

Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

18.03.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Πως ορίζονται αξιωματικά από το σύστημα των ρητών αριθμών οι πραγματικοί αριθμοί?

Τομές του Dedekind (1831-1916) στους ρητούς: δημιουργία των άρρητων (αξιωματική θεμελίωση)



Τομές του Dedekind

Ξεκινάμε από το σύνολο των ρητών (στον κόσμο μας δεν υπάρχουν οι άρρητοι) και φτιάχνουμε τομές δηλαδή διαμερίσεις του \mathbb{Q} σε σύνολα A και B με κάποιες ιδιότητες που θα δούμε παρακάτω:

Για παράδειγμα, η τομή που θα αντιστοιχεί στη τετραγωνική ρίζα του 2 είναι η παρακάτω διαμέριση του \mathbb{Q} :

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$$

$$B = \mathbb{Q} \setminus A$$

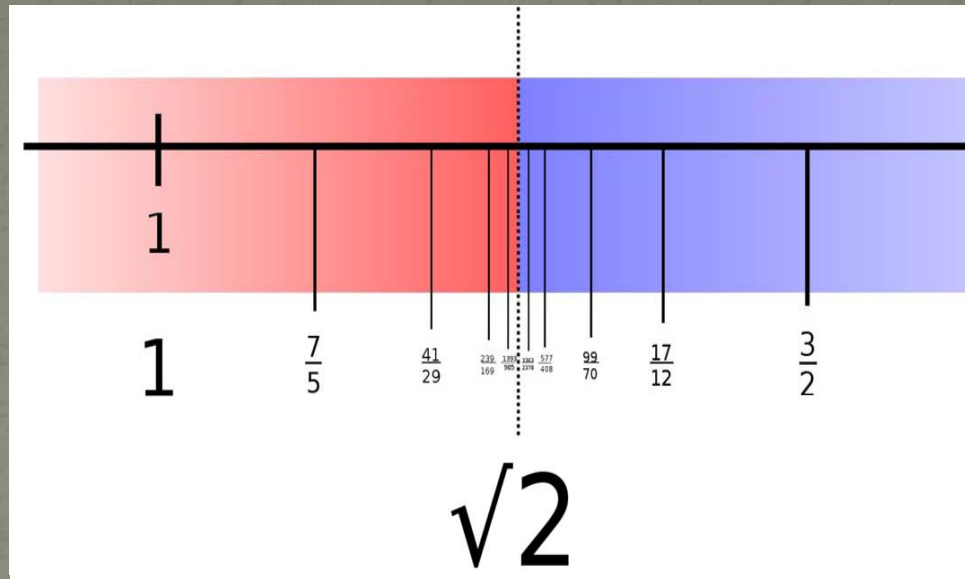
Ιδιότητες το σύνολο A δεν έχει μέγιστο στοιχείο ενώ αν x είναι στο A και y είναι μικρότερο του x τότε y ανήκει στο A . Όλα τα στοιχεία του B είναι μεγαλύτερα αυτών του A .

Θεωρούμε το σύνολο των τομών του \mathbb{Q} .

Έστω (A,B) μία τέτοια τομή.

Αν το σύνολο B έχει ελάχιστο (στους ρητούς) τότε η τομή αντιστοιχεί σε αυτόν τον ρητό. (Το σύνολο λοιπόν των ρητών μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο των τομών). Αν όμως το B δεν έχει ελάχιστο στους ρητούς, τότε η τομή είναι κάτι καινούριο: ένας άρρητο. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα το σύνολο B δεν είχε ελάχιστο στους ρητούς και ονομάζουμε την αντίστοιχη τομή τετραγωνική ρίζα του 2.

Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να θεμελιωθούν ως τέτοιες τομές με κατάλληλα ορισμένες πράξεις.



Dedekind

κόκκινο

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$$

μπλε

$$B = \mathbb{Q} \setminus A$$

Ποια είναι η σχέση όμως με τον Εύδοξο?

Θα το δείξουμε για τη $\sqrt{2}$:

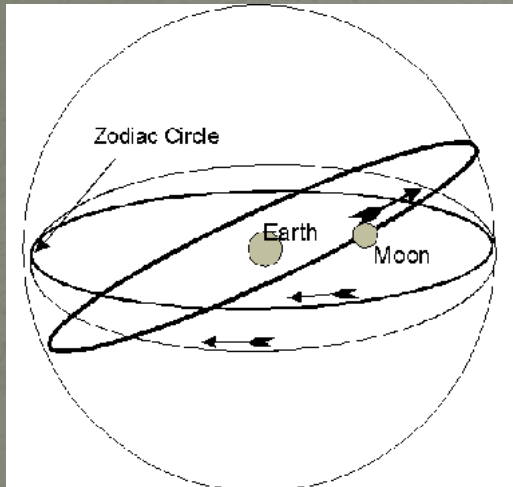
Σύμφωνα με τη θεωρία των λόγων του Ευδόξου, χωρίζουμε τις δυνάδες (m,n) του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (αντιστοιχία με ρητούς) σε δύο σύνολα. Τα σύνολα αυτά δίνουν και διαμέριση (τομή(!)) των ρητών :

ένα σύνολο A αν $\sqrt{2}m \leq n$ δηλαδή αν $\frac{\sqrt{2}}{1} \leq \frac{n}{m}$

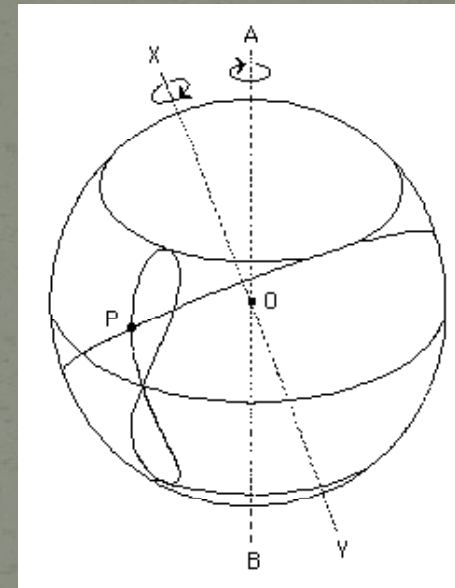
και ένα σύνολο B αν $\sqrt{2}m > n$ δηλαδή αν $\frac{\sqrt{2}}{1} > \frac{n}{m}$

Εύδοξος και οι πλανήτες (Μεταφυσική του Αριστοτέλη)

μοντέλο για τη σελήνη



Καμπύλη ιπποπέδης

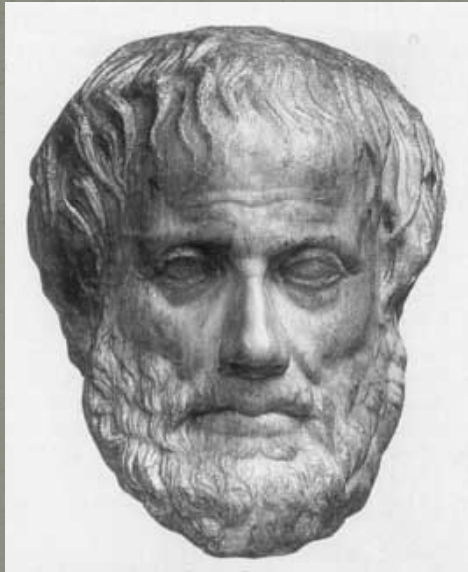


Σφαίρες που ο άξονας της μίας είναι η διάμετρος της άλλης. Όταν περιστρέφεται η μία, περιστρέφεται και ο άξονας της άλλης.

Αριστοτέλης 384 π.Χ. - 322 π.Χ.

- Ο Αριστοτέλης ήταν κυρίως φιλόσοφος και βιολόγος.

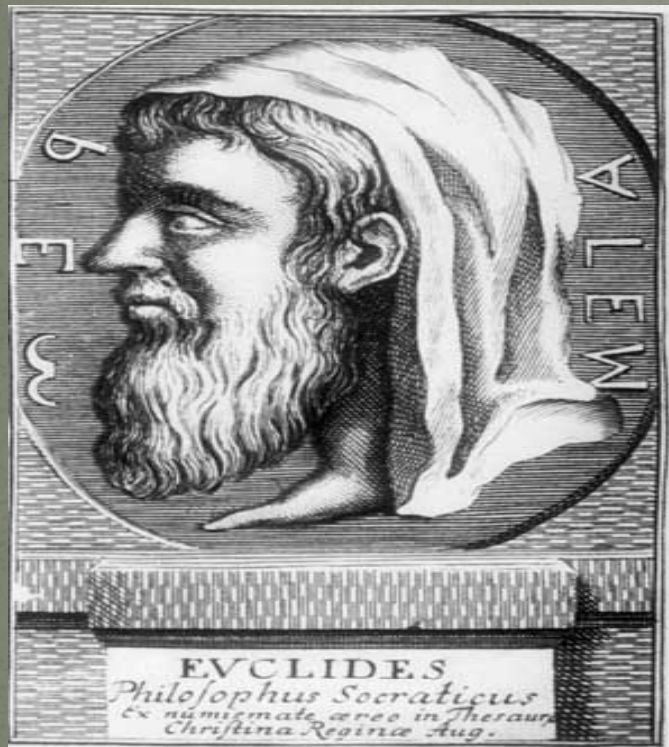
Η μεγάλη συνεισφορά του στην εξέλιξη των μαθηματικών είναι οι βάσεις της λογικής που έθεσε και οι συνεχείς αναφορές σε μαθηματικές έννοιες και θεωρήματα.



Η αριστοτέλεια μεθοδολογία (ταξινόμηση, παρατήρηση, ανάλυση) θα υιοθετηθεί απ' τον Ευρωπαϊκό Διαφωτισμό

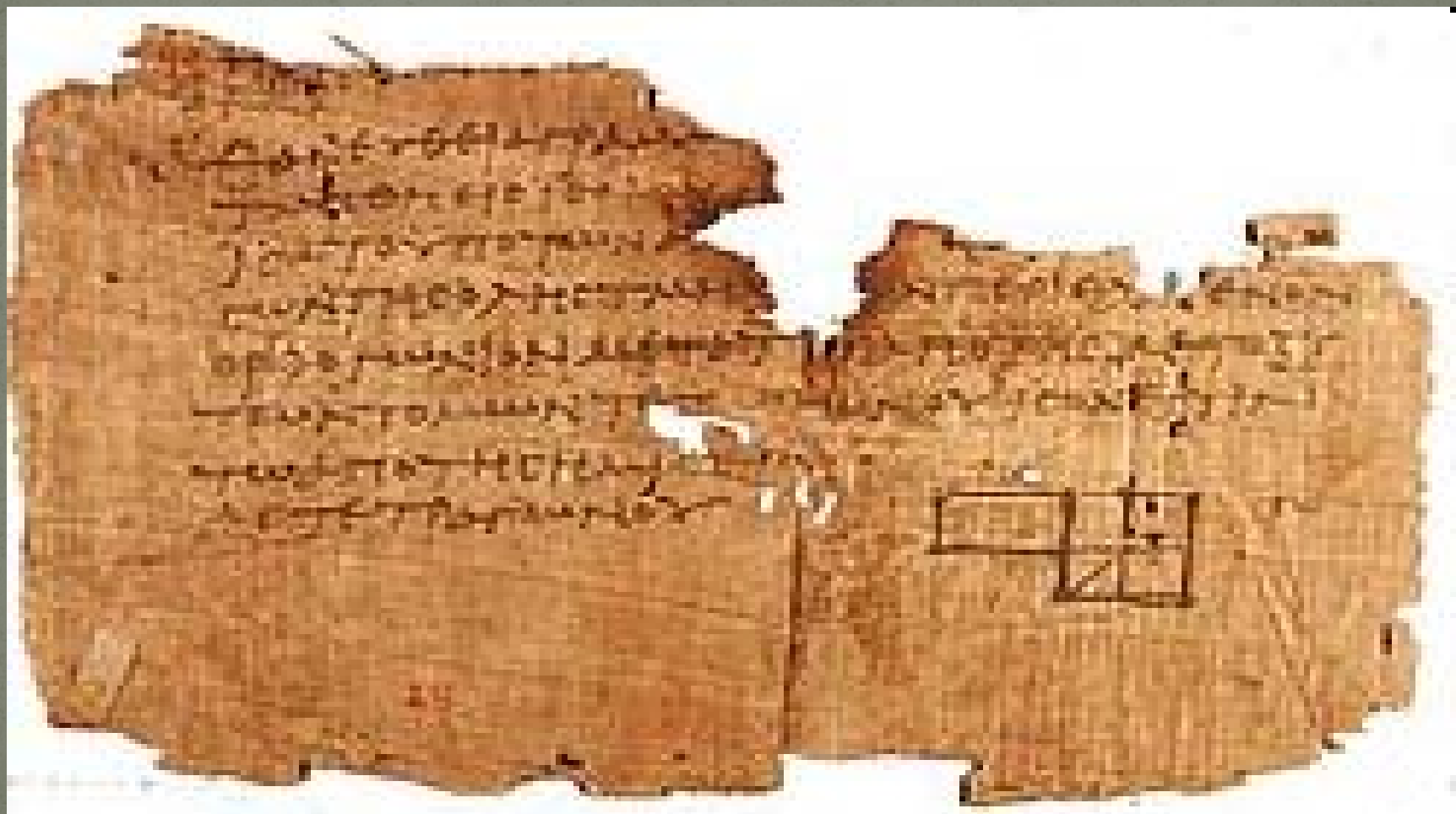
Ευκλείδης (~325 – 265 π.Χ.), (Αλεξάνδρεια)

Έργα



Στοιχεία ★
Δεδομένα ★
Φαινόμενα ή Σφαιρικά ★
Οπτικά ★
Κατοπτρικά
Στοιχεία Μουσικής
Βιβλίο περί διαιρέσεων ★
Πορίσματα
Κωνικά
Τόποι προς επιφάνειες
Ψευδάρια
Μηχανική
Περί βαρέων και ελαφρών
σωμάτων

Στοιχεία βιβλίο 2, πρόταση 5
(100 μ.Χ. Όξυρρυγχος)



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Ραφαήλ (1483-1520)

«Η σχολή των Αθηνών» (~1510)



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Ευκλείδης



Έργα

Στοιχεία
Δεδομένα
Φαινόμενα ή Σφαιρικά
Οπτικά
Κατοπτρικά
Στοιχεία Μουσικής
Βιβλίο περί διαιρέσεων
Πορίσματα
Κωνικά
Τόποι προς επιφάνειες
Ψευδάρια
Μηχανική
Περί βαρέων και ελαφρών
σωμάτων

Στοιχεία του Ευκλείδη («εισαγωγή στα μαθηματικά»)

- Συλλογή από 13 βιβλία-κεφάλαια:

Παρουσιάζονται με λογική σειρά οι βάσεις για τα στοιχειώδη μαθηματικά της εποχής: οι βάσεις για την αριθμητική (θεωρία αριθμών), για την γεωμετρία (σημεία, ευθείες, επίπεδα, κύκλοι, σφαίρες) και για την γεωμετρική άλγεβρα.

Το περιεχόμενο των Στοιχείων του Ευκλείδη στηρίχτηκε κατά ένα μεγάλο μέρος στο έργο προηγούμενων μαθηματικών.

Όμως η διάταξη (σειρά) των προτάσεων (φαίνεται να) οφείλεται στον Ευκλείδη όπως και πολλές από τις αποδείξεις.

Ύπαρξη άλλων «Στοιχείων»

Ο Ιπποκράτης της Χίου (~470 π.Χ-410 π.Χ.)
είχε γράψει και αυτός (νωρίτερα) «Στοιχεία», όπως και
άλλοι μαθηματικοί.

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ξεχώρισαν από τις παλαιότερες
εργασίες χάρις στη λογική δομή και μαθηματική
αυστηρότητα τους. Έτσι τα παλαιότερα δεν
αναπαράχθηκαν και σώζονται μόνο μέσα από τα
«Στοιχεία» του Ευκλείδη .

- Τα βιβλία 1-6 αναφέρονται στη στοιχειώδη γεωμετρία του επιπέδου
- Τα βιβλία 7-9 αναφέρονται στη θεωρία των αριθμών.
- Το βιβλίο 10 αναφέρεται στους άρρητους.
- Τα βιβλία 11-13 αναφέρονται στη στερεομετρία.

Κάποια από τα Μαθηματικά αποτελέσματα που περιέχονται στα 13 βιβλία των Στοιχείων αποδίδονται σε μαθηματικούς που έζησαν πριν τον Ευκλείδη.

- Στους Πυθαγόρειους και κυρίως στον Αρχύτα τον Ταραντίνο (428 - 347 π.Χ.) «περιστερά» βιβλία 1,2,6,7,8,9,11
- Εύδοξος από την Κνίδα (408-355 π.Χ.) βιβλία 5, 12
- Θεαίτητος ο Αθηναίος (417-369 π.Χ.) βιβλία 10,13



- Βιβλίο 1: αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας με 23 ορισμούς, 5 αιτήματα και 9 κοινές έννοιες, (δηλαδή τα αιτήματα και κοινές έννοιες αποτελούν αυτά που σήμερα θα λέγαμε στα αξιώματα). Ακολουθούν οι προτάσεις. Το βιβλίο τελειώνει με την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του αντιστρόφου του.
- Βιβλίο 2: Θεωρήματα της Γεωμετρικής Άλγεβρας (αποδείξεις αλγεβρικών ταυτοτήτων όπως $a(b+c)=ab+ac$ με χρήση εμβαδών).
- Βιβλίο 3: Ιδιότητες κύκλων

- Βιβλίο 4: Κατασκευές (με κανόνα και διαβήτη) κανονικών πολυγώνων, (3,4,5,6 πλευρές). Τελειώνει με τη κατασκευή του κανονικού 15-γωνου.
- Βιβλία 5 και 6: θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου και προτάσεις Γεωμετρικής Άλγεβρας και ομοιότητα τριγώνων.
- Βιβλία 7,8,9: Θεωρία Αριθμών

- Βιβλίο 10: (το μεγαλύτερο και το δυσκολότερο). Με τη σημερινή ορολογία: επεκτάσεις σωμάτων βαθμού 2 και 4 πάνω από τους ρητούς, (θέμα παρουσίασης).
- Βιβλίο 11: Βασικά Θεωρήματα στερεομετρίας.
- Βιβλίο 12: όγκους πυραμίδας, κώνου και σφαίρας.
- Βιβλίο 13: πλατωνικά στερεά. Για κάθε ένα από αυτά υπολογίζει λόγο ακμής με ακτίνα περιγεγραμμένης σφαίρας.

Παρατήρηση για τα κατασκευάσιμα κανονικά πολύγωνα:

Το επόμενο κανονικό πολύγωνο μετά τον Ευκλείδη κατασκευάστηκε το 1796 από τον Gauss (1777-1855): το κανονικό 17-γωνο .



Υπάρχουν άλλα κατασκευάσιμα πολύγωνα?
(Θέμα παρουσίασης)

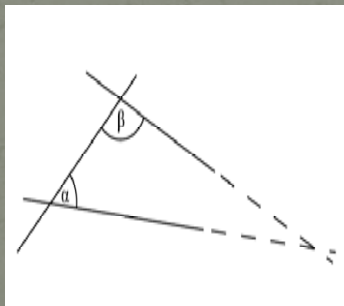
Αιτήματα (Βιβλίο 1)

- α'. Αιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
- δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
- ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

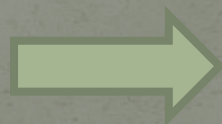
Ορισμός 10 (ορθών γωνιών): όταν μία ευθεία τέμνει μία άλλη έτσι ώστε οι εφεξής γωνίες να είναι ίσες, τότε οι γωνίες αυτές λέγονται ορθές και οι ευθείες κάθετες η μία προς την άλλη

Αίτημα 4: όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες η μία προς την άλλη

Αίτημα 5: Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος «εντός και επί τα αυτά» γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που είναι αυτές οι γωνίες.

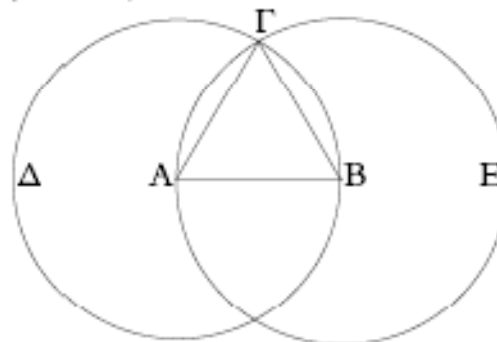


Πρόταση 1,
βιβλίο 1



α'.

Ἐπί τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον
ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Ἐστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB.

Δεί δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον
συστήσασθαι.

Κέντρον μὲν τῷ A διαστήματι δὲ τῷ AB κύκλος
γεγράφθω ὁ BΓΔ, καὶ πάλιν κέντρον μὲν τῷ B διαστήματι δὲ
τῷ BA κύκλος γεγράφθω ὁ AΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου,
καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεία
ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ BΓΔ κύκλου,
ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ AB· πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον
ἐστὶ τοῦ AΓΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BA. ἐδείχθη δὲ
καὶ ἡ ΓΑ τῇ AB ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ AB ἐστὶν
ἴση· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλους ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα
τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, AB, BΓ ἴσαι ἀλλήλαις
εἰσὶν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται
ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς AB. ὅπερ εἶδει
ποιῆσαι.

Πρόταση 1 Με πλευρά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο

Δίνεται το AB
κατασκευή

- κύκλου με κέντρο το A ,
- κύκλου με κέντρο το B
(ακτίνα AB)

έστω C το σημείο τομής. ABC είναι
ισόπλευρο τρίγωνο.

Χρησιμοποιεί:

1. Αίτημα 3 (κατασκευή κύκλου)
2. Αίτημα 1 (κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος)
3. Κοινή έννοια 1 (ίσα προς τρίτο και μεταξύ τους ίσα)

