Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

20.05.14

Χ. Χαραλάμπους

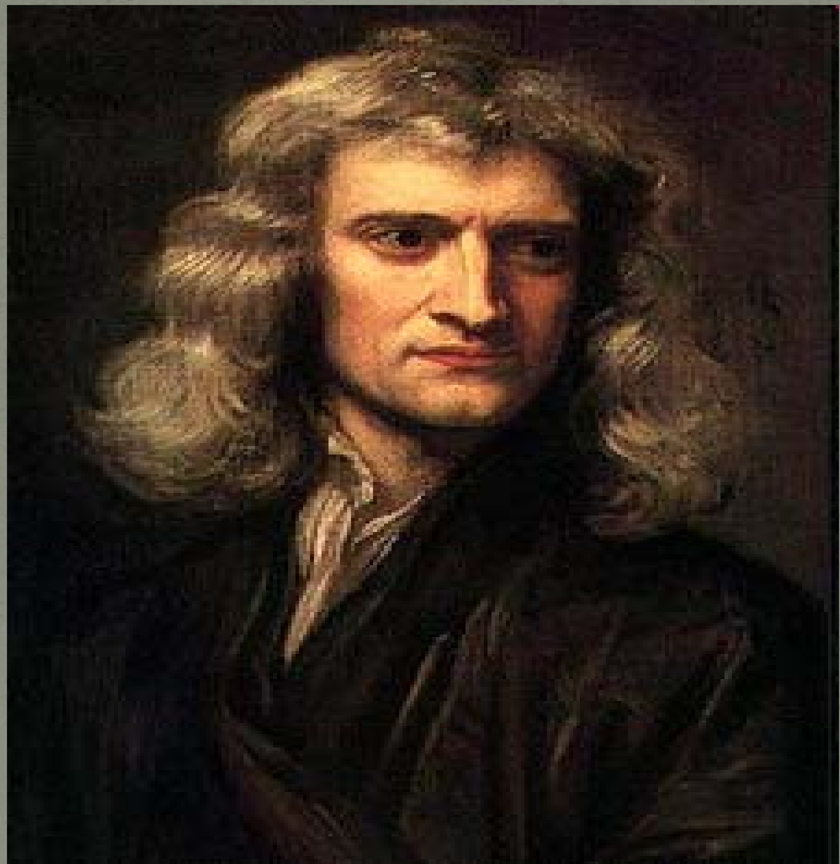
ΑΠΘ

Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού

1 Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$.

2 Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$

Newton (1642-1727) Άγγλος



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas
(Newton: 1669, δημοσιεύθηκε το 1711)

Περιεχόμενα

- Απειροσειρές

- Πρώτη περιγραφή του απειροστικού λογισμού

  Οι βασικές ιδέες του λογισμού του Newotn έχουν να κάνουν με κίνηση. Θεωρεί ότι οι ποσότητες-μεταβλητές μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο. Το fluxion μίας μεταβλητής x είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του x και συμβολίζεται με p.

  Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα o, το x μεταβάλλεται κατά op.

  Αντίστοιχα αν το fluxion του y είναι q τότε το y μεταβάλλεται κατά oq.

  Η κλίση της καμπύλης f(x,y)=0, (δηλ. η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης) είναι ίση με oq/op=q/p.

Παράδειγμα

Κλίση της καμπύλης $y^3 = x^2$.

$$(y+oq)^3 = (x+op)^2 \Rightarrow$$

$$y^3+3y^2(oq)+3y(oq)^2+(oq)^3 = x^2+2x(op)+(op)^2 \Rightarrow$$

$$y^3+3y^2oq+3yo^2q^2+o^3q^3 = x^2+2xop+o^2p^2 \Rightarrow$$

$$3y^2oq + 3yo^2q^2 + o^3q^3 = 2xop + o^2p^2 \Rightarrow$$

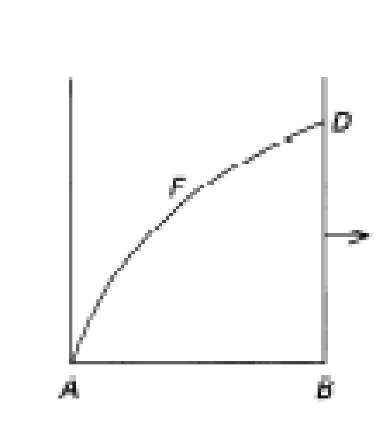
$$3y^2q + 3yoq^2 + o^2q^3 = 2xp + op^2 \Rightarrow$$

$$3y^2q = 2xp \quad \Rightarrow$$

Ιδέα του ορίου όταν ο χρόνος ο τείνει στο μηδέν.

$$\frac{q}{p} = \frac{2x}{3y^2} = \frac{2x}{3(x^{2/3})^2} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

Newton και τετραγωνισμοί: θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού



Ο Newton θεωρούσε ότι η καμπύλη AFD παράγεται από τις κινήσεις των x και y. Έτσι το εμβαδόν AFDB παράγεται από την κίνηση της κάθετης DB. Επομένως το fluxion του AFDB (δηλ. ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του AFDB) είναι ίσος με το DB επί το fluxion του x.

Θα παραστήσουμε τα fluxions με μια τελεία πάνω από το γράμμα. Έτσι αν z είναι το ζητούμενο εμβαδόν τότε $\dot{z}$ είναι το fluxion του z ενώ $\dot{x}$ είναι το fluxion του x. Ισχύει λοιπόν ότι

$$\dot{z} = y\dot{x} \Rightarrow \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y$$

(Μετάφραση: αν $A(x)$ είναι το εμαβδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ από το $x = 0$ έως το x τότε $dA/dx = f(x)$.

Αδημοσίευτη μελέτη Tractatus de methodis serierum et fluxionum (1671)

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού

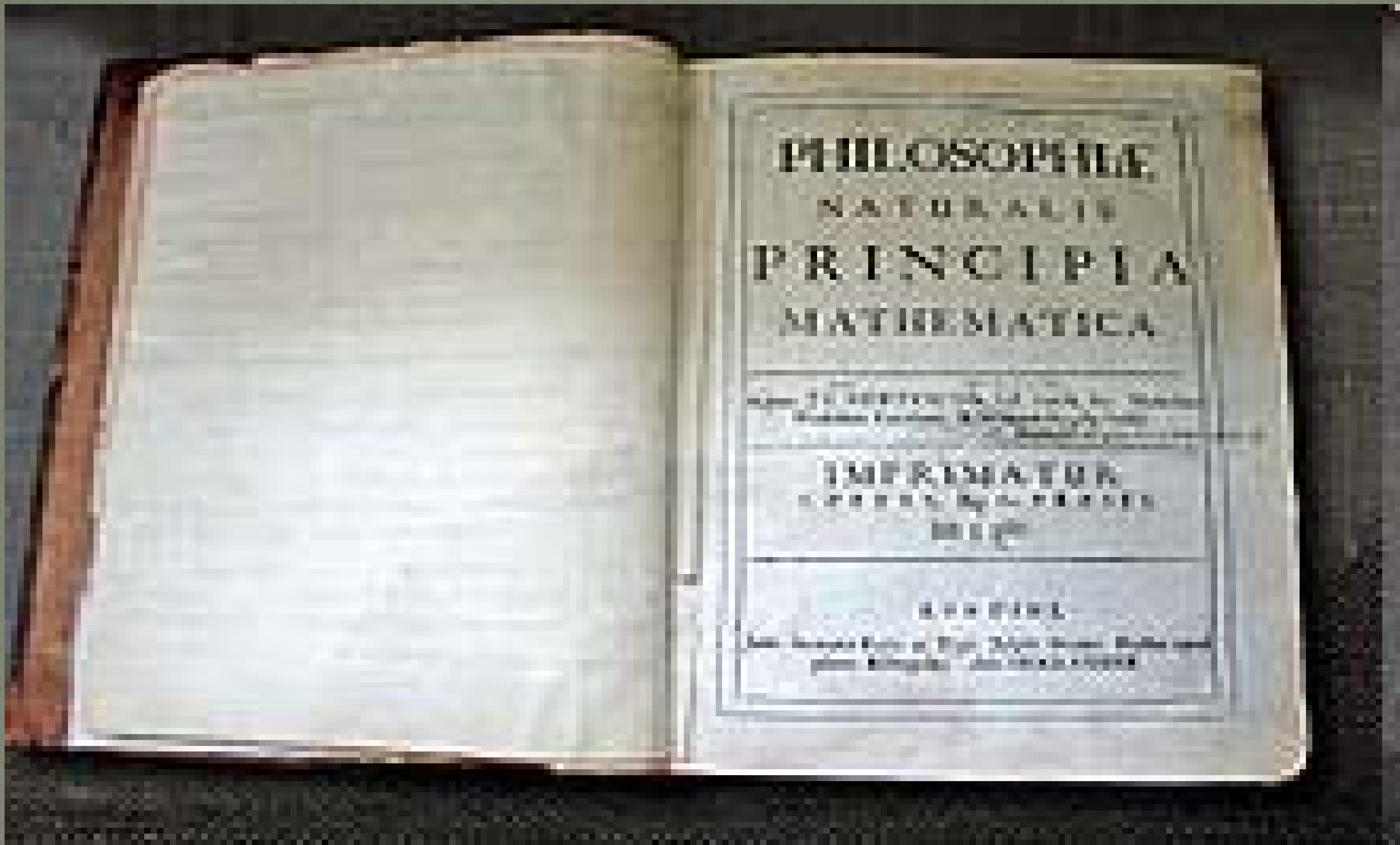
1 Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$.

2 Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$

- Ο Newton έδωσε πίνακες με ολοκληρώματα: για παράδειγμα οι πίνακες περιείχαν τα παρακάτω ολοκληρώματα των y:

$$
\begin{array}{ll}
y = \dfrac{ax^{n-1}}{(b+cx^n)^2} & z = \dfrac{(a/nb)x^n}{b+cx^n} \\
y = ax^{n-1}\sqrt{b+cx^n} & z = \dfrac{2a}{3nc}(b+cx^n)^{3/2} \\
y = ax^{2n-1}\sqrt{b+cx^n} & z = \dfrac{2a}{nc}\left(-\dfrac{2}{15}\dfrac{b}{c}+\dfrac{1}{5}x^n\right)(b+cx^n)^{3/2} \\
y = \dfrac{ax^{2n-1}}{\sqrt{b+cx^n}} & z = \dfrac{2a}{nc}\left(-\dfrac{2}{3}\dfrac{b}{c}+\dfrac{1}{3}x^n\right)\sqrt{b+cx^n}
\end{array}
$$

Επίσης περιέγραψε διάφορες τεχνικές για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.



1687 Η Principia παρουσιάζει τις βάσεις της φυσικής και της αστρονομίας στη γλώσσα της γεωμετρίας.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Αν και το βιβλίο Principia δεν είναι κατά κυριότητα ένα βιβλίο για μαθηματικά, (περισσότερο ένα βιβλίο εφαρμογής μαθηματικών), σε αυτό συναντάμε:

- Ορισμό ορίου μίας συνάρτησης (προσπάθεια)
- Αναφορές σε δυναμοσειρές
- Αλγόριθμους απειροστικού λογισμού (παράγωγο γινομένου συναρτήσεων, δύναμης και αντιστρόφου, κλπ)
- Θεωρήματα για κωνικές τομές (γεωμετρία)

Η πρώτη δημοσιευμένη εργασία του Newton για τον λογισμό όπου περιγράφει αναλυτικά το θεμελιώδες θεώρημα ήταν στην De Quadratura Curvarum, (1704), παράρτημα στο Opticks.

Η Principia περιλαμβάνει τους νόμους κίνησης και την μαθηματική απόδειξη του **Νόμου της Βαρύτητας**: *δύο σώματα έλκουν το ένα το άλλο με δύναμη που εξαρτάται από το αντίστροφο του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης*

καθώς και πολλά άλλα…(Νευτώνεια άποψη για το σύμπαν…)

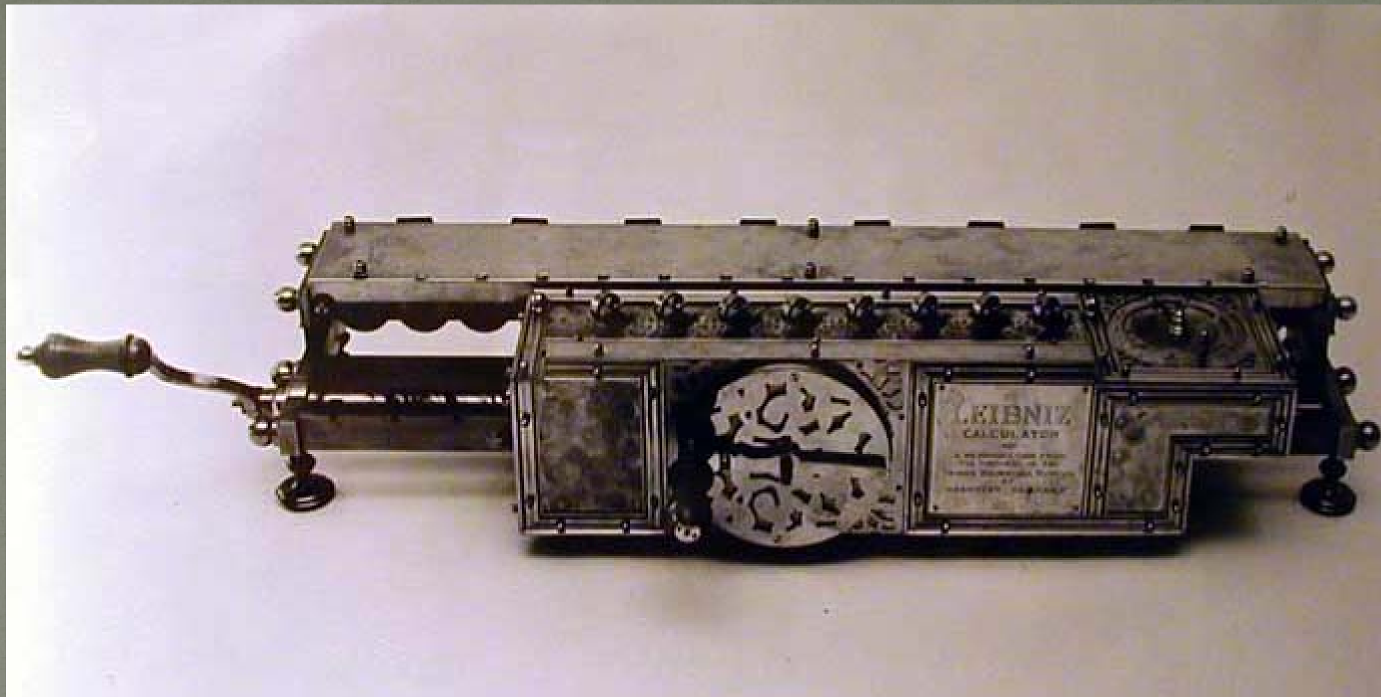
Enumeratio linearum tertii ordinis (1704) (δεύτερο μαθηματικό παράρτημα στο Opticks)

(…μέθοδο του Newton για την εύρεση προσεγγιστικά μίας λύσης εξισώσεων)

Σημαντική η διαμάχη για την πατρότητα του λογισμού (από το 1695 και για πολλά χρόνια αργότερα) που περιλάμβανε κατηγορίες εναντίον του Leibniz για λογοκλοπή. (Θλιβερό αποτέλεσμα): αποξένωση των Βρετανών μαθηματικών από τους Ευρωπαίους μαθηματικούς κατά τη διάρκεια του 18ου αιώνα.

Leibniz (1646-1716)

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ



Υπολογιστική μηχανή του Leibniz (1673)

Βασικός στόχος του Leibniz ήταν η δημιουργία ενός συστήματος συμβολισμών και ορολογίας που θα κωδικοποιούσε και θα απλοποιούσε τα βασικά στοιχεία της λογικής σκέψης.

Παρίσι (1672)

Ο Huygens του ζήτησε να υπολογίσει το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{2} + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \cdots =$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

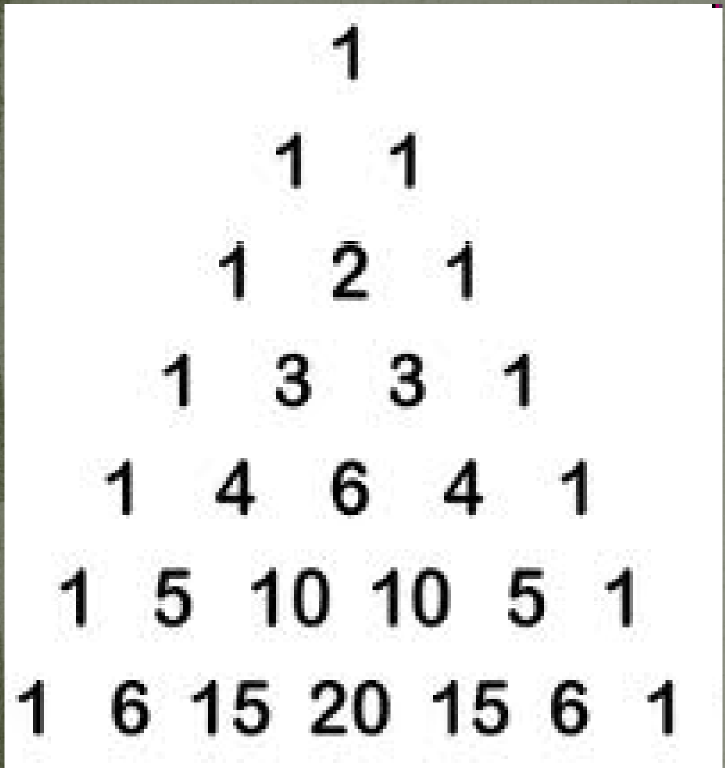
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} =$$

$$2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = 2$$

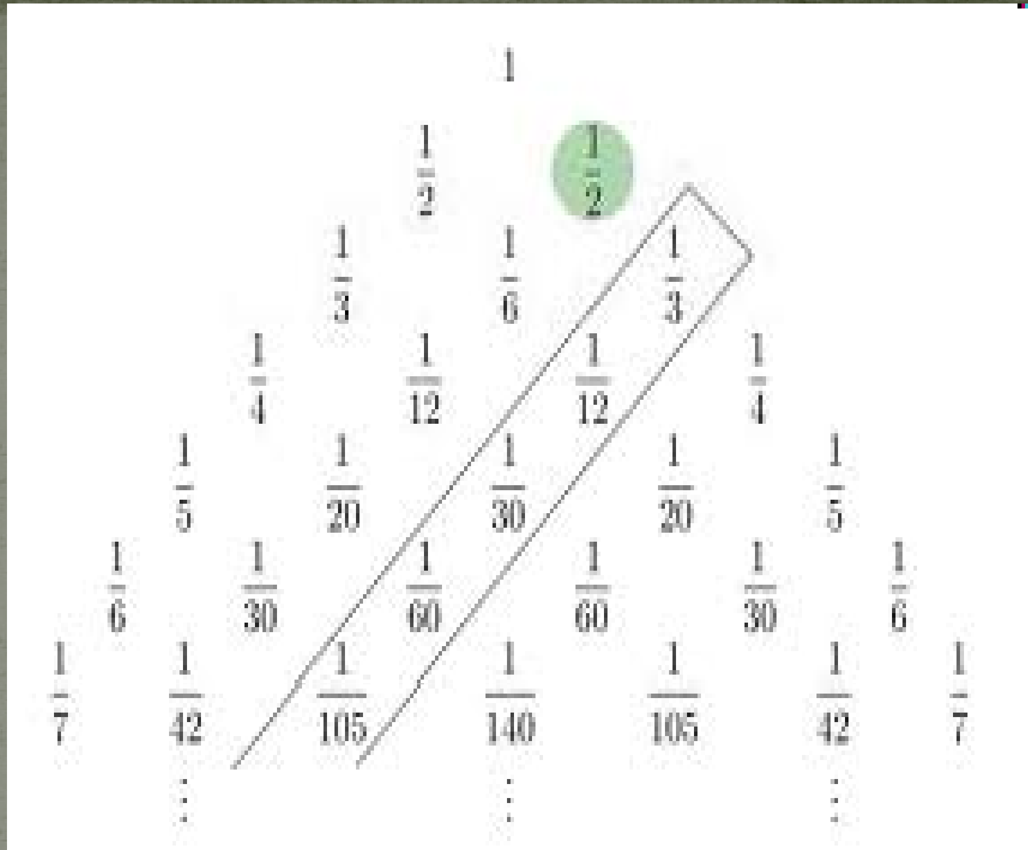
Huygens
(1629-1695)

Οι όροι αυτής της σειράς είναι οι αντίστροφοι των τριγωνικών αριθμών!

Λύση του Leibniz



Τρίγωνο του Pascal



Το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz

Πως συνδέονται τα δύο τρίγωνα?

Σημασία ενός καλού συμβολισμού (Leibniz)

Τύπος για τη παράγωγο της σύνθεσης συναρτήσεων

h(x)=f(g(x)) τότε
h΄(x)=f΄(g(x))g΄(x)

Με τον συμβολισμό των διαφορικών του Leibniz ο κανόνας προκύπτει με φυσικό τρόπο. Έστω u=g(x) και y=f(u). Τότε ο παραπάνω τύπος αντιστοιχεί στη σχέση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

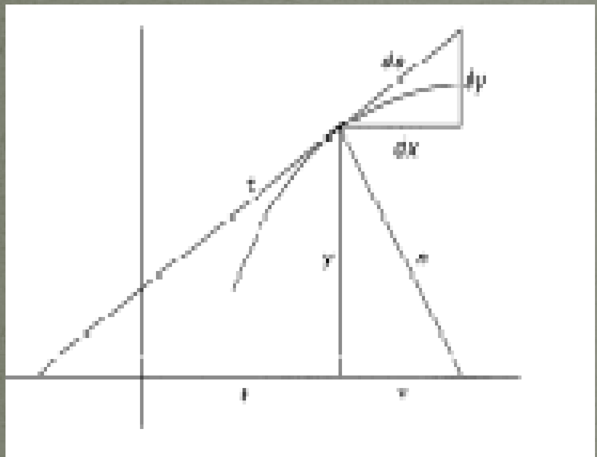
Ο τύπος τώρα είναι αναμενόμενος. Επίσης γραμμένος έτσι ενέχει υπόδειξη για την απόδειξή του.

- Ο Leibniz στις εργασίες του δίνει τύπους για τα διαφορικά γινομένων, δυνάμεων, ριζών και γεωμετρικές εφαρμογές.

- Τονίζει την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στην παραγώγιση και την ολοκήρωση στο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού.

- Η αληθοφάνεια της μεθόδου του Leibniz και η αποτελεσματικότητα του διαφορικού συμβολισμού έκαναν πιο εύκολα αποδεκτά τα διαφορικά του Leibniz από τα fluxions του Newton.

Ο Διαφορικός Λογισμός του Leibniz Acta Eruditorum (1684)



Διαφορικό τρίγωνο του Leibniz

όμοια τρίγωνα:

$y\,dy = v\,dx$

$\int y\,dy = \int v\,dx$

Παρατήρηση: το εμβαδό $\int y\,dy$ είναι γνωστό (ως προς y).
Εάν θέλουμε λοιπόν να βρούμε το εμβαδό $\int v\,dx$ θα πρέπει να βρούμε μία καμπύλη $y=f(x)$ έτσι ώστε $v = y\,dy/dx$:
Δηλαδή για να λυθεί ένα πρόβλημα τετραγωνισμού, θα πρέπει να λύσουμε ένα πρόβλημα παραγώγισης!

Παράδειγμα

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν

$$\int_0^a x^n \, dx$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Leibniz.

Θέλουμε να βρούμε την καμπύλη $y = f(x)$ (αν υπάρχει) που περνάει από την αρχή των αξόνων έτσι ώστε $\nu = x^n$. Παρατηρούμε ότι το ν προκύπτει από τη σχέση

$$\nu = y \, \frac{dy}{dx}$$

και ότι

$$\int_0^a \nu \, dx = \int_0^a x^n \, dx = \int y \, dy =$$

$$[\frac{1}{2}y^2]_0^a = \frac{1}{2}f(a)^2$$

Έστω $y = f(x) = bx^k$ για κάποια σταθερά b και κάποια δύναμη k. Τότε

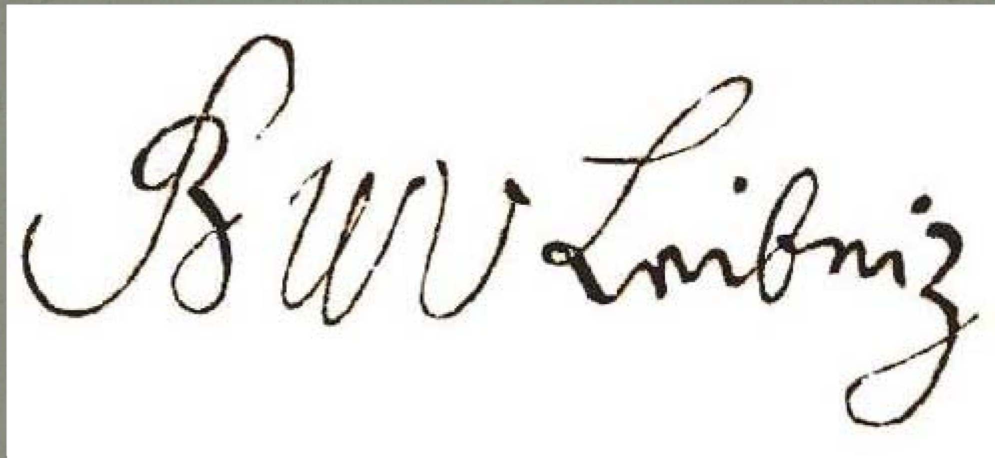
$$\nu = y\,\frac{dy}{dx} = bx^k(bkx^{k-1}) = b^2kx^{2k-1}\ .$$

Αφού $\nu = x^n$ έπεται ότι $2k-1=n$, $b^2k = 1$ και

$$k = \frac{1}{2}(n+1), \quad b = (\frac{1}{2}(n+1))^{-1/2}\ .$$

Επομένως

$$\int_0^a x^n\ dx = \frac{1}{2}(ba^k)^2 = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

- Η διαμάχη για την πατρότητα του Λογισμού.