Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

13.05.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

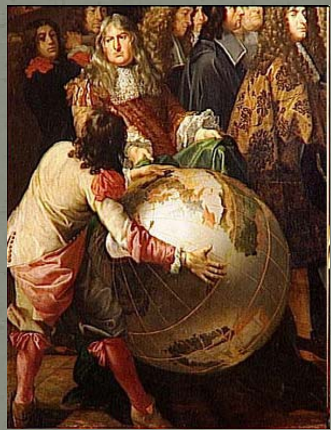
Τετραγωνισμός και εμβαδόν (αδιαίρετα + απειροστά)

- Αρχιμήδης για το εμβαδόν παραβολικού τμήματος χρησιμοποίησε τρίγωνα.

- Cavalieri (1635), Fermat +Roberval (1636, αλληλογραφία)

1598 - 1647

1601-1665

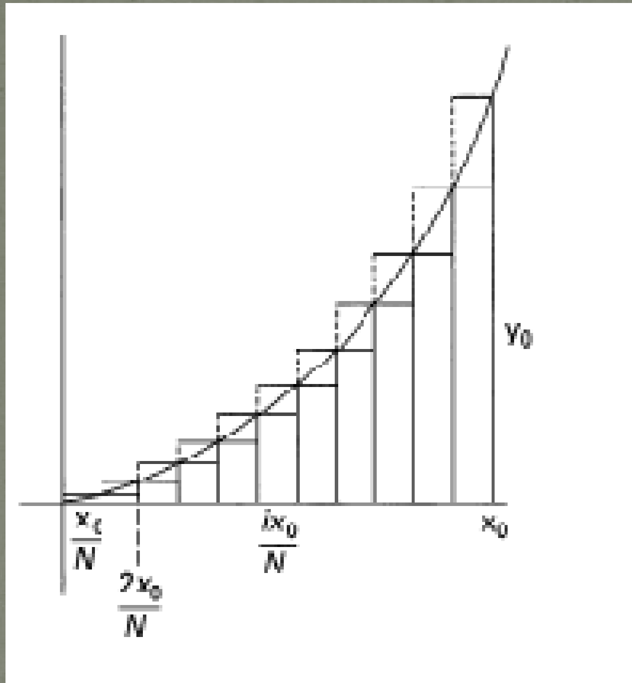


1602 - 1675

Με τη μέθοδο των «αδιαιρέτων» ο Cavalieri είχε οδηγηθεί στο παρακάτω γενικό συμπέρασμα για το παρακάτω εμβαδό (έχοντας αποδείξει τον τύπο μέχρι και για n=9)

$$\int_o^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Οι Fermat και Roberval το απέδειξαν.



Η απόδειξη των Fermat+ Roberval (+ Pascal)

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν A της περιοχής κάτω από τη παραβολή $y = x^k$, τον άξονα των x και δοθείσα κάθετη στο x_0 θα δημιουργήσουμε ορθογώνια όπως φαίνεται στην εικόνα.

Το i-στό ορθογώνιο με βάση x_0/N και ύψος $(ix_0/N)^k$ έχει εμβαδόν

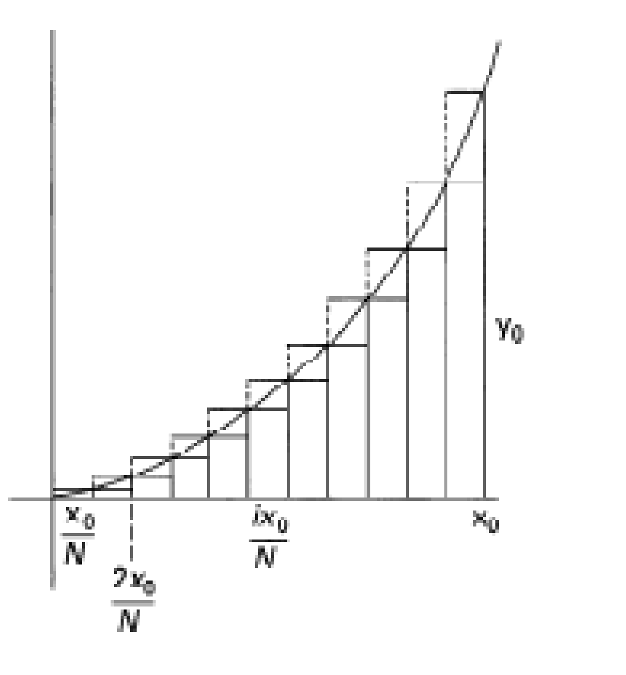
$$\frac{(ix_0)^k}{N^k}\,\frac{x_0}{N}$$

Συνολικά αθροίζοντας τα εμβαδά των ορθογωνίων βρίσκουμε

$$\frac{x_0^k}{N^k}\,\frac{x_0}{N} + \frac{(2x_0)^k}{N^k}\,\frac{x_0}{N} + \cdots + \frac{(Nx_0)^k}{N^k}\,\frac{x_0}{N}$$

$$= \frac{(x_0)^{k+1}}{N^{k+1}}\,(1^k + \cdots + N^k)\ .$$

Αντίστοιχα για το άθροισμα των ορθογωνίων με βάση x_0/N και ύψος $((i-1)x_0/N)^k$ βρίσκουμε την έκφραση



$$\frac{(x_0)^{k+1}}{N^{k+1}}(1^k+\cdots+(N-1)^k)=$$

$$\frac{x_0^{k+1}}{N^{k+1}}(1^k+\cdots+N^k)-\frac{x_0^{k+1}}{N}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό A βρίσκεται ανάμεσα στις ποσότητες

$$x_0^{k+1}\frac{1^k+\cdots+N^k}{N^{k+1}}-\frac{x_0^{k+1}}{N}$$

και

$$x_0^{k+1}\frac{1^k+\cdots+N^k}{N^{k+1}}$$

Όμως οι Fermat, Roberval γνώριζαν ότι η έκφραση

$$\frac{1^k + \cdots + N^k}{N^{k+1}} \backsim \frac{1}{k+1}$$

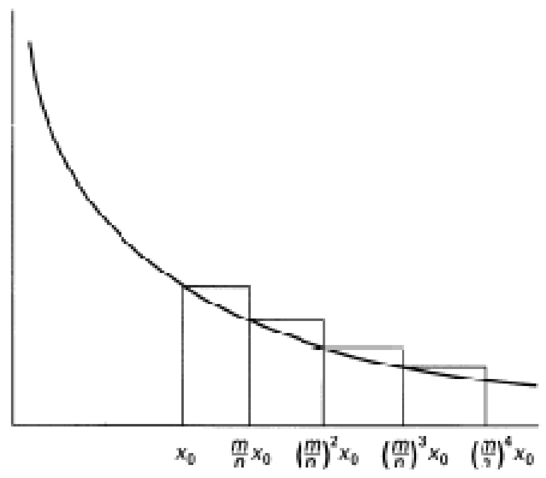
όταν το N μεγάλωνε. Έτσι αφού η ποσότητα

$$\frac{x_0^{k+1}}{N}$$

μπορούσε να γίνει όσο μικρή ήθελαν για κατάλληλο N κατέληξαν στο ότι όντως

$$\int_0^{x_0} x^k \, dx = A = \frac{x_0^{k+1}}{k+1}$$

(Fermat)



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν A της περιοχής κάτω από τη καμπύλη $y = x^{-k}$, τον άξονα των x και στα δεξιά του x_0 θα δημιουργήσουμε ορθογώνια όπως στην εικόνα. Η βάση του i-στού ορθογώνιου ορίζεται από τα σημεία $(m/n)^{i-1}x_0$ και $(m/n)^i x_0$, όπου $m > n$. Έτσι το εμβαδόν R_1 του πρώτου ορθογωνίου είναι

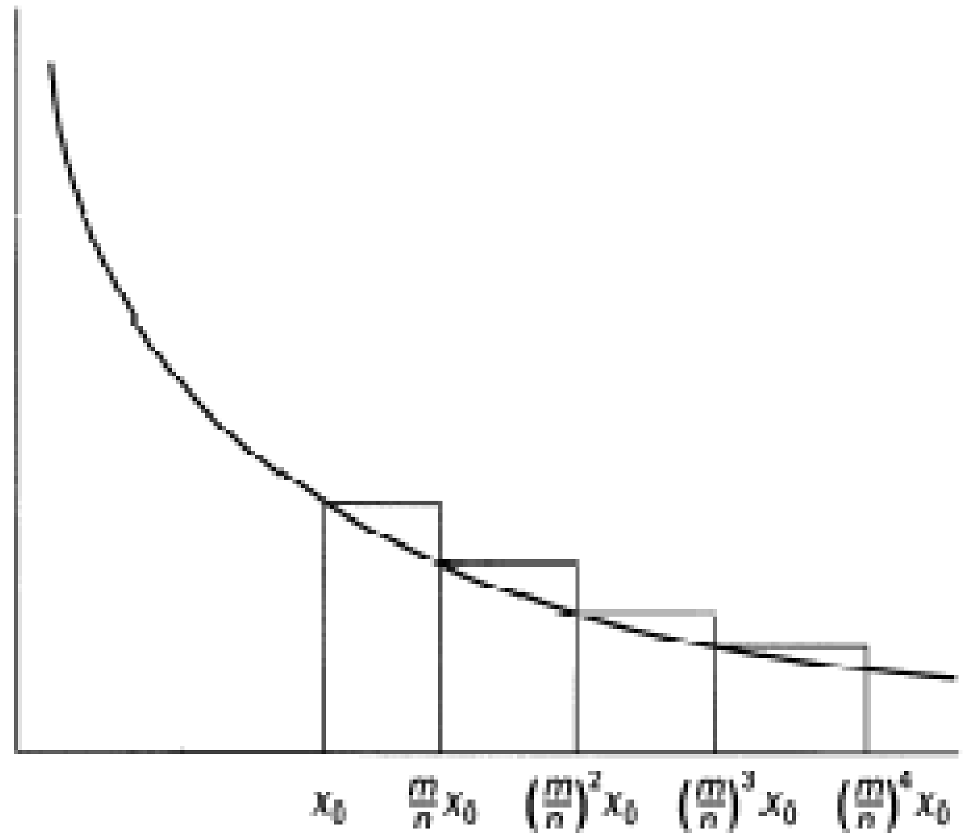
$$R_1 = x_0(\frac{m}{n} - 1)x_0^{-k} = (\frac{m}{n} - 1)x_0^{-k+1}$$

Αν R_i είναι το εμβαδόν του i-στου ορθογωνίου τότε

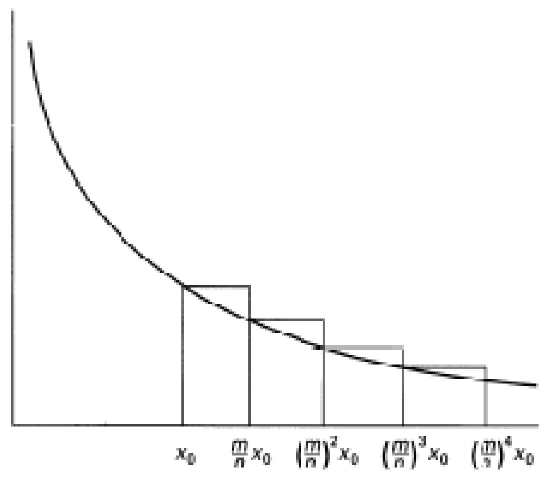
$$R_i = (\frac{n}{m})^{(i-1)(k-1)}R_1$$

Αθροίζουμε άπειρα εμβαδά:

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ


x_0
$\frac{m}{n}x_0$
$\left(\frac{m}{n}\right)^2 x_0$
$\left(\frac{m}{n}\right)^3 x_0$
$\left(\frac{m}{n}\right)^4 x_0$

(Fermat)



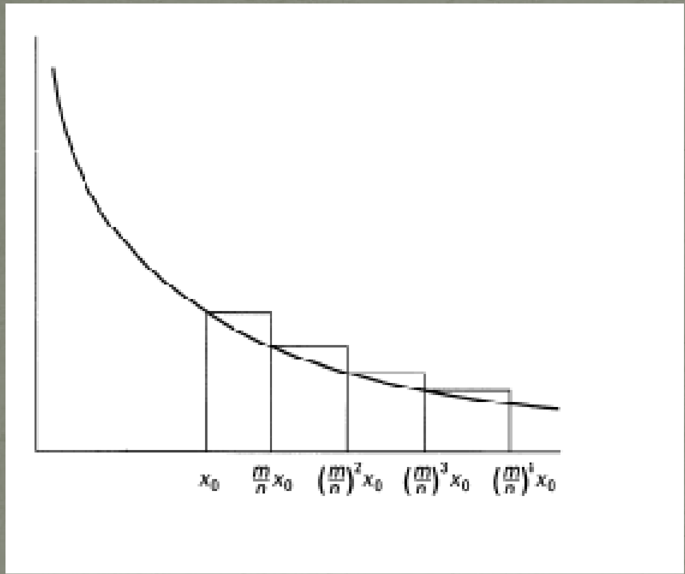
Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν A της περιοχής κάτω από τη καμπύλη $y = x^{-k}$, τον άξονα των x και στα δεξιά του x_0 θα δημιουργήσουμε ορθογώνια όπως στην εικόνα. Η βάση του i-στού ορθογώνιου ορίζεται από τα σημεία $(m/n)^{i-1}x_0$ και $(m/n)^i x_0$, όπου $m > n$. Έτσι το εμβαδόν R_1 του πρώτου ορθογωνίου είναι

$$R_1 = x_0(\frac{m}{n} - 1)x_0^{-k} = (\frac{m}{n} - 1)x_0^{-k+1}$$

Αν R_i είναι το εμβαδόν του i-στου ορθογωνίου τότε

$$R_i = (\frac{n}{m})^{(i-1)(k-1)}R_1$$

Αθροίζουμε άπειρα εμβαδά:



$$R_1(1+(\frac{n}{m})^{(k-1)}+(\frac{n}{m})^{2(k-1)}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{x_0^{k-1}}\;\frac{1}{\frac{n}{m}+(\frac{n}{m})^2+\cdots+(\frac{n}{m})^{k-1}}$$

Όταν m/n τείνει στην μονάδα τότε στον παρανομαστή κάθε όρος $(m/n)^i$ τείνει στην μονάδα και έτσι

$$A=\frac{1}{k-1}\;\frac{1}{x_0^{-k+1}}$$

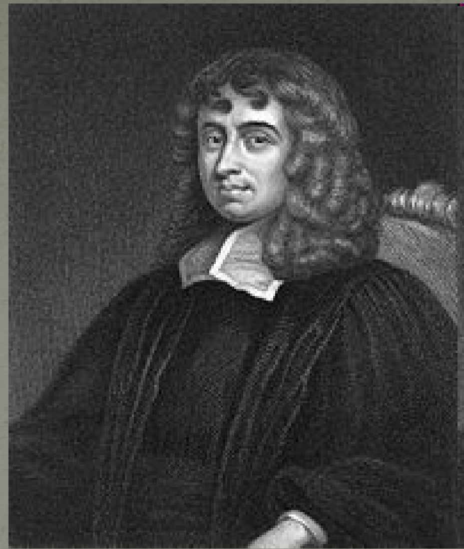
Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού

1 Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$.

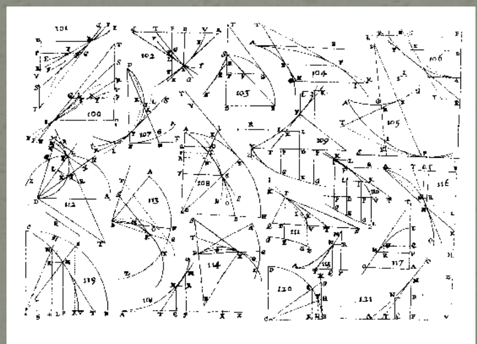
2 Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$

Barrow (1630-1677)
(ιερέας)

Καθηγητής αρχαίων Ελληνικών
και Μαθηματικών (1663-1669) στο
πανεπιστήμιο του Cambridge
εκλέχτηκε: Fellow of Royal Society (1663)



υποννόησε αντίστροφη σχέση ανάμεσα στα προβλήματα των εφαπτομένων
και αυτά του τετραγωνισμού (“Lectiones geometricae”)



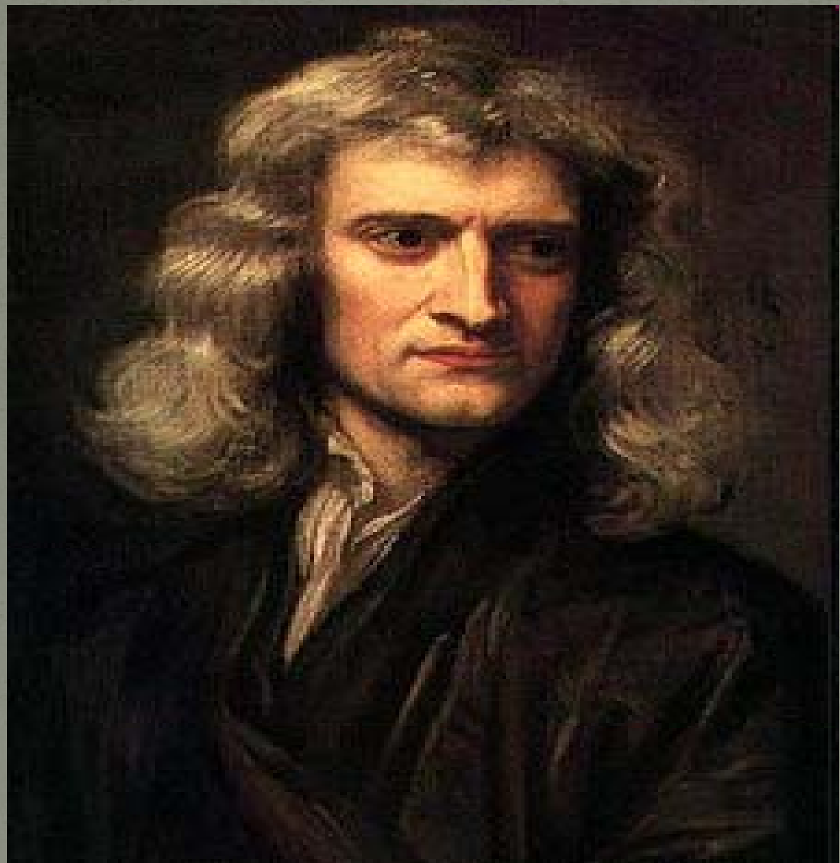
James Gregory
1638-1675

(παραγνωρισμένο το έργο του για το θεμελικώδες θεώρημα του Λογισμού, σειρές Taylor (δημοσιεύθηκαν από Taylor το 1716) και άλλα πολλά …)

Christian Huygens
Netherlands
(1629-1695)

Σημαντική Μαθηματική φυσιογνωμία της εποχής.
Διαμάχη με τον Gregory.

Newton (1642-1727) Άγγλος



Plato is my friend — Aristotle is my friend — but my greatest friend is truth.

(ημερολόγιο στα Λατινικά, με τίτλο *Quaestiones Quaedam Philosophicae* , 1664)

If I have seen further it is only by standing on the shoulders of giants.

(γράμμα στον Hooke to 1676)

Κολλέγιο 1661 (Μαθηματικά διαβάσματα 1661-1664)

«Στοιχεία» Ευκλείδη

«Geometria a Renato Des Cartes» Schooten

«Οπτική» Kepler

έργα του Viete

«Arithmetica infinitorum» Wallis

διαλέξεις του Barrow

έργο των Galilei, Fermat, Huygens

Νεανικά χρόνια

1665

Συναρτήσεις ως δυναμοσειρές

Ρυθμός μεταβολής μεγεθών ως προς τον χρόνο: fluxion

1665-1666

- θεώρημα του διωνύμου (περιγραφή σε γράμμα 1676, δημοσίευση από Wallis το1685)
- απειροστικός λογισμός
- νόμος της βαρύτητας
- φύση των χρωμάτων

Θεώρημα του διωνύμου
(ανακάλυψη: 1665, περιγραφή σε δύο γράμματα το 1676, δημοσίευση από τον Wallis το1685)

Έστω $r \in \mathbb{Q}$.

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

Θεώρημα του Δυωνύμου ήταν γνωστό όταν n είναι θετικός ακέραιος

$$(x+y)^n =$$

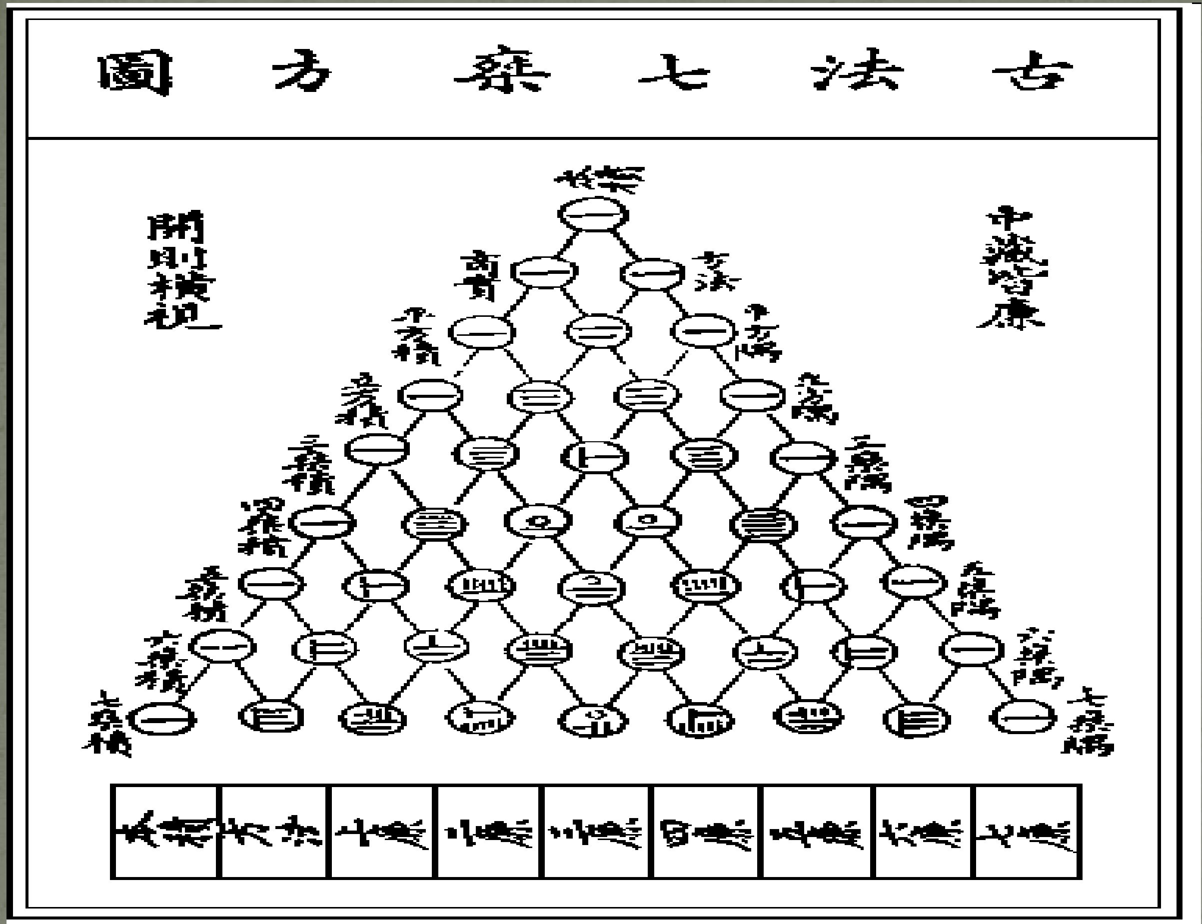
$$x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(τρίγωνο του Pascal)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 186 715 1287 1716 1716 1287 715 186 78 13 1



τρίγωνο του Khu Shijiei, βάθος 8, 1303.

Blaise Pascal (1623-1662)

υπολογιστική μηχανή
του Pascal(1642)

Η γενική περίπτωση

Έστω $r \in \mathbb{Q}$.

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

Όταν r είναι θετικός ακέραιος, τότε το άθροισμα είναι πεπερασμένο
Διαφορετικά το άθροισμα είναι άπειρο.

Πότε συγκλίνει αυτή η σειρά?

Παράδειγμα για n= - 1

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

- $\binom{-1}{0} = 1$
- $\binom{-1}{1} = (-1)$
- $\binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1$
- $\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1$
- $\binom{-1}{4} = 1$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Παράδειγμα για n=1/2

$$\binom{1/2}{k} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}$$

- $\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$
- $\binom{1/2}{2} = \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}{2} = \frac{-1}{8}$
- $\binom{1/2}{3} = \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{(\frac{1}{2}-2)}{3} = \frac{-1}{8}\frac{(\frac{1}{2}-2)}{3} = \frac{-1}{8}\frac{-3/2}{3} = \frac{1}{16}$

$$(1-x^2)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-x^2)^k =$$

$$\binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}(-x^2) + \binom{1/2}{2}(-x^2)^2 +$$

$$\binom{1/2}{3}(-x^2)^3 + \cdots =$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$$