Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

21.05.14

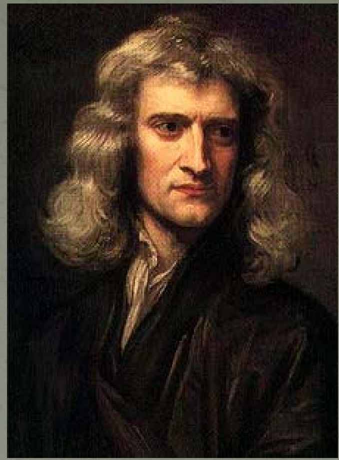
Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

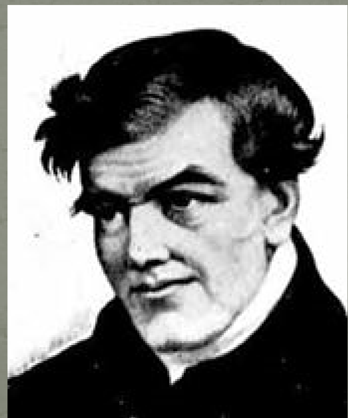
Ποια είναι η πρόοδος στην Άλγεβρα την εποχή αυτή?

Η Άλγεβρα μέχρι τώρα ασχολείται με εύρεση ριζών για πολυωνυμικές εξισώσεις.


FR. VIETE.





Χάρις στο έργα των Viete ($16^{ος}$ αιώνας) και Descartes ($17^{ος}$ αιώνας) ξεκινά η ανάπτυξη της θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων.

1. Έχει κάθε πολυώνυμο ρίζα (τι εννοούμε με αυτό? Οι ρίζες αυτές που υπάρχουν?)

2. Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n?

3. Μπορούμε να καθορίσουμε πότε οι ρίζες είναι ρητές, πραγματικές, θετικές, κλπ?

4. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου και στους συντελεστές του?

5. Πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου?

1. **Έχει κάθε πολυώνυμο ρίζα?**

Απάντηση: Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές βαθμού μεγαλύτερου του 1 έχει μία μιγαδική ρίζα.

$\Updownarrow$

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού 1 με μιγαδικούς συντελεστές.

$\Updownarrow$

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού 1 ή 2 με πραγματικούς συντελεστές.

Πως προκύπτουν οι παραπάνω συνεπαγωγές? (από πότε γνώριζαν οι Μαθηματικοί ότι τα παραπάνω είναι ισοδύναμα?)

Γιατί το Θεώρημα αυτό λέγεται Θ.Θ. Άλγεβρας? Είναι τόσο σημαντικό? Πάνω σε αυτό στηρίχτηκε η Άλγεβρα? (Σύγκριση με το Θ.Θ. Λογισμού.)

Αποδείξεις του ΘΘΑ

- 1746 D'Alembert
- 1746 Euler

ελλειπείς

- 1799 Gauss (3 άλλες αποδείξεις, τελευταία το 1849)

Σε κάθε απόδειξη χρησιμοποιείται το ακόλουθο αποτέλεσμα από την ανάλυση: κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μία πραγματική ρίζα.

Η απόδειξη του ΘΘΑ είναι απόδειξη ύπαρξης : δεν κατασκευάζεται η ρίζα αλλά αποδεικνύεται η ύπαρξή της. Αυτό τον 19^{o} αιώνα ήταν πρωτόγνωρο και τέτοιου είδους αποδείξεις ακόμα και τον 20 αιώνα ήταν αμφισβητήσιμες.

- O Girard (1595-1632) στο βιβλίο του *L'invention en algèbre* το 1629 ισχυρίστηκε ότι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού n έχουν n ρίζες. (Όμως δεν έγραψε ξεκάθαρα ότι οι ρίζες αυτές είναι μιγαδικές)

- Δύο ζητήματα:

Έχει κάθε πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές (κάπου) μία ρίζα?

Είναι οι ρίζες της εξίσωσης (αν υπάρχουν)μιγαδικοί αριθμοί?

Descartes: (1596-1650) το 1637 στο βιβλίο του *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* παρατήρησε ότι : «κάθε εξίσωση μπορεί να έχει τόσες ρίζες όσος είναι ο αριθμός των διαστάσεων της άγνωστης ποσότητας στην εξίσωση.»

Ο Leibniz το 1702 ισχυρίστηκε ότι το το πολυώνυμο

$x^4 + a^4$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο γραμμικών ή δευτεροβάθμιων όρων, (άρα το ΘΘΑ δεν ισχύει).

Γιατί όμως έκανε αυτό το λάθος ο Leibniz?
Ποια είναι αυτά τα πολυώνυμα? Δοκιμάστε να βρείτε τα πολυώνυμα όταν
a = i

- Newton: αν a+bi ρίζα του p(x) τότε a-bi ρίζα του p(x).

Ο Euler (1707-1783) σε αλληλογραφία με τους Bernoulli και Goldbach το 1742 έδειξε ότι το αντιπαράδειγμα του Leibniz ήταν λάθος.

D'Alembert (1717-1783) έκανε το 1746 τη πρώτη (σοβαρή) απόπειρα να αποδείξει του ΘΘΑ. Η απόδειξη αυτή είχε κενά—για παράδειγμα χρησιμοποίησε ένα θεώρημα σε σειρές που αποδείχτηκε το 1850 (Puiseux).

Euler επιχείρησε μία άλλη απόδειξη το 1749. (Μπορούσε να αποδείξει ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό n μικρότερο ή ίσο του 6 είχε ακριβώς n μιγαδικές ρίζες. Στη γενική περίπτωση έδωσε σκίτσο απόδειξης.

Το 1772 ο Lagrange έδειξε μία ατέλεια της απόδειξης του Euler: ότι θα μπορούσε να οδηγήσει σε κλάσμα της μορφής μηδέν/μηδέν. Διόρθωσε αυτό το σημείο.

Το 1795 ο Laplace έδωσε μία διαφορετική απόδειξη χρησιμοποιώντας τη διακρίνουσα του πολυωνύμου.

- Το πραγματικό πρόβλημα των αποδείξεων:

Υποθέτουν ότι το πολυώνυμο έχει ρίζες (κάποιας μορφής) και στη συνέχεια αποδεικνύουν ότι είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Lagrange (1736-1813)

Laplace (1749-1827)

Ο πρώτος που παρατήρησε το βασικό πρόβλημα των προηγούμενων αποδείξεων ήταν ο Gauss (1777-1855) στη διδακτορική του διατριβή το 1799. Εκεί παρουσίασε και τη πρώτη του απόδειξη που χρησιμοποιεί τοπολογικές ιδέες. Έχει και αυτή σοβαρές ελλείψεις. Άλλες δύο αποδείξεις, το 1816 (σωστή), 1849 (για τις πολ. εξισώσεις με μιγαδικούς συντελεστές) .

Ο Argand (1768-1822) το 1814 δημοσίευσε μία απόδειξη του ΘΘΑ στην εργασία του *Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse*. Η απόδειξη του Argand βασιζόταν στην ιδέα του d'Alembert.

Το 1820 ο Cauchy αφιερώνει ένα ολόκληρο κεφάλαιο από το *Cours d'analyse* για την απόδειξη του Argand χωρίς να αναφέρει τον Argand.

Τελικά ο Argand αναγνωρίστηκε όταν τον ανέφερε ο Chrystal στο βιβλίο του Algebra το 1886.

Cauchy (1789-1857)