Ιστορία των Μαθηματικών

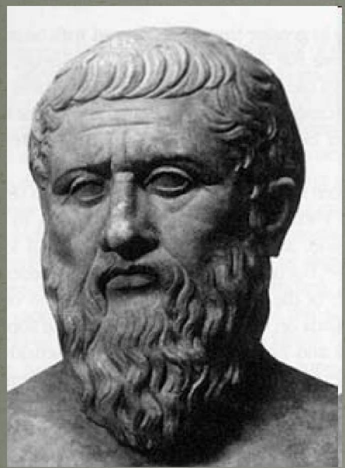
Εαρινό εξάμηνο 2014

13.03.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Πλάτων (427-347)
Αθήνα



“Ουδείς αγεωμέτρητος εισί”

Ακαδημία (387 π.Χ. -529 μ.Χ.)
Αθήνα

‘Εντονες πυθαγόρειες επιδράσεις.

Η Γεωμετρία και τα Μαθηματικά έχουν μια ξεχωριστή θέση.

Στον κόσμο των ιδεών τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν την τέλεια μορφή. Στον κόσμο των αισθήσεων τα αντικείμενα προσπαθούν να μοιάσουν την τέλεια μορφή τους.

Δήλιο πρόβλημα

Ο χρησμός που δόθηκε στους Δηλίους κατά τη διάρκεια λοιμού, περίπου το 430 π.Χ. συμβούλευε να κατασκευάσουν ένα κυβικό βωμό διπλάσιου μεγέθους από αυτόν που ήδη υπήρχε.

ερμηνεία του Πλάτωνα: οι θεοί θέλουν οι Έλληνες να ασχοληθούν περισσότερο με τη γεωμετρία και τα μαθηματικά.

Τα περίφημα Άλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητας

Ο Διπλασιασμός του κύβου: να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη κύβος όγκου διπλασίου του όγκου δοθέντος κύβου.

Ο Τετραγωνισμός του κύκλου: να κατασκευασθεί με κανόνα και διαβήτη τετράγωνο εμβαδού ίσου με το εμβαδόν δοθέντος κύκλου

Η τριχοτόμηση γωνίας: να χωριστεί με κανόνα και διαβήτη δοθείσα γωνία σε τρία ίσα μέρη

- Τα προβλήματα ήταν ευρέως γνωστά: γίνεται ήδη αναφορά από τον 5ο αιώνα π.Χ. σε θεατρικά έργα της εποχής (βλ. Ευριπίδη (485 π.Χ.-407 π.Χ), Αριστοφάνη (452-385 π.Χ.)

- 1. διπλασιασμός κύβου= «κατασκευή» της $\sqrt[3]{2}$

- Τετραγωνισμός κύκλου= «κατασκευή» $\sqrt{\pi}$

- Τριχοτόμηση γωνίας θ→ κατασκευή τμήματος μήκους cos θ

Οι Έλληνες βρήκαν λύσεις για αυτά προβλήματα που όμως χρησιμοποιούσαν και άλλα εργαλεία.

Για παράδειγμα :

Εύδοξος ο Κνίδιος(408-355π.Χ.) χρησιμοποίησε μία πολυωνυμική καμπύλη τετάρτου βαθμού για τον διπλασιασμό του κύβου.

Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) χρησιμοποίησε την έλικα για να τετραγωνίσει τον κύκλο.

Ο Ιππίας (4ος αιώνας π.Χ.) για την τριχοτόμηση γωνίας χρησιμοποίησε μία μη αλγεβρική καμπύλη.

Ποιοί πραγματικοί είναι τελικά «κατασκευάσιμοι» με κανόνα και διαβήτη?

Η απάντηση βασίζεται στην άλγεβρα (!)

Για να είναι a κατασκευάσιμος, είναι αναγκαίο ο a να είναι αλγεβρικός, δηλ. να είναι ρίζα κάποιου πολυωνύμου με συντελεστές στο Q. Και το ελαχίστου βαθμού πολυώνυμο που έχει τον a ως ρίζα πρέπει να έχει βαθμό κάποια δύναμη του 2.

διπλασιασμός του κύβου αδύνατον αφού το ελάχιστο πολυώνυμο της κυβικής ρίζας του 2 έχει βαθμό 3…

Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατον αφού το π δεν είναι καν αλγεβρικός αριθμός.

Lindermann (1882)

Η τριχοτόμηση της γωνίας δε μπορεί να γίνει για γωνία 60 μοιρών.

Εύδοξος από την Κνίδο (408-355) μαθηματικός, φιλόσοφος, αστρονόμος, γεωγράφος.

Πριν: Σύμφωνα με την πυθαγόρεια αντιμετώπιση η διαγώνιος και η ακμή τετραγώνου δεν είναι συγκρίσιμα.

Ορισμός Ευδόξου:

δύο μεγέθη είναι συγκρίσιμα και σχηματίζουν λόγο όταν (ακέραιο) πολλαπλάσιο του ενός ξεπερνά το άλλο, («Στοιχεία» του Ευκλείδη, Βιβλίο 5, ορισμός 4).

Παράδειγμα:

1. μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος και το εμβαδόν ενός σχήματος δεν συγκρίνονται μεταξύ τους.
2. Η διαγώνιος και η ακμή του τετραγώνου σχηματίζουν λόγο.

Θα συμβολίσουμε τον λόγο ανάμεσα στα a και b με a:b.

Πότε είναι δύο λόγοι ίσοι? Πότε είναι δύο λόγοι άνισοι?

(τι είδους ποσότητες είναι οι λόγοι?) Παρόλο που διαφορετικού «τύπου» μεγέθη δε σχηματίζουν λόγο, μπορούμε να συγκρίνουμε λόγους, (ακόμα και αν αυτοί προέρχονται από διαφορετικού τύπου μεγέθη).

Για να είναι $a:b = c:d$ θα πρέπει για κάθε ζευγάρι (m, n) ακεραίων θα πρέπει να ισχύει

1. αν $ma<nb$ τότε $mc<nd$
2. αν $ma=nb$ τότε $mc=nd$
3. αν $ma>nb$ τότε $mc>nd$

Προκύπτει ότι:

Αν $a:b > c:d$ τοτε για $e < a$ ισχυει ότι $e:b = c:d$.

(Σήμερα θα λέγαμε: $a:b = c:d$ αν και μόνο αν $ad=bc$.

Είναι οι δύο ορισμοί ισοδύναμοι? Γιατί δεν όρισε έτσι ο Εύδοξος την ισότητα των λόγων? Τι προυποθέτει ο σύγχρονος ορισμός?)

Παράδειγμα 1 με τον ορισμό του Ευδόξου: Ισχύει ότι $3:6 = 4:8$

αν (m,n) έτσι ώστε m 3<n 6 τότε m<2 n και m 4<n 8

αν (m,n) έτσι ώστε m 3=n τότε m=2 n και m 4=n 8

αν (m,n) έτσι ώστε m 3>n 6 τότε m>2 n και m 4>n 8

Παράδειγμα 2. Πρόταση :

Έστω κύκλοι c και C, με διαμέτρους d και D, εμβαδά a και A. Τότε

$$a : A = d^2 : D^2$$

(θα δώσουμε σκίτσο απόδειξης της Πρότασης,
για τη πλήρη απόδειξη, βλ. Ευκλείδη, βιβλίο 12.)

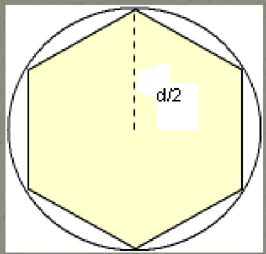
Λήμμα (Εύδοξος): Αν από ένα μέγεθος αφαιρέσουμε ένα τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του, και από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε πάλι τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του και αν συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία των αφαιρέσεων, θα καταλήξουμε σε μέγεθος μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους.

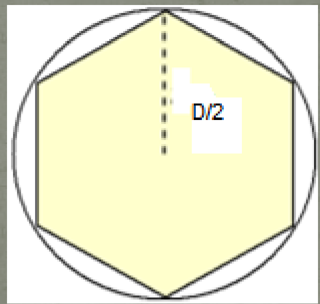
Το Λήμμα αποδίδεται και αυτό στον Εύδοξο και είναι η Πρόταση 1 στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, βιβλίο 10. (δηλ. δίνεται με απόδειξη!)

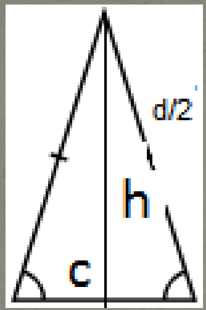
Πρώτα δείχνουμε ότι ισχύει αντίστοιχο θεώρημα για τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται στους κύκλους.

Προκαταρτική Πρόταση: Έστω δύο κανονικά πολύγωνα με n ακμές , εγγεγραμμένα σε δύο κύκλους με ακτίνα d και D και με εμβαδά p_n και P_n

Τότε $d^2 : D^2 = p_n : P_n$







Πράγματι, το εμβαδό t του Ισοσκελούς Τριγώνου της εικόνας είναι

$$t = c\sqrt{\frac{d^2}{4} - c^2} = \frac{cd}{2}\sqrt{1 - 4\frac{c^2}{d^2}}$$

Έτσι αν έχουμε δύο όμοια ισοσκελή τρίγωνα με πλευρές d/2 και D/2 και βάσεις 2c και 2C αντίστοιχα, έπεται ότι c/d= C/D και άρα για τα εμβαδά τους t και T έχουμε τη σχέση

$$\frac{t}{T} = \frac{d^2}{D^2}$$

Τα κανονικά πολύγωνα που συγκρίνουμε είναι αθροίσματα τέτοιων τριγώνων Άρα ισχύει και ο ζητούμενος λόγος για τα εμβαδά τους.

Πίσω στη Πρόταση για τους κύκλους: Έστω κύκλοι c και C, με διαμέτρους d και D, εμβαδά a και A. Τότε

$$a : A = d^2 : D^2$$

Για τον λόγο a:A έχουμε τρείς περιπτώσεις

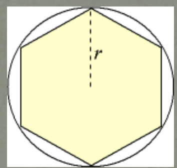
$$a : A = d^2 : D^2, \quad a : A < d^2 : D^2, \quad a : A > d^2 : D^2$$

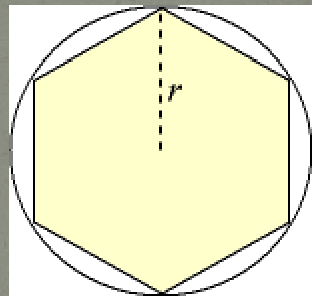
Θα αποκλείσουμε τις δύο τελευταίες περιπτώσεις.

Έστω ότι $a : A > d^2 : D^2$.

Τότε υπάρχει a' έτσι ώστε $a' < a, \quad a' : A = d^2 : D^2$.

Θέτουμε e=a-a' . Εγγράφουμε κανονικά πολύγωνα στους δύο κύκλους





Διπλασιάζουμε ταυτόχρονα στους δύο κύκλους τις πλευρές των πολυγώνων . Κάθε φορά που διπλασιάζουμε τον αριθμό των πλευρών, το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα στο κύκλο και στο πολύγωνο μικραίνει. Κάποια στιγμή σύμφωνα με το πρώτο Λήμμα, όταν ο αριθμός ακμών n είναι αρκετά μεγάλος θα ισχύει ότι

$$a - p_n < e \Rightarrow a - p_n < a - a' \Rightarrow p_n > a'$$

Όμως $p_n : P_n = d^2 : D^2 = a' : A$

Άρα $P_n > A$ άτοπο.

Η άλλη περίπτωση $a : A < d^2 : D^2$ γίνεται με τον ίδιο τρόπο (άσκηση). Να ελεγχθεί επίσης ότι το εμβαδόν ανάμεσα στο κύκλο και το πολύγωνο μικραίνει τουλάχιστον κατά το ½ για να εφαρμοστεί το Λήμμα του Ευδόξου.

Τελικά τι είναι οι πραγματικοί αριθμοί?
Τι ακριβώς είναι οι άρρητοι?

Ο ορισμός των λόγων του Ευδόξου ενέπνευσε τον Dedekind
στην προσπάθεια της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών.

Πως ορίζονται αξιωματικά από το σύστημα των ρητών αριθμών
οι πραγματικοί αριθμοί?

Είναι το ρίζα 2 «όμοιο» με το π?