Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

1.04.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Δος μοι πα στω και τα γαν κινάσω

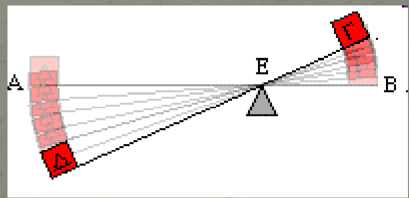
Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

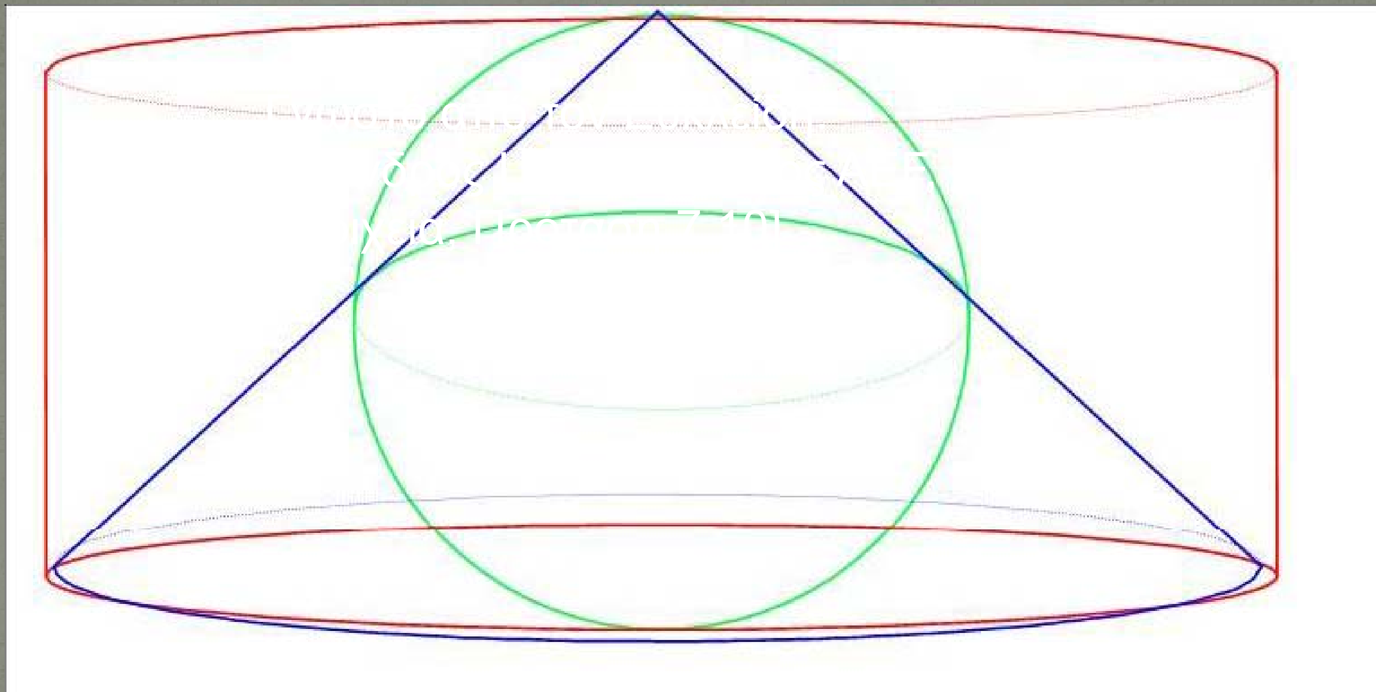
Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ

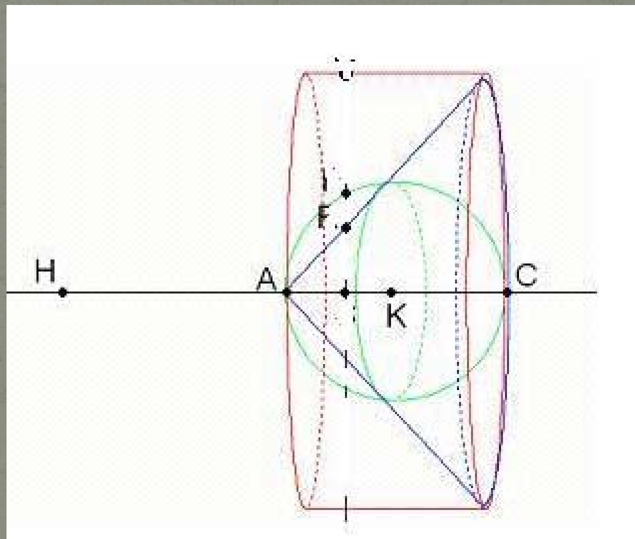
ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,
ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.

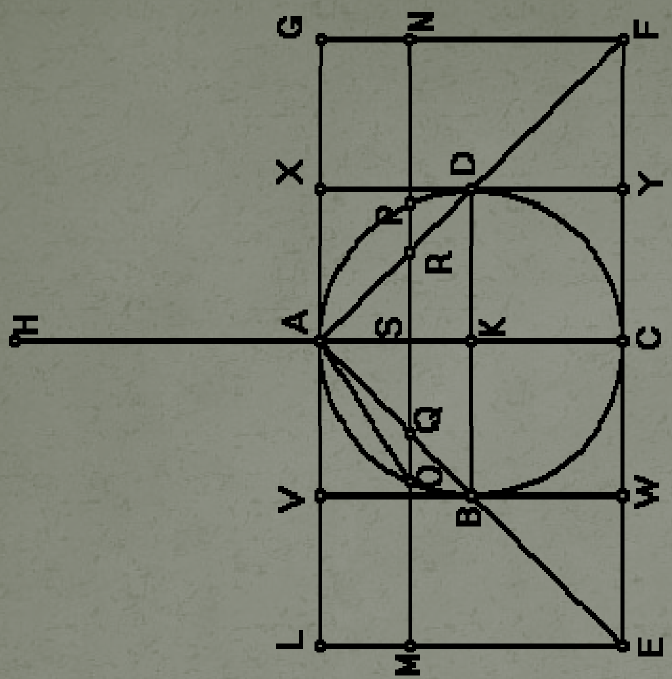


Θα ισορροπήσουμε το σύστημα της σφαίρας, του κώνου και του κυλίνδρου που έχουν το ίδιο ύψος με της σφαίρα, αλλά με ακτίνα βάσης ΔΥΟ φορές την ακτίνα της σφαίρας. Αφού ο κύλινδρος είναι ο πιο ογκώδης από τους άλλους δύο, θα πρέπει να τοποθετήσουμε μαζί σφαίρα και κώνο από τη μεριά και τον κύλινδρο από την άλλη.



Επιλέγουμε ως A το σημείο που θα καθορίσει την ισορροπία. C είναι το σημείο έτσι ώστε AC=2r, όπου r η ακτίνα της σφαίρας. Θέτουμε H το σημείο που είναι αντιδιαμετρικά αντίθετο από το C





Οι εγκάρσιες τομές σφαίρας, κώνου και του κυλίνδρου, είναι κύκλοι!!

Θεωρούμε την τομή MN

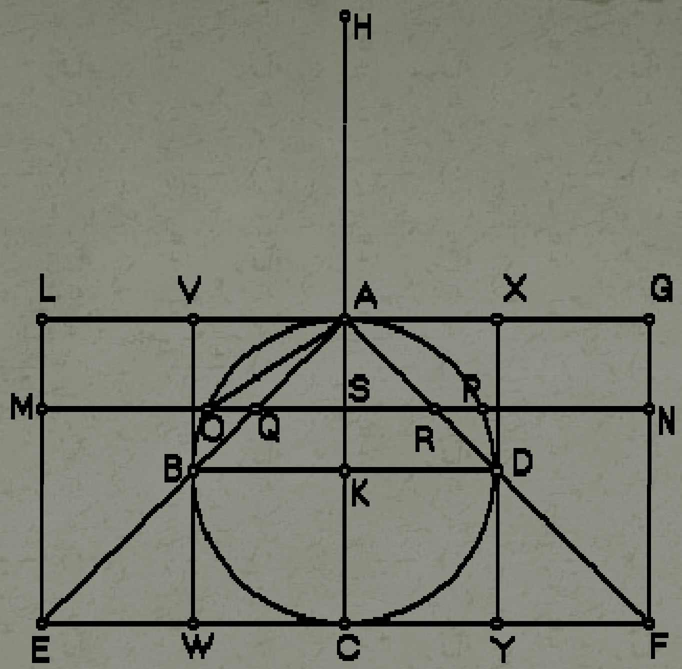
Από ιδιότητες ομοίων τριγώνων προκύπτει ότι

$$AC : AS = MN^2 : (OP^2 + QR^2)$$

Το τετράγωνο MN^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κυλίνδρου.

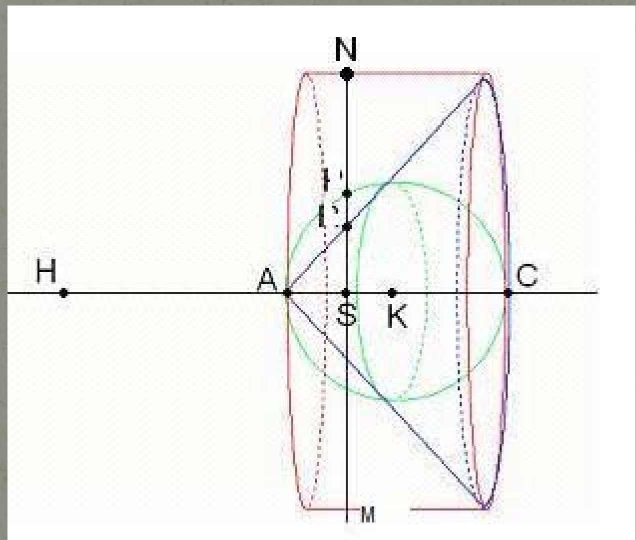
Το τετράγωνο OP^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή της σφαίρας.

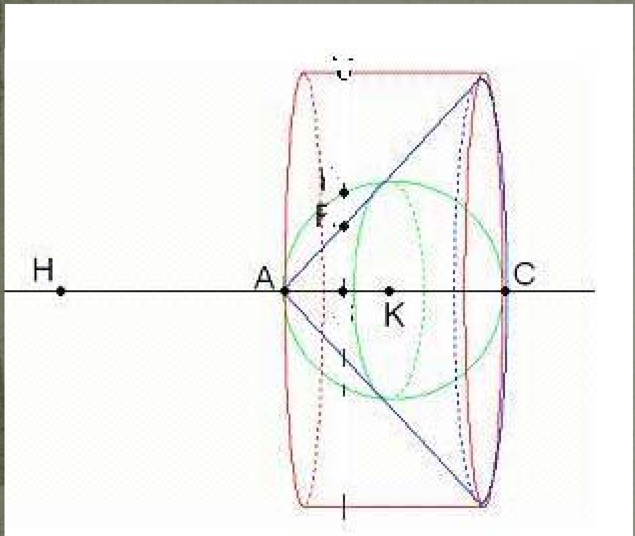
Το τετράγωνο QR^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κώνου.



Αφού HA=AC, από τη προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι
το σύστημα των εγκάρσιων τομών κυλίνδρου, σφαίρας και κώνου
ισορροπεί ως προς το A αν τις τομές της σφαίρας και του κώνου στο
H και τη τομή του κυλίνδρου στο S. Το S όμως (σε αντίθεση με το A) είναι
μεταβλητό: για κάθε τομή του κυλίνδρου είναι το κέντρο του κύκλου. Τι γίνεται
αν θεωρήσουμε τα στερεά και όχι μόνο τις τομές τους?

Συμπέρασμα: Το σύστημα ισορροπεί ως προς το Α
αν θέσουμε στο Η την σφαίρα και τον κώνο και τον κύλινδρο στο
Κ (αφού Κ είναι το κέντρο βάρους του).



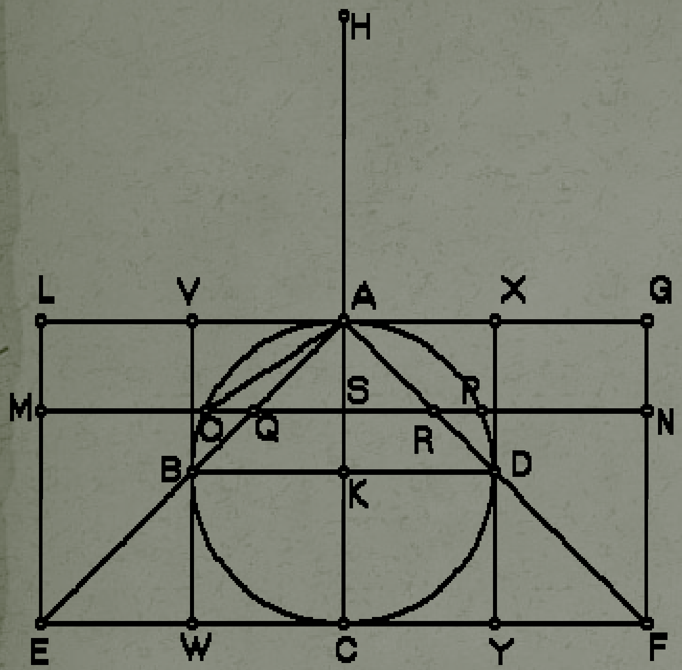


Άρα
HA: AK=κύλινδρος : σφαίρα + κώνος

Αφού HA=2 AK συμπεραίνουμε ότι

όγκος κόκκινου κυλίνδρου είναι διπλάσιος του αθροίσματος των όγκων της σφαίρας και του μπλέ κώνου).

Όπως γνωρίζουμε από τον Ευκλείδη (12.13) ο όγκος του κόκκινου κυλίνδρου είναι ίσος με τρεις φορές τον όγκο του μπλέ κώνου. Τελικά ο όγκος του μπλε κώνου είναι δύο φορές ο όγκος της σφαίρας.



Τέλος συγκρίνουμε τον όγκου του μεγάλου μπλέ κώνου με τον όγκο του μικρότερου κώνου που κάθεται στο BD (ακτίνα βάσης r) και έχει ύψος KA (δηλαδή ύψος r).

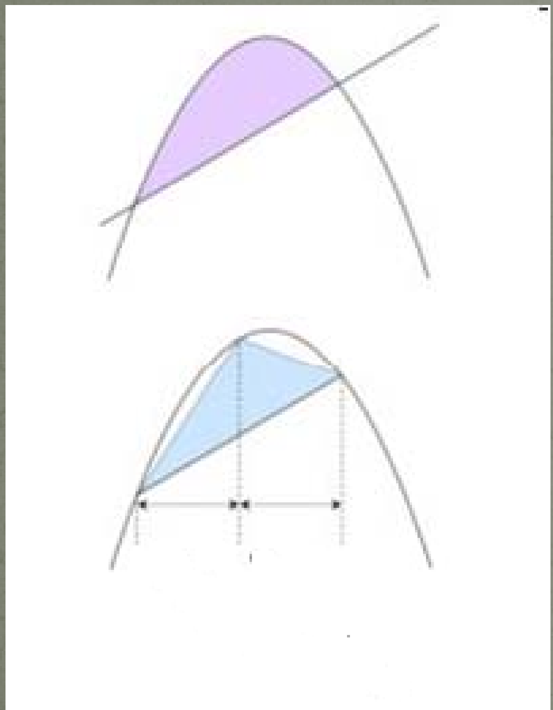
Σύμφωνα με τον Ευκλείδη (12.12) ο μπλε όγκος είναι οκταπλάσιος του μικρότερου. Η σφαίρα μας ήταν η μισή του μπλέ κώνου. Άρα η σφαίρα μας έχει τετραπλάσιο όγκο από τον όγκου του μικρού κώνου.

Πάλι από τον Ευκλείδη ο όγκος του μικρού κώνου είναι το 1/3 του όγκου του αντίστοιχου μικρού κυλίνδρου (BVXO) που έχει ύψος μόλις r. Άρα ο όγκος του μικρού κώνου είναι το 1/6 του όγκου του κυλίνδου (WVXY) που εγγράφει την σφαίρα.

Έτσι προκύπτει ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι 3/2 του όγκου της εγγεγραμμένης σφαίρας.

Λογισμός και Αρχιμήδης: η μέθοδος της εξάντλησης "Τετραγωνισμός παραβολής"

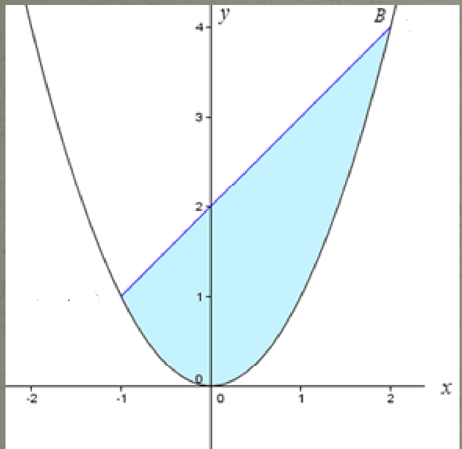
Το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του αντίστοιχου τριγώνου (προσοχή στη κατασκευή του τριγώνου)

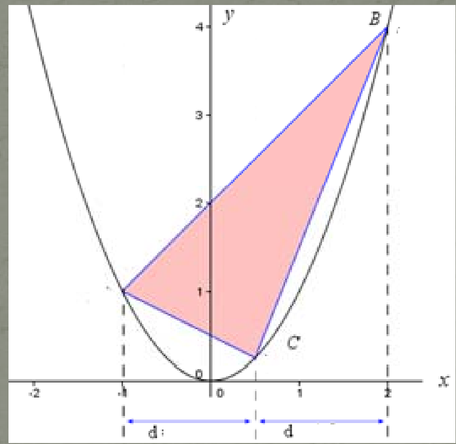


Το σημείο στη παραβολή που προσδιορίζει το τρίγωνο απέχει το μέγιστο από τη τέμνουσα, και η εφαπτομένη σε αυτό το σημείο είναι παράλληλη προς τη τέμνουσα.

Ισορροπία και εμβαδά

Το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του αντίστοιχου τριγώνου



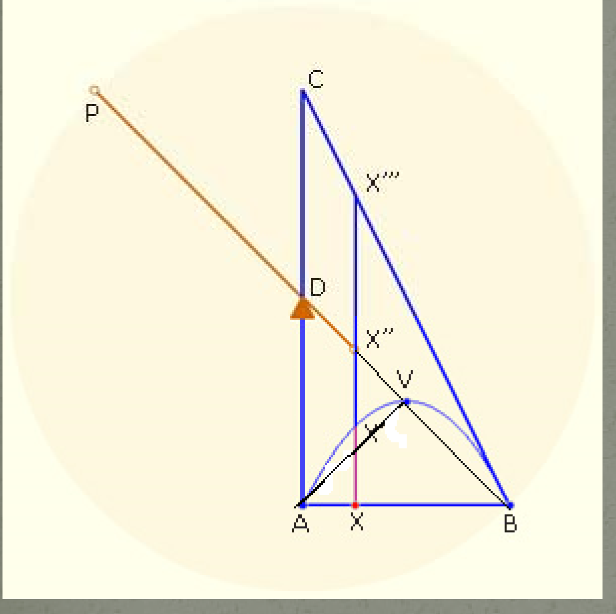


Ιδιότητα τριγώνου: τέμνουσα παράλληλη με εφαπτομένη στο C

Μία απόδειξη ήταν Γεωμετρική. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης και υπολόγισε ένα άπειρο άθροισμα (όριο σειράς).

Απόδειξη βασισμένη στην έννοια της ισορροπίας

(θέμα παρουσίασης)



BC εφαπτομένη στο B,
BD=DP
Τρίγωνο ABC = 4 τρίγωνο ABV
Ιδιότητες παραβολής

$$\frac{XX'''}{XX'} = \frac{AB}{AX} = \frac{BD}{DX''} = \frac{DP}{DX''}$$

Βασική ιδέα: παίρνουμε τομές και θεωρούμε ότι το τρίγωνο ABC και το κομμάτι ανάμεσα στη παραβολή και τέμνουσα AB αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα που θα ισορροπήσουμε ως προς D.

Τι είναι γινόμενο?
(εμβαδόν)

Στον Ευκλείδη δουλεύουμε με ομογενείς ποσότητες: για παράδειγμα δεν μπορούμε να προσθέτουμε σε εμβαδόν (γινόμενα) διαφορετικού είδους μεγέθη όπως μήκη.

Διόφαντος ~τρίτος αιώνας μ.Χ.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Έργα του:
Αριθμητική (13 βιβλία, σώζονται 6)

Περί πολυγώνων αριθμών

Πορίσματα

Σε ελεύθερη μετάφραση
Παλατινή ανθολογία 8.126($6^{ος}$ αιώνας μ.Χ.):

Σ' ΑΥΤΟΝ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. …Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ. Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΜΑ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΝΙ ΤΟΥ. ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ, ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ. ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ, ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ. ΤΙ ΚΡΙΜΑ, ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ, ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ. ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ, Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ, ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.

$(1/6)n + (1/12)n + (1/7)n + 5 + (1/2)n + 4 = n$

Λύση: $n=84$


Arithmeticorum Liber II. 61

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVÆSTIO IX.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Σύμβολα του Διόφαντου (συγκεκομμένη άλγεβρα)

Διόφαντος	Σήμερα
ς :	άγνωστος x
Δ^{Y} :	x^2 (δύναμις)
K^{Y} :	x^3 (κύβος)
$\Delta^{Y}\Delta$:	x^4 (δυναμοδύναμις)
ΔK^{Y} :	x^5 (δυναμόκυβος)
$K^{Y}K$:	x^6 (κυβόκυβος)
$ς^{X}$:	$1/x = x^{-1}$ (ειδικές ονομασίες για αντίστροφα)
ις :	ίσος
Λ	πλην
Μ(με κυκλάκι)	μονάδες

$$K^{\Upsilon}\alpha\,\Delta^{\Upsilon}\iota\gamma\,\zeta\varepsilon\,\overset{\circ}{M}\beta = x^3 + 13x^3 + 5x + 2$$

$$K^{\Upsilon}\alpha\,\zeta\eta \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\varepsilon\,\overset{\circ}{M}\alpha = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

$$\Delta^{\Upsilon}\iota\varepsilon \pitchfork \overset{\circ}{M}\lambda\theta = 15x^2 - 39$$

Η «Αριθμητική» του Διόφαντου είναι συλλογή 150 περίπου προβλημάτων, με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα.

Από αυτή τη μελέτη:

- λείπει η συστηματική μελέτη των αλγεβρικών πράξεων, και η συστηματική μελέτη επίλυσης εξισώσεων.
- δεν γίνεται προσπάθεια εύρεσης όλων των πιθανών λύσεων.
- ο Διόφαντος αναγνωρίζει μόνο τις θετικές ρητές ρίζες
- αν υπάρχουν δύο θετικές ρίζες, αναγνωρίζει μόνο τη μεγαλύτερη.
- δεν αναγνωρίζει καθόλου τις αρνητικές λύσεις.
- στα αόριστα προβλήματα (με άπειρο αριθμό λύσεων) δίνει μόνο μία απάντηση.

Τα μεγάλα θετικά (εκτός από τον μερικό συμβολισμό):

Ο Διόφαντος έδωσε κανόνες για μαθηματικές εκφράσεις:

μεταφορά όρων από το ένα μέρος της εξίσωσης στο άλλο,
ακύρωση όμοιων όρων από τις δύο πλευρές της ισότητας.

Όρισε αρνητικές δυνάμεις για τους αγνώστους και τους κανόνες για τους εκθέτες

$$x^n x^m = x^{n+m}, \ -6 \leq m, n, m+n \leq 6$$

Έδωσε κανόνες για το γινόμενα που αφορούν όρους με αρνητικούς συντελεστές: παρ. (-)(-)=(+)

Απομάκρυνση από την γεωμετρική άλγεβρα, (οι όροι δεν χρειάζεται να είναι ομογενείς), δουλεύει με δυνάμεις μεγαλύτερες του 3.

- Πρόβλημα I-28

Να βρεθούν δύο αριθμοί έτσι ώστε το άθροισμά τους και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι δοθέντες αριθμοί:

Λύση: Έστω το άθροισμα είναι 20 και το άθροισμα των τετραγώνων είναι 208.

Τότε έστω ότι η διαφορά των δύο αριθμών (του μεγαλύτερου από τον μικρότερο) είναι 2x.

Το 10 είναι το μισό του πρώτου αθροίσματος. Άρα και ο αριθμός x είναι 2 ενώ οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 8 και 12.

<u>Ερμηνεία (δική μας):</u> έστω z,y οι δύο αριθμοί όπου z>y. Αν λοιπόν το z διαφέρει από το y κατά 2x τότε αφού

z+y=20 έχουμε ότι 2z-2x=20 και άρα

z=10+x, ενώ y=10-x.

Αντικαθιστούμε z και y στη σχέση των τετραγώνων και λύνουμε ως προς x.

$$208 = (x+10)^2 + (10-x)^2 = 2x^2 + 200.$$

Επομένως δύο φορές το τετράγωνο του x είναι 8 και άρα x είναι 2.

Πότε δουλεύει αυτή η τεχνική σύμφωνα με τον Διόφαντο?

(ας θυμηθούμε ότι για λύσεις αναγνωρίζει μόνο θετικούς ρητούς.)

Το γενικό πρόβλημα : να βρεθούν θετικοί ρητοί z και y έτσι ώστε

$$z + y = a, \ z^2 + y^2 = b$$

Μέθοδος του Διόφαντου:

$$z = \frac{a}{2} + x \qquad y = \frac{a}{2} - x$$

Αντικατάσταση
στη δεύτερη εξίσωση:

$$b = (\frac{a}{2} + x)^2 + (\frac{a}{2} - x)^2$$

Έτσι

$$b = 2\frac{a^2}{4} + 2x^2$$

και

$$2x^2 = b - \frac{a^2}{4}$$

άρα

$$x^2 = \frac{2b - a^2}{4}$$

και

$$x = \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}$$

Για τον Διόφαντο για να έχουμε «λύση» πρέπει να μπορεί να υπολογιστεί το x

$$x = \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}$$

που είναι «δυνατόν»αν και μόνο αν $2b - a^2$ είναι τετράγωνο

Την συνθήκη αυτή ο Διόφαντος, την δίνει αμέσως μετά την παράθεση του προβλήματος στη γενική μορφή και πριν ξεκινήσει με την λύση της συγκεκριμένης περίπτωσης:

λέει «πρέπει δύο φορές το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών μείον το τετράγωνο του αθροίσματος των αριθμών να είναι τετράγωνο.»

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα: $2 \times 208 - 20^2 = 4^2$

Στο γενικό λοιπόν πρόβλημα των δύο εξισώσεων

$$z + y = a, \; z^2 + y^2 = b$$

σύμφωνα με τον Διόφαντο, οι λύσεις είναι:

$$z = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}, \; y = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}$$

αρκεί βέβαια 2b-a*α να είναι τετράγωνο!

Παρατήρηση: Δεν υπάρχει γεωμετρική μεθοδολογία στις μεθόδους του Διόφαντου.

Το τελευταίο θεώρημα του Fermat

(1993, 1995)

$$a^n + b^n = c^n$$

Sir **Andrew John Wiles** (1953--)

Pierre de Fermat (1601 -1665)

Ας παύση η πραγματεία των μαθηματικών. Διότι εάν τις δημοσία ή κατ' ιδίαν, καθ' ημέραν ή νύκτωρ συλληφθή αναστρεφόμενος εν τη απαγορευμένη πλάνη, αμφότεροι ας πληγούν δια κεφαλικής ποινής. Διότι δεν είναι διάφορον αμάρτημα το διδάσκεσθαι κεκωλυμένα ή το διδάσκειν». Κώδιξ Θεοδοσιανός (Ουαλεντιανού και Ουάλεντος), ΙΧ, 16, 8. (438μ.Χ.)

«*Οι μαθηματικοί, εάν μή ώσιν έτοιμοι, καυθέντων των κωδίκων της ιδίας πλάνης υπό τα όμματα των Επισκόπων, να δώσουν πίστιν εις την λατρείαν της καθολικής πίστεως, ότι δεν θα επανέλθουν εις την παλαιάν πλάνην, ου μόνον από της πόλεως Ρώμης, αλλά και εκ πασών των πόλεων αποφασίζομεν να εκδιωχθούν. Εάν δε δεν κάμνουν τούτο και παρά την σωτηρίαν απόφασιν της ημετέρας επιεικείας, συλληφθούν εν ταις πόλεσιν· είτε παρεισάγουν τα μυστικά της πλάνης, θα τύχωσι της ποινής της εξορίας*». Αυτοκράτορες Ονώριος και Θεοδόσιος προς τον Καικιλιανό Ύπαρχο.

«*Η μαθηματική τέχνη αξιόποινος ούσα απαγορεύεται*». Ιουστινιάνειος Κώδιξ, ΙΧ, 18, 2.