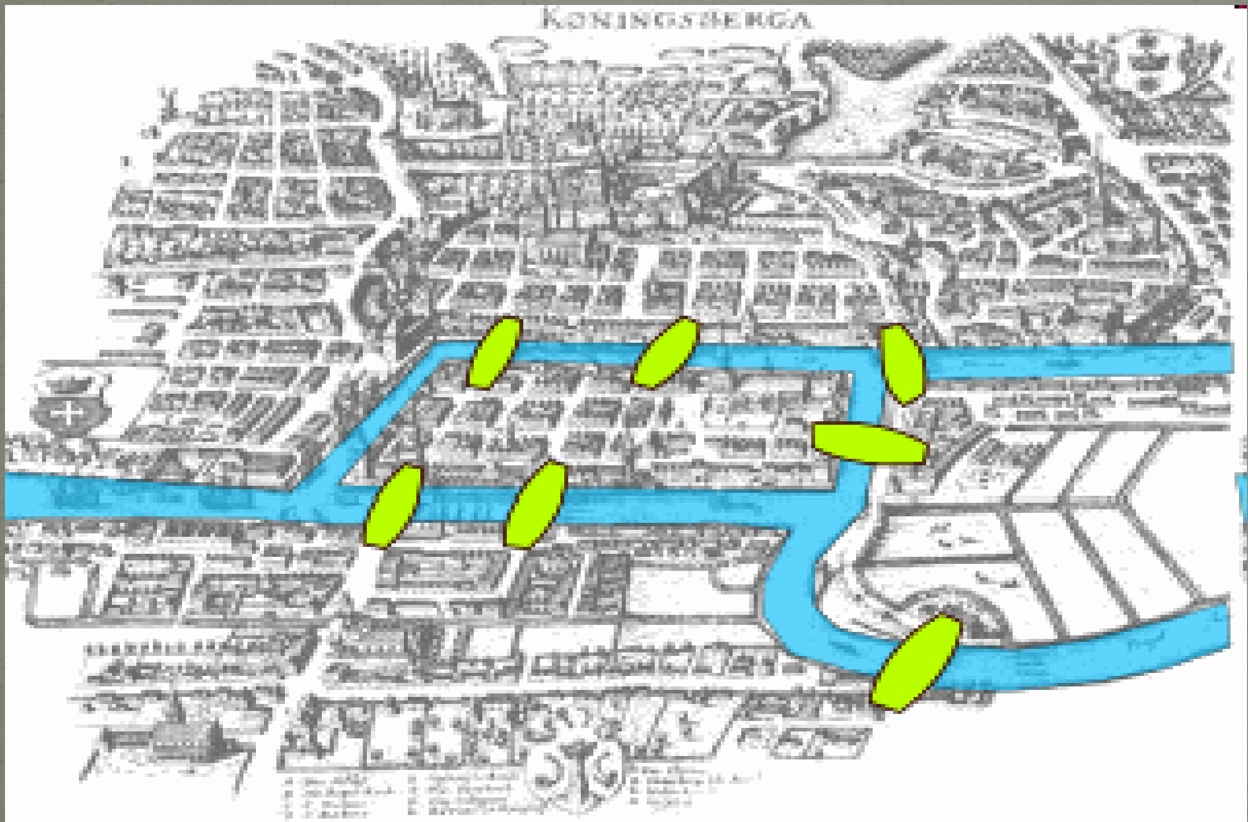
Μικρό Θεώρημα του Fermat: p πρώτος, p δεν διαιρεί το a, τότε $a^{p-1}-1$ είναι πολλαπλάσιο του p. Αντίστοιχα χωρίς περιορισμούς στο a: $a^p - a$ είναι πολλαπλάσιο του p.

Απόδειξη (Euler)

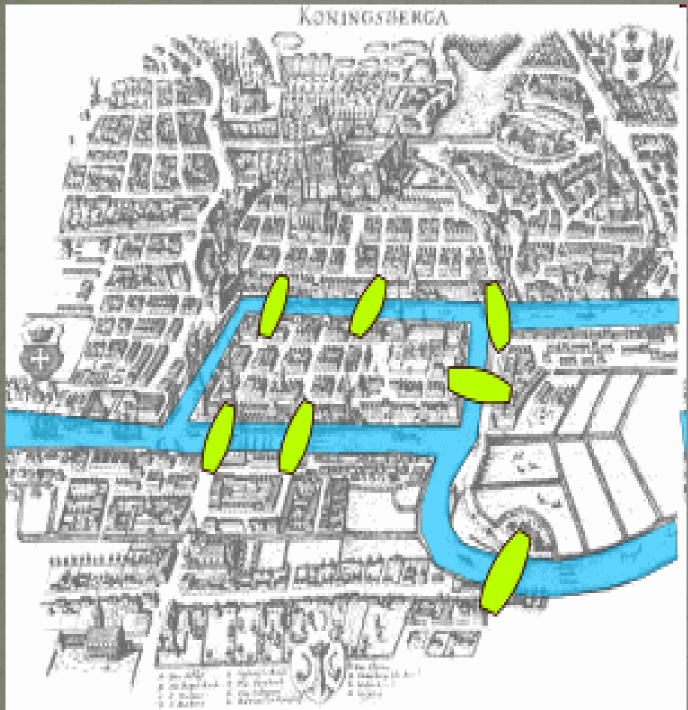
- Όταν $a = 1$, απλό.
- Έστω αληθές όταν $a = k$: $k^p - k = pt$, $t \in \mathbb{N}$.
- Έστω τώρα $a = k+1$. Τότε $(k+1)^p - (k+1) = (k^p + pm + 1) - (k+1) = (k^p - k) + pm = p(t+m)$

(Πότε καθιερώθηκε η χρήση της μαθηματικής επαγωγής? ποια είναι η σχέση της με το σύστημα των φυσικών αριθμών?)

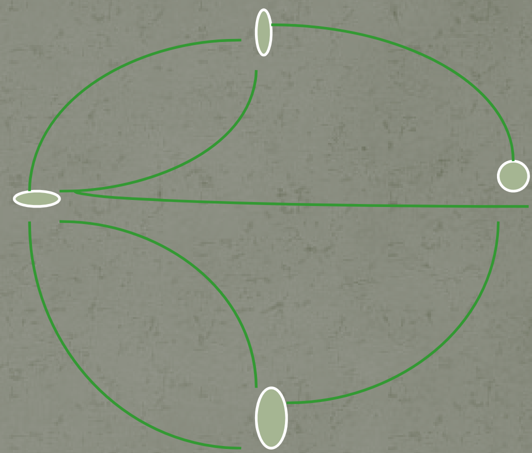
Οι 7 γέφυρες του Königsberg
(1735) η πρώτη εργασία στη θεωρία γραφημάτων/τοπολογία



Πρόβλημα:
να σχεδιάσουμε έναν περίπατο που θα περνάει από όλες τις γέφυρες μία και μόνο μία φορά



οι κορυφές του γραφήματος
είναι τα κομμάτια της γης
οι ακμές του είναι οιγέφυρες

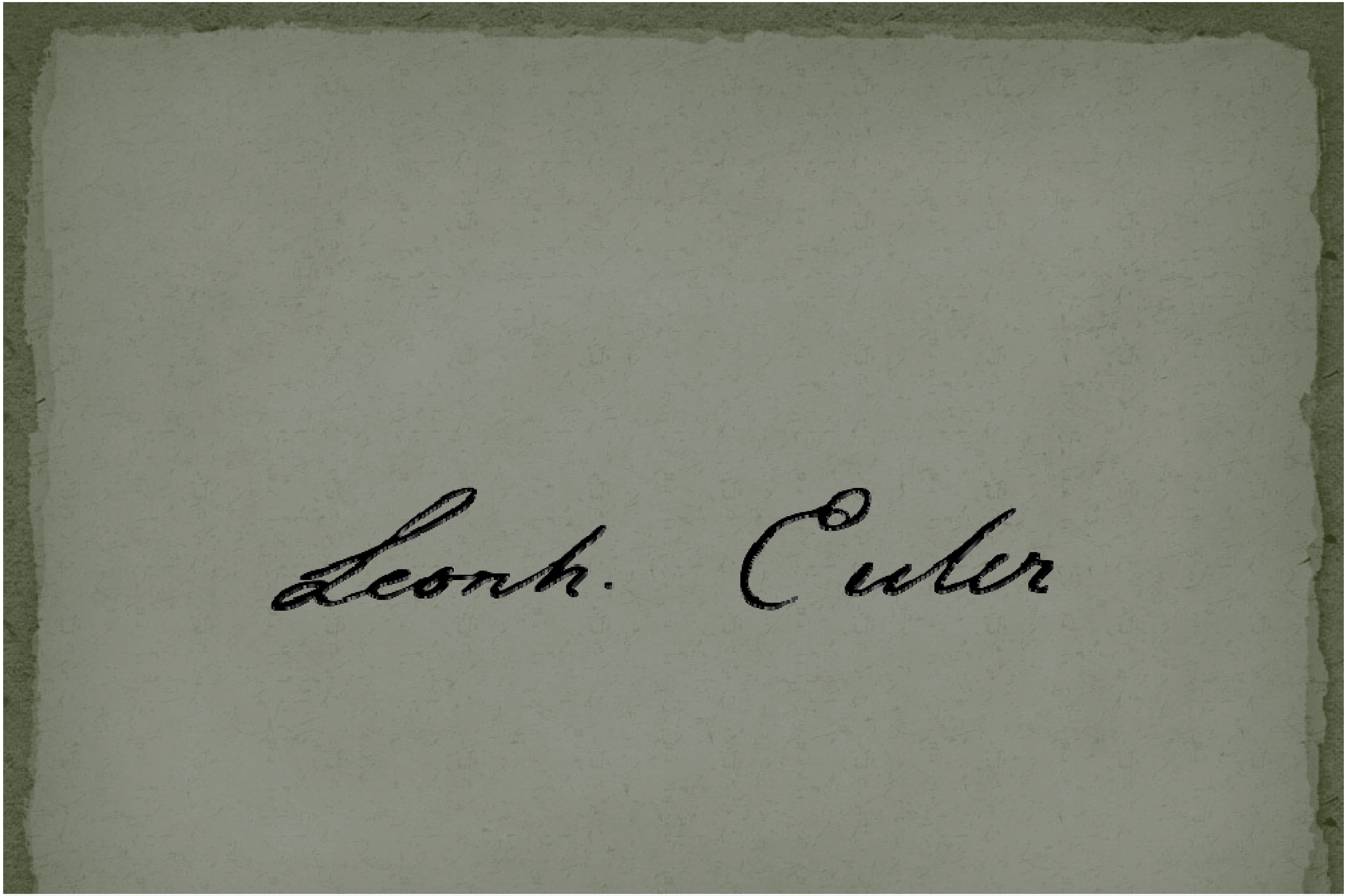


Απάντηση του Euler: δεν μπορεί να σχεδιαστεί τέτοιος περίπατος.

V-E+F=2

Η τοπολογία?? (θέμα παρουσίασης)

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ