Ιστορία των Μαθηματικών

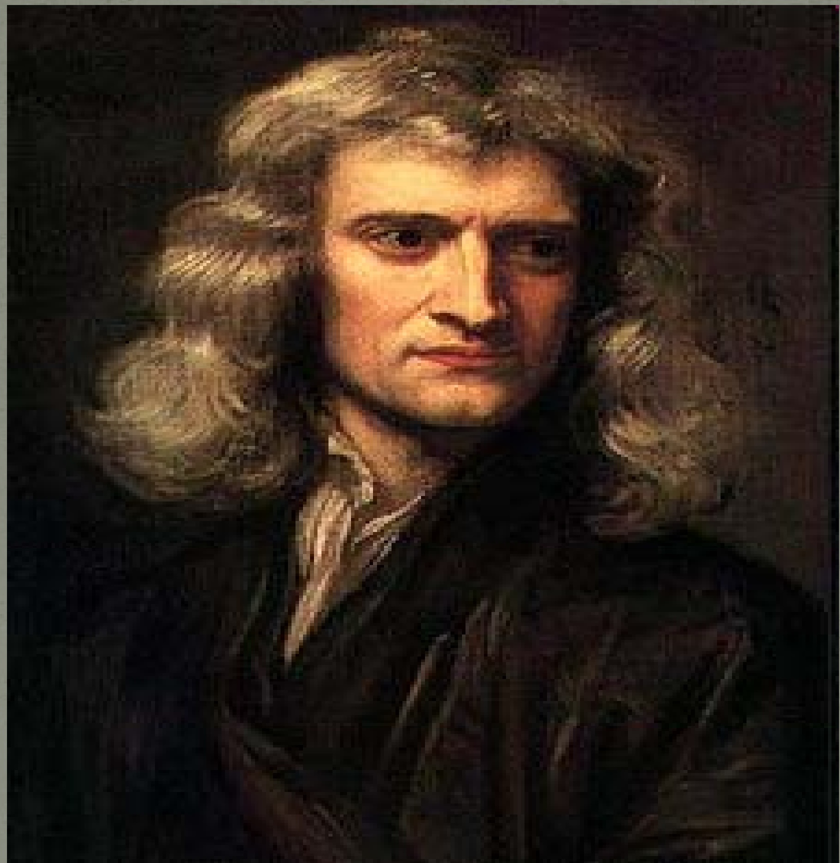
Εαρινό εξάμηνο 2014

15.05.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Newton (1642-1727) Άγγλος



Θεώρημα του διωνύμου
(ανακάλυψη: 1665, περιγραφή σε δύο γράμματα το 1676, δημοσίευση από τον Wallis το1685)

Έστω $r \in \mathbb{Q}$.

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

Άπειρη σειρά: Σύγκλιση?

Γιατί το Δυωνυμικό Θεώρημα θεωρείται τόσο σημαντικό?

Πως ήρθε στον Νεύτωνα η έμπνευση?

Έδωσε ο Νεύτωνας πλήρη απόδειξη του Θεωρήματος?

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)

Ο Wallis ενδιαφερόταν να βρει τρόπο να υπολογίσει τα εμβαδά κάτω από καμπύλες της μορφής $(1-t^2)^n$ από το 0 έως δοθέντα a, ιδιαίτερα αφού

$$\int_0^1 (1-t^2)^{1/2}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Μπορούσε να το κάνει για ακέραιες τιμές του n, όχι όμως για κλασματικές. Η έμπνευση του Newton ήταν καταρχήν να υπολογίσει για διάφορες τιμές του n τα αντίστοιχο εμβαδά από το 0 έως κάποιον άγνωστο x. Έτσι βρήκε ότι:

Ας μελετήσουμε τον πίνακα που τα στοιχεία του στην i-στη γραμμή και jστη στήλη είναι ο συντελεστή του

$$(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$

όπως εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα

$$\int_0^x (1-t^2)^j \; dt \; .$$

(Ξεκινάμε μετρώντας με τη στήλη 0).

0	1	2	3	4	$\cdots$	
1	1	1	1	1	$\cdots$	x
0	1	2	3	4	$\cdots$	$-\frac{x^3}{3}$
0	0	1	3	6	$\cdots$	$\frac{x^5}{5}$
0	0	0	1	4	$\cdots$	$-\frac{x^7}{7}$
0	0	0	0	1	$\cdots$	$\frac{x^9}{9}$

Ο συντελεστής του x είναι 1.

Ο συντελεστής του $-x^3/3$ όταν $j = n$ είναι n.

Για τη τρίτη γραμμή, δηλαδή για τον συντελεστή του $x^5/5$ οι συντελεστές είναι $0\ 1\ 3\ 6 \cdots$. Ο Newton αναγνώρισε ότι $1\ 3\ 6\ 10 \cdots$ είναι τριγωνικοί αριθμοί (δηλ. οι αριθμοί που προκύπτουν ως πεπερασμένα αθροίσματα $1 + 2 + \cdots + j$ και υπέθεσε ότι στο ολοκλήρωμα του $\int_0^x (1 - t^2)^n \, dt$ ο συντελεστής του $x^5/5$ είναι

$$\frac{n(n-1)}{2} \, .$$

Παρατηρείστε ότι οι συντελεστές του x, $-x^3/3$, $x^5/5$ στη j στήλη προκύπτουν αντικαθιστώντας j στα εξής πολυώνυμα αντίστοιχα: 1, n, $1/2(n^2 - n)$. Οι βαθμοί των πολυωνύμων είναι αντίστοιχα 0, 1 και 2.

Για την τέταρτη γραμμή (δηλαδή στη γραμμή των συντελεστών του $-x^7/7$ και που ξεκινάει με 3 μηδενικά) ο Newton υπέθεσε ότι τα στοιχεία καθορίζονται από ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο που έχει ρίζες στο 0, 1, 2. Το πολυώνυμο θα έχει τη μορφή

$$cn(n-1)(n-2)$$

όπου c κάποια σταθερά. Αφού η τιμή στη τρίτη στήλη είναι 1, με αντικατάσταση $n=3$ προκύπτει ότι

$$1 = c3(3-1)(3-2) = 6c \Rightarrow c = \frac{1}{6}$$

Έτσι ο Newton υπέθεσε ότι ο συντελεστής του $-x^7/7$ στο

$$\int_0^x (1-t^2)^n \, dt$$

είναι

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \binom{n}{3}$$

Συνέχισε και για κάθε n και για κάθε θετικό ακέραιο k υπέθεσε ότι στον τετραγωνισμό $\int_0^x (1-t^2)^n dt$ εμφανίζεται ο όρος

$$(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

με συντελεστή

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Γενίκευσε τα παραπάνω ακόμα και όταν η δύναμε n δεν είναι ακέραιος. Δηλαδή υπέθεσε ότι θα ισχύει για κάθε δύναμη n ότι:

$$\int_0^x (1-t^2)^n \, dt = x - \binom{n}{1}\frac{x^3}{3} - \binom{n}{2}\frac{x^5}{5} - \binom{n}{3}\frac{x^7}{7} - \cdots$$

όπου

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Ειδικώτερα για $n = 1/2$ συμπέρανε ότι

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2} dt = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{8}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{16}\frac{x^7}{7} - \cdots$$

Στη συνέχεια ο Newton παρατήρησε ότι αν ξεκινήσει κανείς με τη σειρά

$$1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{16}t^6 - \cdots$$

τετραγωνίσει (ολοκληρώσει) κάθε όρο και πάρει το άθροισμα, καταλήγει στη σειρά που βρήκε ξεκινώντας από το ολοκλήρωμα $\int_0^x (1-t^2)^{1/2} dt$. Συμπέρανε ότι

$$(1-t^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{16}t^6 - \cdots$$

Για να βεβαιωθεί ο Newton πολλαπλασίασε

$$(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots)(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots)$$

και βρήκε ότι όντως

$$1+(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})x^2+(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{8})x^4+\cdots$$

$$=1-x^2+0+\cdots=1-x^2$$

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$$

Αποτελούν τα παραπάνω **απόδειξη** ότι η σειρά που δόθηκε για τη συνάρτηση $(1-x^2)^{1/2}$ είναι σωστή?

Δυωνυμικό Θεώρημα

Έστω $r \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{Z}^+$

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

Παρατηρείστε τη σχέση ανάμεσα στις σειρές και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων!

Εφαρμογή του Δυωνυμικού Θεωρήματος (Newton)

Προσέγγιση ριζών

$$7 = 9\,\frac{7}{9} = 9(1 - \frac{2}{9})$$

$$\sqrt{7} = 3\sqrt{1 - \frac{2}{9}} = 3(1 - \frac{2}{9})^{1/2}$$

$$\sqrt{7} \approx 3(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{162} - \frac{1}{1458} - \frac{5}{52488} - \frac{7}{472392})$$

$$\approx 2.64576$$

- Απειροσειρές (και άπειρο)

συνέβαλλαν στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού.

υπακούνε τους ίδιους γενικούς κανόνες όπως τα πεπερασμένα αθροίσματα

θεωρούνται εναλλακτικές μορφές των συναρτήσεων

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas
(Newton: 1669, δημοσιεύθηκε το 1711)

Περιεχόμενα

- Απειροσειρές

- Πρώτη περιγραφή του απειροστικού λογισμού

  Οι βασικές ιδέες του λογισμού του Newotn έχουν να κάνουν με κίνηση. Θεωρεί ότι οι ποσότητες-μεταβλητές μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο. Το fluxion μίας μεταβλητής x είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του x και συμβολίζεται με p.

  Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα o, το x μεταβάλλεται κατά op.

  Αντίστοιχα αν το fluxion του y είναι q τότε το y μεταβάλλεται κατά oq.

  Η κλίση της καμπύλης f(x,y)=0, (δηλ. η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης) είναι ίση με oq/op=q/p.