Ιστορία των Μαθηματικών

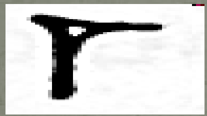
Εαρινό εξάμηνο 2014

6.03.14

Χ. Χαραλάμπους

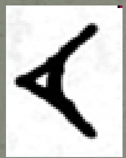
ΑΠΘ

Αρίθμηση στη Βαβυλωνία: βάση 60, συνδυασμός με 10, εξαρτώμενη από τη θέση των ψηφίων

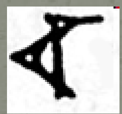


1 (και 60)

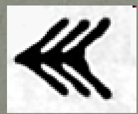
8



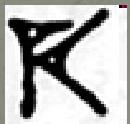
10



11



30



70

79883=

$(22*60^2)+(11*60)+23$

Πράξεις στην Βαβυλωνία

- Δεν έχουν βρεθεί πίνακες για πρόσθεση.

- Έχουν βρεθεί πολλοί πίνακες για τον πολλαπλασιασμό:

  Έτσι ένας πίνακας για τον αριθμό a περιλαμβάνει τα πολλαπλάσια

  1 x a,…, 20 x a, 30 x a, 40 x a, 50 x a

- Έχουν βρεθεί επίσης πίνακες αντιστρόφων: δηλαδή δυάδες που δίνουν το 1, 60 ή γενικότερα δυνάμεις του 60.

Πίνακας (κανονικών) αριθμών και αντιστρόφων (γράφουμε με αραβικά ψηφία αλλά χρησιμοποιούμε τη βαβυλωνιακή αντιστοίχιση (7,30= 7+30/60)

2	30	16	**3,45**	**45**	**1,20**
3	**20**	**18**	3,20	48	1,15
4	15	20	3	50	1,12
5	12	24	2,30	54	1,6,40
6	10	25	2,24	1	1
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9	6,40	30	2	1,12	50
10	6	32	1,52,30	1,15	48
12	5	36	1,40	1,20	45
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40

«Κανονικοί» αριθμοί είναι αυτοί που οι αντίστροφοί τους γράφονται με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων στα βαβυλωνιακά---(με βάση το 60).

Είναι οι αριθμοί που οι μόνοι τους διαιρέτες είναι 2,3,5, (δηλαδή οι διαιρέτες του 60).

Απόδειξη?

Για την εύρεση αντιστρόφων κανονικών αριθμών εκτός πίνακα αντιστρόφων οι Βαβυλώνιοι εφάρμοζαν μία μέθοδο που (σε κάθε σταδιο) ανήγαγε το πρόβλημα εύρεσης του $1/n$ σε εύρεση κατάλληλων x,y έτσι ώστε $x+y=n$ και τουλάχιστον ένα από τα x,y να είναι σε πίνακα αντιστρόφων:

Neugebauer, O. (1935-37). *Mathematische Keilschrifttexte I-III (MKT). Berlin, Springer*

Η διαίρεση γίνεται χρησιμοποιώντας

1) τους πίνακες πολλαπλασιασμού και
2) τους πίνακες των αντιστρόφων.

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$$

- Έχουν βρεθεί πίνακες με τετράγωνα, τετραγωνικές ρίζες, κύβους και κυβικές ρίζες.

Γραμμικές εξισώσεις και αρχαίοι Βαβυλώνιοι

Πρόβλημα από την πλακέτα (σε ελεύθερη μετάφραση):
Ένα χωράφι παράγει 2/3 «κιλού σπόρων» ανά «μονάδα εμβαδού» ενώ το άλλο χωράφι παράγει 1/2 «κιλό σπόρων» ανά «μονάδα εμβαδού» Τα εμβαδά των δύο χωραφιών είναι 1800. Κάποια χρονιά το πρώτο χωράφι παρήγαγε 500 κιλά περισσότερους σπόρους από το άλλο. Ποια είναι τα εμβαδά?

Σύγχρονη αλγεβρική (γραμμική άλγεβρα) αντιμετώπιση:
Έστω x, y τα αντίστοιχα εμβαδά. Τότε
$x + y = 1800$ και
$2/3\, x - 1/2\, y = 500$

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

x+ y = 1800

2/3 x -1/2 y =500

Επίλυση με γραμμική άλγεβρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1800 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 500 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1200 \\ 0 & 1 & 600 \end{bmatrix}$$

x=1200, y=600

Μέθοδος επίλυσης σύμφωνα με την πλακέτα (ελεύθερη μετάφραση):

Θέτουμε x και y να είναι 900. Τότε

2/3* 900-1/2 *900=150.

Η διαφορά από το 500 είναι 350.

Προσθέτουμε 300 στο 900 και η απάντηση για το x είναι 1200.

Αφαιρούμε το 300 από το 900 και η απάντηση για το y είναι 600.

Εξήγηση της μεθόδου:

Στη μία εξίσωση τα x,y έχουν τους ίδιους συντελεστές. Βλέπουμε τι γίνεται αν είναι ίσα. Η λύση σύμφωνα με αυτήν την εξίσωση είναι 900. Η επιλογή αυτή δεν είναι σωστή αφού η άλλη εξίσωση δεν ικανοποιείται: υπάρχει η διαφορά των 350.

Αν αυξήσουμε κατά μία μονάδα το x δηλαδή το κάνουμε 901 και μειώσουμε κατά μία μονάδα το y και το κάνουμε 899 τότε

901 +899=1800 ενώ 2/3*901 -1/2*899= 150+7/6.

Πράγματι:

(2/3 (x+1) -1/2(y-1))-(2/3 x -1/2 y) =2/3+1/2=7/6.

Έτσι αν προσθέσουμε s μονάδες στο 900 και το κάνουμε 900+s και αφαιρέσουμε s μονάδες από το 900 και έχουμε 900-s τότε το αποτέλεσμα αλλάζει κατά 7/6 s.

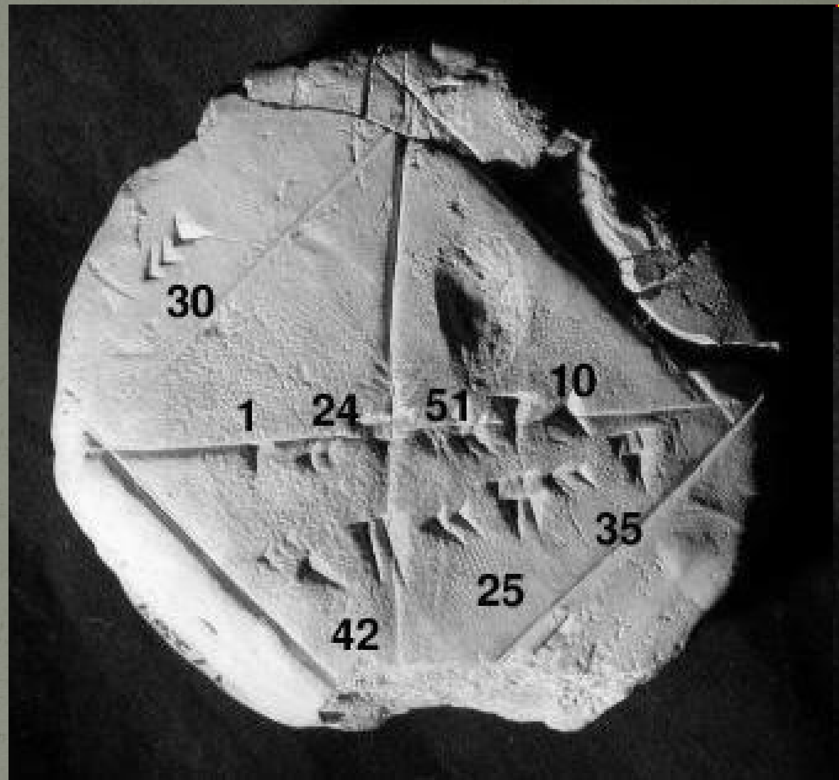
Για να ικανοποιηθεί η δεύτερη εξίσωση θα πρέπει

7/6 s να καλύψει τη διαφορά των 350 μονάδων. Άρα 7/6 s=350 και s=300.

Συμπέρασμα

Οι Βαβυλώνιοι κατείχαν την έννοια της αναλογίας των τριών!

Η πλακέτα (1800 π.Χ.) τώρα βρίσκεται στη συλλογή στο Yale



30
1
24
51
10
35
25
42

Ο αριθμός στη διαγώνιο είναι ο
1,24,51,10 όπου

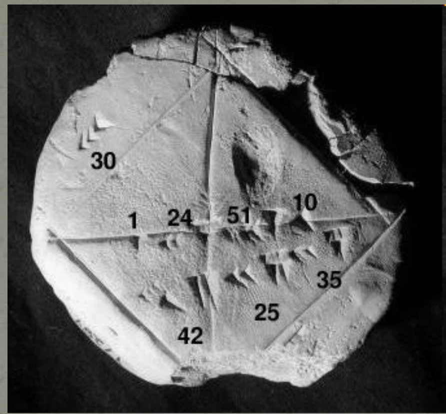
$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.41421296$$

Αναγνωρίζουμε τον αριθμό αυτό ως προσέγγιση της τετραγωνική ρίζα του 2

$$\sqrt{2}$$

- Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στους τρεις αριθμούς?

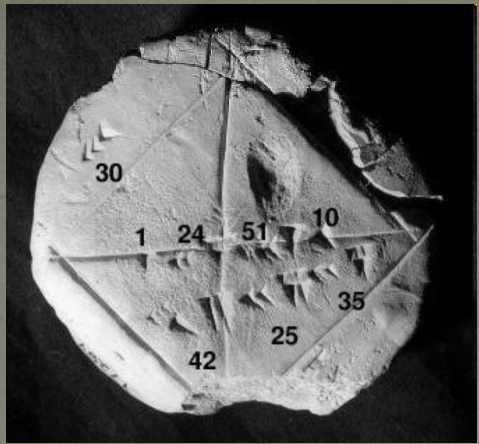
30
1,24,51,10
42,25,35



***ο τρίτος αριθμός προκύπτει από τους άλλους δύο ως το γινόμενο τους ***

Πολλαπλασιασμός με το 30 είναι το ίδιο με τη διαίρεση με το 2 αφού 30 *2=60

•



Πόσο είναι το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με ακμή a?

$$\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Αν λοιπόν 30 είναι το μήκος της ακμής του τετραγώνου, τότε 42,25,35=30* 1,24,51, 10 είναι το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου!

Η πλάκα υποδεικνύει ότι αν το μήκος μιας ακμής του τετραγώνου είναι 30 τότε για να βρούμε το μήκος της διαγωνίου πολλαπλασιάζουμε 30 με το 1,24,51, 10.

- Οι Βαβυλώνιοι είχαν γνώση του Πυθαγορείου Θεωρήματος(?)

- Είχαν αναπτύξει κάποια τεχνική για την εύρεση τετραγωνικών ριζών.

a_1

a_1

Η τεχνική που πιστεύουμε ότι είχαν αναπτύξει την αποκαλούμε σήμερα μέθοδο των Βαβυλωνίων ή μέθοδο του Ήρωνα (150 μ.Χ). Η μέθοδος αυτή μοιάζει ιδιαίτερα με τη μέθοδο του Νεύτωνα (1642-1727):

για να βρούμε τη τετραγωνική ρίζα του b ξεκινάμε με μία τιμή a_1 . Στη συνέχεια παίρνουμε $a_2 = 1/2(a_1 + b/a_1)$ κ.ο.κ.ε.

$\sqrt{2}$

1.41421296 τιμή των Βαβυλωνίων

1.41421356 **τιμή (**προσέγγιση) έως 8 δεκαδικά ψηφία

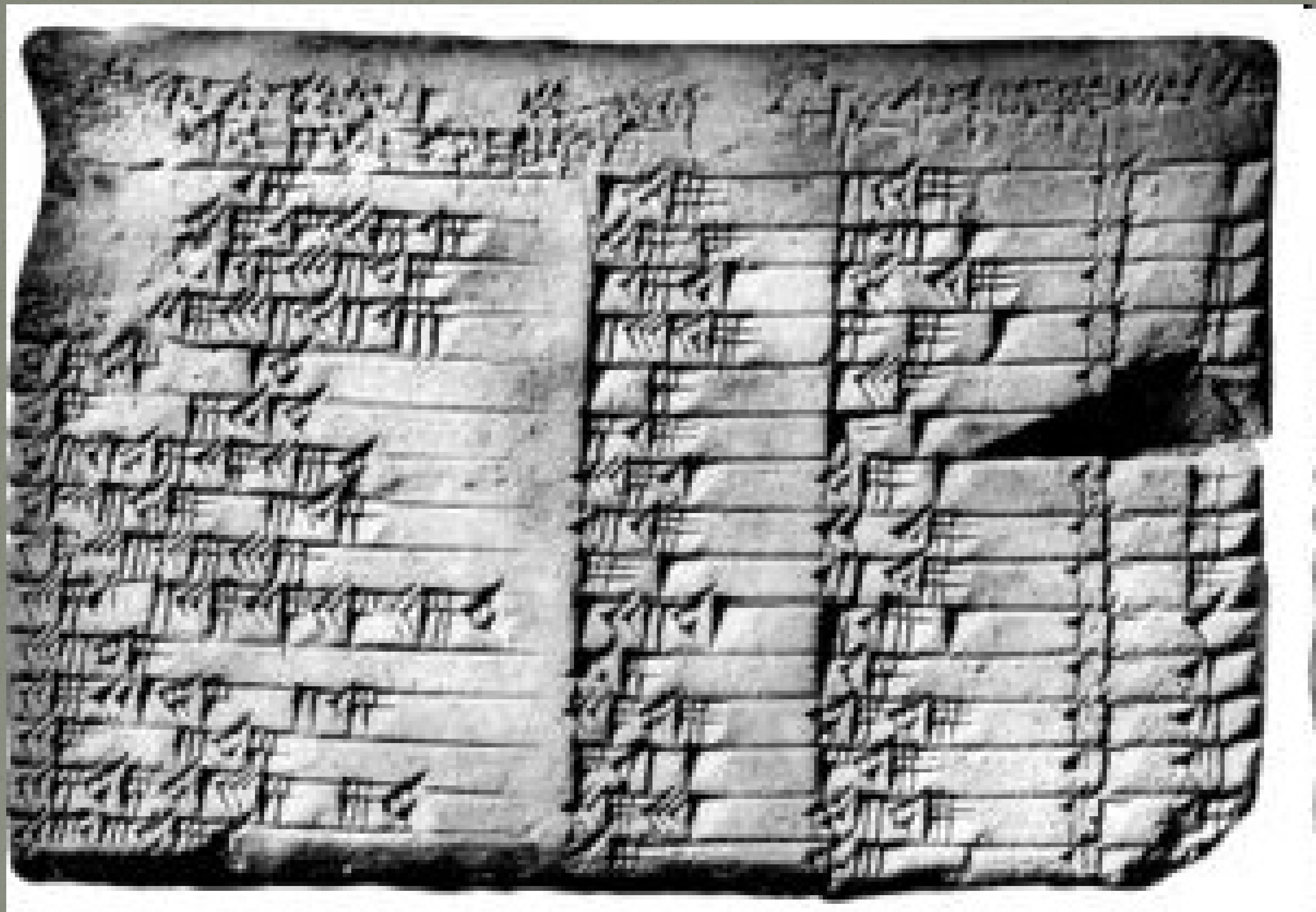
- Έχουν υπολογιστεί 200,000,000,000 ψηφία για τη τετραγωνική ρίζα του 2(2006)
- ενδιαφέρουσες ιδιότητες

το αντίστροφο της ρίζας 2 είναι ίση με το μισό της ρίζας 2

μη ρητός αριθμός

κ.ο.κ.

Πλάκα του Plimpton 1700 π.Χ. (τριάδες του Πυθαγόρα)



Ταμπλέτα του Plimpton, (O. Neugebauer and A. Sachs, **Mathematical cuneiform texts**, American Oriental Society, 1945)

0.9834028	119	169	1
0.9491586	3367	4825	2
0.9188021	4601	6649	3
0.8862479	12,709	18,541	4
0.8150077	65	97	5
0.7851929	319	481	6
0.7199837	2291	3541	7
0.6845877	799	1249	8
0.6426694	481	769	9
0.5861226	4961	8161	10
0.5625	45	75	11
0.4894168	1679	2929	12
0.4500174	161	289	13
0.4302388	1771	3229	14
0.3871605	56	106	15

$(3/4)^2 = 0.5625$ $45/60=3/4$ $75/60=5/4$

τριάδα (3,4,5)

Πλάκα του Plimpton

(φαίνεται οπτικά από την πλάκα ότι έχει σπάσει το κομμάτι που είχε μία ακόμα στήλη, αυτή που συμπληρώνουμε ως πρώτη στήλη των y…)

y	$\left(\frac{x}{y}\right)^2$	x	d	#
120	0.9834028	119	169	1
3456	0.9491586	3367	4825	2
4800	0.9188021	4601	6649	3
13,500	0.8862479	12,709	18,541	4
72	0.8150077	65	97	5
360	0.7851929	319	481	6
2700	0.7199837	2291	3541	7
960	0.6845877	799	1249	8
600	0.6426694	481	769	9
6480	0.5861226	4961	8161	10
60	0.5625	45	75	11
2400	0.4894168	1679	2929	12
240	0.4500174	161	289	13
2700	0.4302388	1771	3229	14
90	0.3871605	56	106	15

όπου x, y δύο πλευρές ενός ορθού τριγώνου και d η υποτείνουσα .

Τριάδες του Πυθαγόρα και Βαβυλώνιοι. (Ερμηνεία για τον τρόπο εύρεσης των τριάδων)

- $x^2+y^2=d^2 \Rightarrow (x/y)^2+1=(d/y)^2$
- $u=x/y$, $v=d/y$

  $u^2+1=v^2 \Leftrightarrow$

  $v^2-u^2=1$ και αφού $v^2-u^2=(v-u)(v+u) \Leftrightarrow$

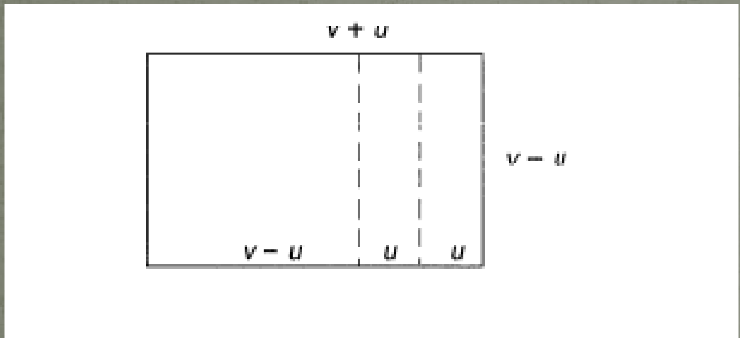
  $(v-u)(v+u)=1$.

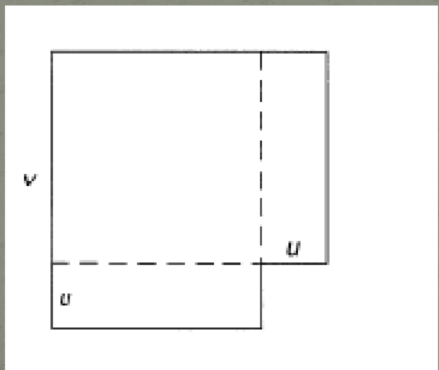
Δηλαδή αντί να ψάχνουμε x ,y, d έτσι ώστε $x^2+y^2=d^2$ ψάχνουμε v,u έτσι ώστε $(v-u)(v+u)=1$. Από τον τύπο του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι v-u και v+u είναι οι ακμές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει εμβαδό 1.

Δίνουμε στο v+u την τιμή a. Τότε $v-u=1/a$ και μπορεί να βρεθεί από τον πίνακα των αντιστρόφων. Για να βρούμε λοιπόν v,u λύνουμε τις δύο γραμμικές εξισώσεις $v+u=a$, $v-u=1/a$. Τέλος πολλαπλασιάζοντας με y (αφού $u=x/y$, $v=d/y$) βρίσκουμε τις τριάδες της πλάκας του Plimpton.

Πως γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι ότι $v^2 - u^2 = (v+u)(v-u)$ (για κάθε v και u?)?

(υπενθύμιση: η αλγεβρική γραφή δεν είχε ακόμα εφευρεθεί...)





Μία πιθανή γεωμετρική εξήγηση:
Έστω το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές v+u και v-u. Στην ακμή v+u χαράσσουμε το v-u, το τμήμα που περισσεύει είναι 2u. Διαιρούμε λοιπόν το αρχικό παραλληλόγραμμο σε 3 μέρη: ένα τετράγωνο με ακμή v-u, και δύο παραλληλόγραμμα με αμές u και v-u.
Στρέφουμε κατά 90^o το τελευταίο παραλληλόγραμο και το μεταφέρουμε έτσι ώστε να κολλήσει με το τετράγωνο που έχει ακμή v-u. Παίρνουμε το τετράγωνο με ακμή v από το οποίο λείπει το τετραγωνάκι με ακμή u. Άρα το εμβαδόν είναι $v^2 - u^2$.

Ήταν τυχαίες οι τριάδες? Γνώριζαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα οι Βαβυλώνιοι?

Υπάρχουν προβλήματα στις πλάκες τους που κάνουν χρήση του θεωρήματος.

Για παράδειγμα, στην πλάκα BM85196 υπάρχει το παρακάτω πρόβλημα:

«μία κολώνα μήκους 30 στηρίζεται (κάθετα) σε έναν τοίχο. Η επάνω άκρη γλιστράει μία απόσταση 6. Πόσο γλίστρησε η κάτω άκρη? »

Η απάντηση δίνεται ως « η τετραγωνική ρίζα του $30^2 - 24^2$ και υπολογίζεται να είναι 18.

(όταν γλιστρήσει η σκάλα, σχηματίζεται ένα ορθό τρίγωνο, που η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος 24=30-6, ενώ η υποτείνουσα έχει μήκος 30. Υπολογίζουμε το μήκος της βάση)

Λύση δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων εξισώσεων

- Θα συζητηθούν σε επόμενο μάθημα