

Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

20.03.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Πίσω στο βιβλίο 1 και στα αιτήματα

Είναι το 5^ο αίτημα όντως αίτημα και όχι πρόταση ? Η πρώτη φορά που το αίτημα χρησιμοποιείται στα Στοιχεία είναι στην απόδειξη της Πρότασης 29.

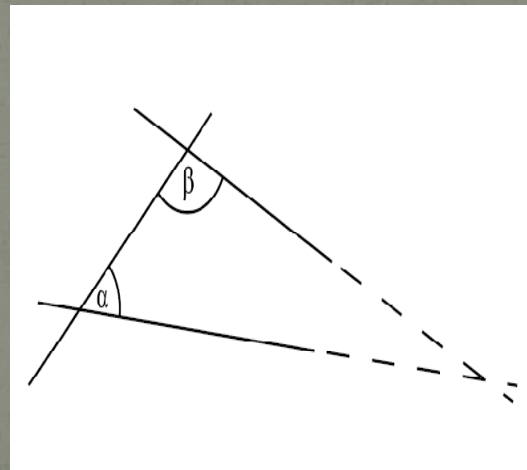
(Η Πρόταση 29 λέει όταν ευθεία τέμνει δύο παράλληλες τότε η εξωτερική και εσωτερική γωνία επί τα αυτά είναι ίσες.)

Αιτήματα (Βιβλίο 1)

- α'. Μπορούμε να ενώσουμε με ευθύγραμμο τμήμα οποιαδήποτε δύο σημεία.
- β'. Μπορούμε να επεκτείνουμε ευθύγραμμο τμήμα.
- γ'. Μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο με δοθέν κέντρο και δοθείσα ακτίνα.
- δ'. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.
- ε'. Εάν ευθεία τέμνει άλλες δύο κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι «εσωτερικές» γωνίες να δίνουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών τότε οι ευθείες τέμνονται προς αυτή τη κατεύθυνση.

Αίτημα 5

- Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος «εντός και επί τα αυτά» γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που είναι αυτές οι γωνίες.



Τι είναι ευθεία?

- το 5^ο αίτημα είναι ισοδύναμο με τα εξής:

στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλος, (αξίωμα του Playfair (Πρόκλος))

οι γωνίες σε ένα τρίγωνο έχουν άθροισμα δύο ορθές γωνίες.

(και πολλές άλλες προτάσεις που αφορούν παράλληλες ευθείες)

Από σημείο εκτός ευθείας μπορεί να κατασκευαστεί (μοναδική) παράλληλος προς δοθείσα ευθεία.

Έστω l δοθείσα ευθεία, P σημείο εκτός της l . Φέρουμε τη κάθετο προς την l από το P , έστω ευθεία l' . Στη συνέχεια φέρουμε κάθετο προς την l' που να περνάει από το P . Είναι η ζητούμενη παράλληλος (γιατί) και είναι μοναδική (γιατί).

Το πέμπτο αίτημα είναι γνωστό και ως αίτημα των παραλλήλων.

Για να αποδείξει ο Saccheri (1667-1733) το πέμπτο αίτημα εφάρμοσε τη μέθοδο της επαγωγής σε άτοπο. Δηλαδή προσπάθησε να απορρίψει τις εξής προτάσεις:

Από σημείο εκτός ευθείας δεν μπορούμε να φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία

Από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε περισσότερες από μία ευθεία παράλληλες προς την ευθεία.

Ο Saccheri είδε ότι υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στο δεύτερο και στο πέμπτο αίτημα . (Αν μία ευθεία μπορεί να επεκταθεί επάπειρο, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δε μπορεί να ξεπερνά τις δύο ορθές.)



Lambert (1728-1777 (π είναι άρρητος) 1766 (άθροισμα γωνιών τριγώνου και εμβαδού)



Legendre 1752 – 1833 (40 χρόνια σε αυτό το πρόβλημα) απέδειξε ισοδυναμία με άθροισμα γωνιών σε τρίγωνο 180)



D'Alembert (1717-1783) αποκάλεσε το ζήτημα της αποτυχημένης προσπάθειας Το σκάνδαλο των μαθηματικών! (1767)

Καινούρια γεωμετρία

Gauss (1810?), 1832 Bolyai, 1829 Lobachevsky

Υπερβολική γεωμετρία:

*Στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται
δύο ευθείες που δεν τέμνουν την αρχική*

Υπερβολική γεωμετρία:

στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δύο ευθείες που δεν τέμνουν την αρχική (δηλαδή οι δύο ευθείες είναι «παράλληλες» προς την αρχική)

Ισχύει ότι

το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών και ότι

τα όμοια τρίγωνα είναι ίσα!

Gauss (~1810, σημειώσεις που δε θέλησε να δημοσιεύσει, (1777 - 1855))



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Лobachevsky (1829, στα ρωσικά σε μικρή τοπική πανεπιστημιακή έκδοση (1792-1856))



Ξανά το 1840 πιο αναλυτικά

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Bolyai (1832 (1802-1860))



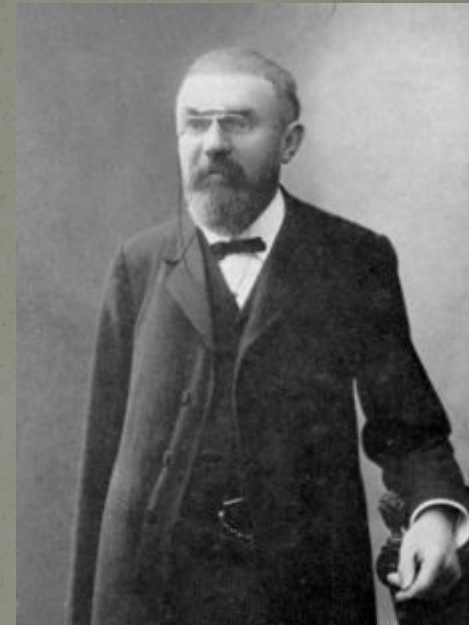
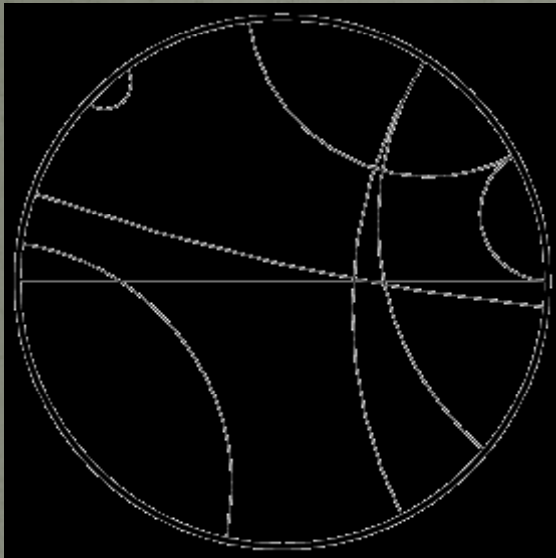
Παράρτημα σε βιβλίο του πατέρα
του

Μοντέλο του Poincare (1854-1892) για την

Υπερβολική Γεωμετρία:

Υπερβολικό επίπεδο: σημεία στο εσωτερικό κύκλου

Ευθείες στο Υπερβολικό επίπεδο: διάμετροι, και τόξα άλλων κύκλων που τέμνουν κάθετα τον αρχικό.



Παραπάνω βλέπουμε 2 ευθείες που τέμνονται και είναι «παράλληλες» προς τρίτη

Escher και το υπερβολικό επίπεδο.



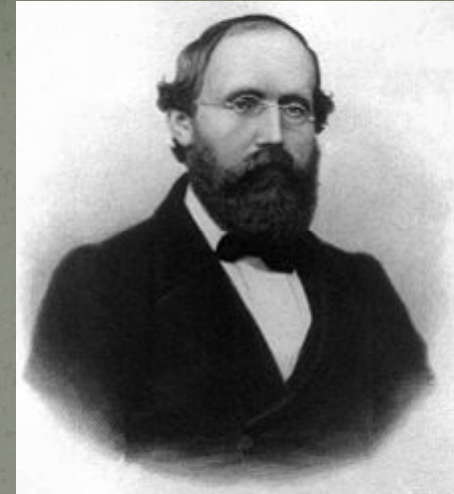
Στο έργο «Παράδεισος και Κόλαση»
(1960) Όλοι οι άγγελοι και όλοι οι
διάβολοι είναι ίσοι.

http://euler.slu.edu/escher/index.php/Hyperbolic_Geometry

Riemann (1826-1866)

Ελλειπτική γεωμετρία, (1854)

Δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.



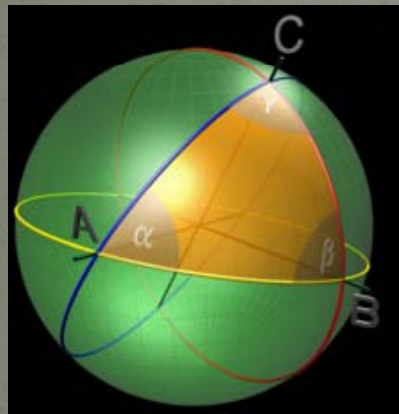
Είναι αναγκαία η τροποποίηση του δεύτερου αιτήματος, (βλ. Saccheri) ως εξής: κάθε ευθεία γραμμή έχει το ίδιο πεπερασμένο μήκος.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών

Μοντέλο Ελλειπτικής Γεωμετρίας (Klein 1849-1925)



Η επιφάνεια μίας σφαίρας:



τα αντιδιαμετρικά σημεία
ταυτίζονται και αντιστοιχούν σε
ένα ελλειπτικό σημείο

ευθείες είναι οι «μέγιστοι κύκλοι»
της σφαίρας (που έχουν ακτίνα
όσο η ακτίνα της σφαίρας)

David Hilbert: 1862-1943 Γερμανία



Στη Θεωρία των αναλλοίωτων ο Hilbert το 1888 έδωσε μη κατασκευαστική απόδειξη για την ύπαρξη πεπερασμένου συνόλου γεννητόρων

Για αυτήν την απόδειξη ο Gordan είπε: «*Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie*». (απορρίπτοντας την πρώτη φορά την εργασία στο Math. Annalen)

Η συλλογή **23 προβλημάτων που παρουσίασε το 1900** στο διεθνές συνέδριο σο Παρίσι (υπόθεση του Riemann, Goldbach) σημάδεψε την εξέλιξη των Μαθηματικών. Δούλεψε στο Πανεπιστήμιο του **Göttingen** από το 1895. Επέβλεψε 69 Ph.D., (ανάμεσα σε αυτούς F. Bernstein, H. Weyl, R. Courant, E. Hecke) και επηρέασε πλήθος άλλων όπως E. Zermelo, J.von Neumann, E. Noether.

Χαρά Χαραλάμης
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Συλλογή **23 προβλημάτων το 1900** στο διεθνές συνέδριο σο Παρίσι (υπόθεση του Riemann, Goldbach) Πανεπιστήμιο του **Göttingen** από το 1895

69 Ph.D., ([Felix Bernstein](#), [Hermann Weyl](#))

Μελετώντας τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη πιο προσεκτικά, βλέπει κανείς ότι υπάρχουν κάποια κενά και ελλείψεις (χρειάζονται και άλλοι ορισμοί και αξιώματα.)

ενδεικτικά

πρόταση 1, βιβλίο 1: Για τη κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου. Γιατί οι δύο κύκλοι τέμνονται?

Πολλές αποδείξεις βασίζονται στη διαίσθηση ή στο σχήμα. Αυτό έγινε περισσότερο αντιληπτό με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Πλήρης αξιωματοποίηση της Ευκλείδειας γεωμετρίας επιχειρήθηκε από τον **Hilbert** το 1899 στο βιβλίο του *Grundlagen der Geometrie* (βάσεις της Γεωμετρίας).

Πρότεινε 21 αξιώματα: αξιώματα σχέσεων, διάταξης, ισότητας, συνέχειας και το αξίωμα των παραλλήλων.

Άφησε τις έννοιες του σημείου, ευθείας, επίπεδο χωρίς να τις ορίσει. Καθόρισε όμως τις μεταξύ τους σχέσεις. Συνολικά χρησιμοποίησε 9 «πρωταρχικές έννοιες» από τις οποίες 6 οι βασικές σχέσεις (όπως ανήκει και ισότητα) .

Το 1902 αποδείχτηκε ότι ένα από τα 21 αξιώματα ήταν περιττό.

1920: πρόγραμμα του Hilbert = «μεταμαθηματικά». Ήθελε να δείξει ότι

1. Όλα τα μαθηματικά παράγονται από ένα σωστά διαλεγμένο πεπερασμένο σύνολο αξιωμάτων και
2. Ένα τέτοιο σύνολο αξιωμάτων μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι συνεπές

όμως

το 1931 ο Godel με το Θεώρημα της μη πληρότητας απέδειξε ότι είναι αδύνατο να αποδειχθεί η συνέπεια ή ασυνέπεια.

