Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

13.05.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Marin Mersenne (Γαλλία) 1588-1648

«Ινστιτούτο (ανταλλαγής γνώσεων) μαθηματικών»

πρώτοι αριθμοί του Mersenne

$$2^p - 1$$

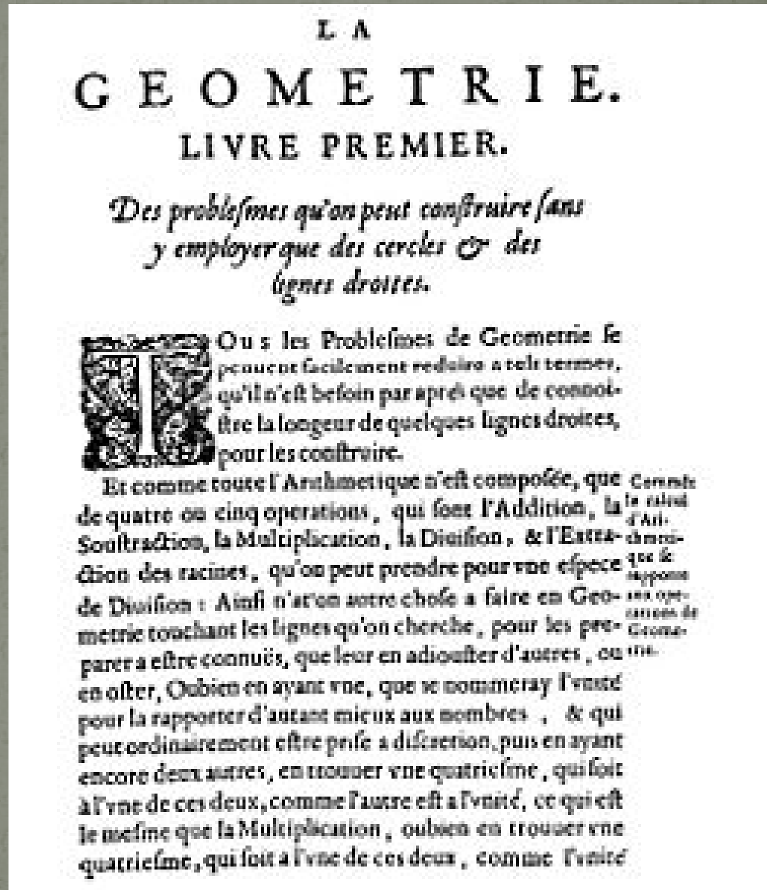
René Descartes (Γαλλία) 1596-1650 φιλόσοφος

“Cogito ergo sum”

1637 “La dioptrique”, “Les meteores”, “La geometrie”


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIϽ IϽ C XXXVII.
Avec Privilege.


LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.
Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision: Ainsi n'a-t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Καρτεσιανή γεωμετρία = αναλυτική γεωμετρία

Στόχος του:

«κάθε πρόβλημα της γεωμετρίας μπορεί εύκολα να μετατραπεί έτσι ώστε η γνώση των μηκών ορισμένων ευθύγραμμων τμημάτων να αρκεί για την κατασκευή του.»

Συστηματική χρήση της συμβολικής άλγεβρας:

σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός είναι βασισμένος στον συμβολισμό του Descartes.

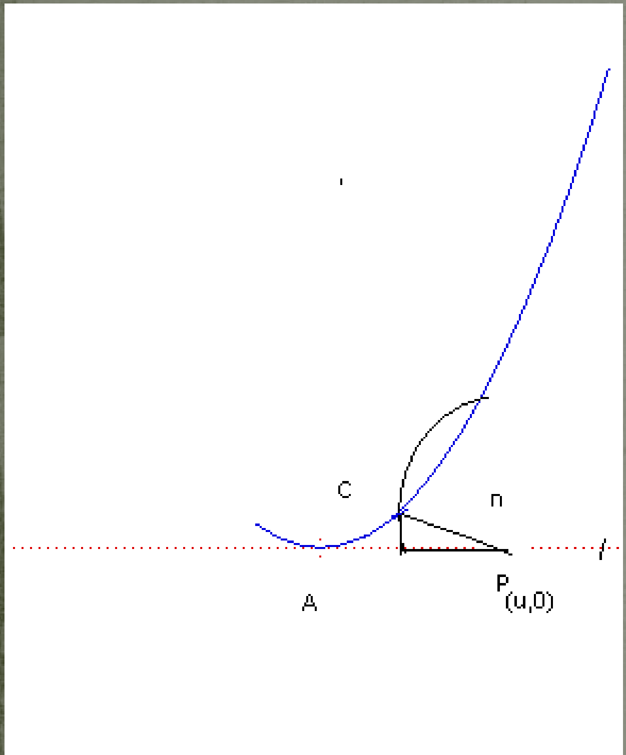
(μετατροπή ενός γεωμετρικού προβλήματος σε αλγεβρικό)

Descartes και Λογισμός

Το πρόβλημα της εφαπτομένης

(Descartes για την μέθοδό του)

leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géométrie.



Θα βρούμε το κέντρο P του εφαπτόμενου κύκλου της καμπύλης ACE

$$y = x^2$$

στο σημείο $C: \ (x_0, x_0^2)$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι

$$n^2 = y^2 + (v - x)^2$$

Τα σημεία τομής του κύκλου και της παραβολής προκύπτουν από την αντικατάσταση του y, δηλαδή από την εξίσωση

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή θα έχει διπλή ρίζα στο x_0 αν

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 = (x - x_0)^2 q(x)$$

Άρα

$$x^4+x^2-2vx+v^2-n^2 = (x-x_0)^2(x^2+ax+b)$$

και επομένως

$$a - 2x_0 = 0$$

$$b - 2x_0 a + x_0^2 = 1$$

$$a x_0^2 - 2b x_0 = -2v$$

$$b x_0^2 = v^2 - n^2$$

Άρα

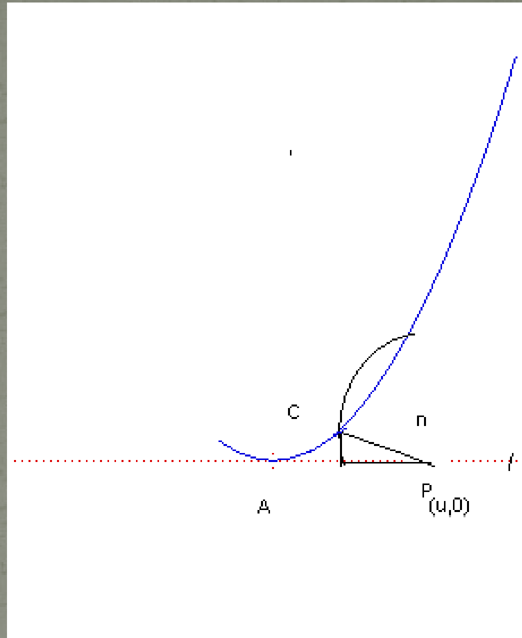
$$v = 2x_0^3 + x_0$$

και η κλίση της ακτίνας του κύκλου είναι

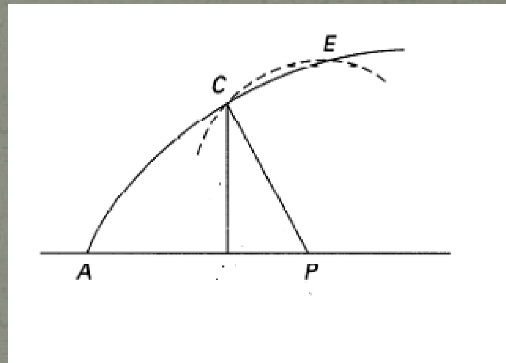
$$\frac{-y_0}{v - x_0} = \frac{-x_0^2}{2x_0^3} = \frac{-1}{2x_0}$$

ενώ η κλίση της εφαπτομένης είναι $2x_0$.

Πράγματι η παράγωγος του $y = x^2$ στο x_0 είναι $2x_0$.



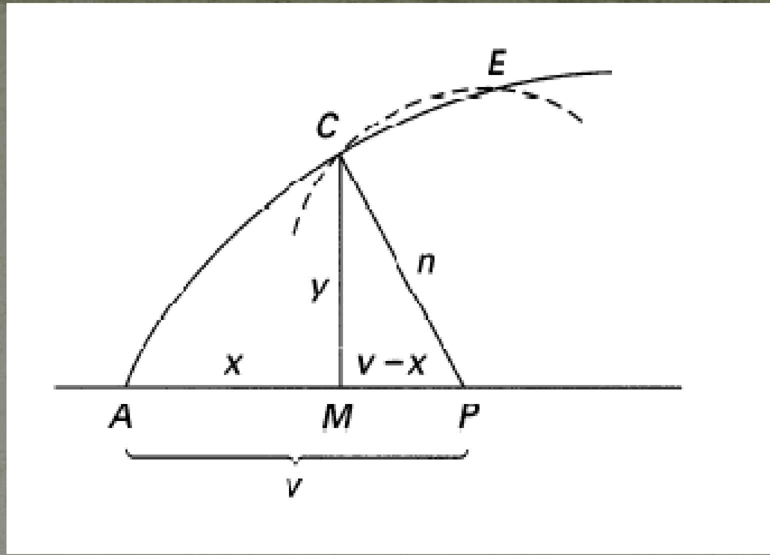
Στη μέθοδό του ο Descartes βρισκει την κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη της καμπύλης



Βρίσκει τον κύκλο (δηλ. το κέντρο του κύκλου) που εφάπτεται της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο.

Η ακτίνα του κύκλου είναι η ζητούμενη κάθετος.

Ο κύκλος έχει την ιδιότητα να τέμνει τη καμπύλη ακριβώς σε ένα σημείο. Τοποθετεί τον κύκλο σε άξονα συντεταγμένων.



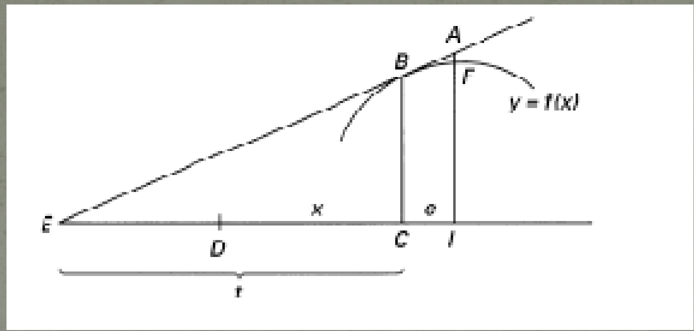
Ο άξονας των x είναι η ευθεία AP. x είναι το ευθύγραμμο τμήμα AM. Αν y=f(x) είναι η εξίσωση της καμπύλης τότε το σημείο C πάνω στη καμπύλη ACE απέχει y από την ευθεία AP.

Ο κύκλος με κέντρο P: το ευθύγραμμο τμήμα AP έχει μήκος v και το P απέχει απόσταση 0 από τον άξονα των x, δηλαδή P: (v,0). Η ακτίνα n=PC δίνεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Το n καθορίζεται από το v, αφού η μία πλευρά του τριγώνου είναι v-x, και η άλλη πλευρά είναι y=f(x). Ψάχνουμε να βρούμε το v.

Pierre de Fermat (Γαλλία) 1601-1665 δικηγόρος

ουσιαστική συμβολή στην ανάπτυξη της Αναλυτική Γεωμετρίας με τη μελέτη
Ad locos planos et solidos isagoge
(1636, χειρόγραφο)
Ημερομηνία δημοσίευσης: 1679

Fermat και εφαπτομένη μίας καμπύλης



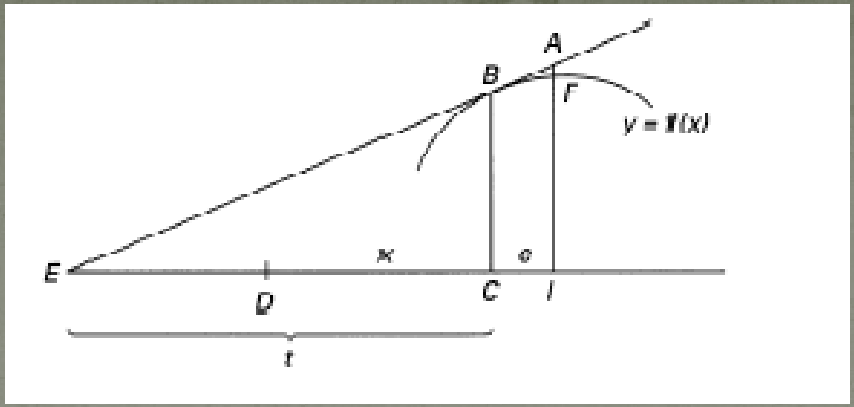
ΙΔΕΑ: Έστω Β το σημείο της καμπύλης y=f(x), και Α πάνω στην εφαπτομένη. Αν το Α είναι πολύ κοντά στο Β και F είναι το σημείο τομής της καμπύλης και του ευθ. τμήματος ΑΙ (που είναι κάθετο στον άξονα των x) τότε ΑΙ είναι σχεδόν ίσο με το FI.

Θέλουμε να βρούμε την κλίση της ΕΑ, δηλ. το BC/EC.

Το τμήμα EC έχει μήκος t, (το t είναι άγνωστο.)

Τονίζουμε ότι ο άξονας των x είναι η ευθεία EC και ότι το τμήμα DC έχει μήκος x.

Το τμήμα BC έχει μήκος f(x).



Από τα όμοια τρίγωνα AEI και BEC προκύπτει ότι

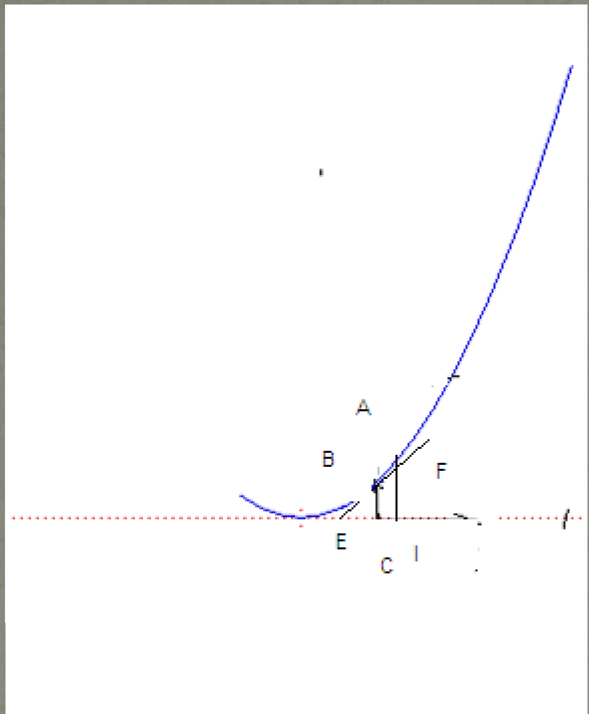
FI/BC είναι σχεδόν ίσο με EI/EC.

Όταν λοιπόν το e είναι πολύ μικρό τότε

f(x+e)/f(x) **είναι σχεδόν ίσο με** (t+e)/t

Και επομένως

t f(x+e) **είναι σχεδόν ίσο με** (t+e) f(x).



Θα βρούμε την κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη $f(x) = x^2$ στο σημείο $B : (x_0, x_0^2)$.

Αφού

$$\frac{f(x_0 + e)}{f(x)} \approx \frac{t+e}{t}$$

έπεται ότι

$$tf(x_0 + e) \approx (t+e)f(x_0)$$

και

$$tx_0^2 + 2tx_0e + te^2 \approx tx_0^2 + ex_0^2 .$$

Άρα

$$2tx_0 + te \approx x_0^2$$

και θέτοντας $e = 0$ βρίσκουμε ότι

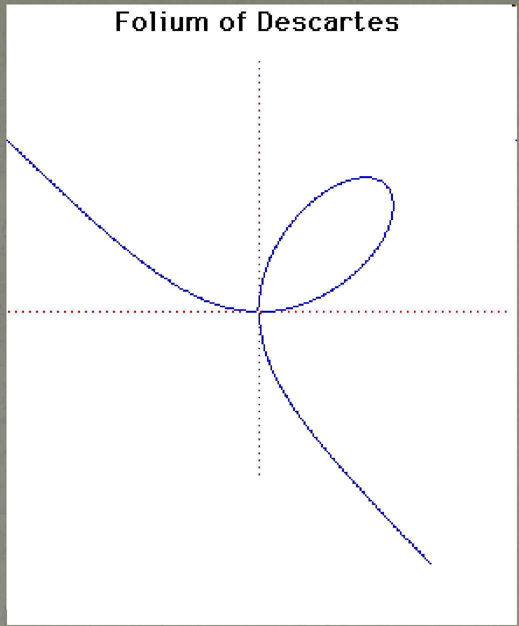
$$2t = x_0$$

Επομένως η κλίση της εφαπτομένης είναι

$$\frac{x_0^2}{t} = 2x_0$$

Ισοδυναμεί η μέθοδος του Fermat με την εύρεση του ορίου

$$\lim_{e \longrightarrow 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e}$$



Η καμπύλη του Descartes (1638)
και η πρόκληση
στον Fermat να βρει την εφαπτομένη.

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$