

Ιστορία των Μαθηματικών

Εαρινό εξάμηνο 2014

03.06.14

Χ. Χαραλάμπους

ΑΠΘ

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Η μετάλλαξη της Άλγεβρας η μεγάλη στροφή



Gauss

Οι ακέραιοι του
Gauss (1829)



Galois

Ομάδες
(1832)



Τετραδικοί
Αριθμοί (1843)

Hamilton

Θεωρία Δακτυλίων

Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Εκκίνηση: αλγεβρική θεωρία αριθμών, αλγεβρική γεωμετρία, θεωρία αναλλοιώτων.

Μη Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Εκκίνηση: τετραδικοί αριθμοί του Hamilton (1843)

Οι 'τετραδικοί αριθμοί' είναι στοιχεία της μορφής

$$a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R} .$$

Η πρόσθεση τους γίνεται ανά συντεταγμένα:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \end{aligned}$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός τους ικανοποιεί τις σχέσεις:



$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

όπου

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

Το σύστημα αυτό ικανοποιεί όλους τους κανόνες που έχουν οι πραγματικοί και μιγαδικοί αριθμοί εκτός από την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού.

Ένας άλλος τρόπος για να γράψει κανείς τους τετραδικούς είναι σαν τετράδες:

$$(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

έτσι ώστε πρόσθεση να γίνεται ανά συντεταγμένη ενώ ο πολλαπλασιασμός προκύπτει ως

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - d_1c_2, \dots, \dots)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι όταν οι τελευταίες δύο συντεταγμένες είναι μηδέν, τότε έχουμε τους μιγαδικούς αριθμούς.

Η αρχική προσπάθεια του Hamilton ήταν να επεκτείνει το σώμα των μιγαδικών σε τριάδες αλλά κατάλαβε ότι αυτό δεν ήταν δυνατόν να γίνει.



Ακολούθησαν πολλά καινούρια παραδείγματα όπου ο πολλαπλασιασμός δεν ικανοποιούσε την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Για παράδειγμα, στην πολλαπλασιασμό των τετραγωνικών πινάκων (Cayley 1855, 1858).

Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών: παρόλο που τα κύρια προβλήματα είχα τεθεί ως προς τους ακεραίους, για την επίλυσή τους φάνηκε ότι έπρεπε να σκεφτούν τους ακεραίους ως κομμάτι πιο γενικευμένων συστημάτων αριθμών, τους «αλγεβρικούς ακεραίους».

Ένα από τα κύρια ζητήματα που τέθηκε ήταν η ιδιότητα της μοναδικής παραγοντοποίησης.

Το υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών

$$\{a + ib\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Όμως

$$6 = 2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$$

και έτσι δεν έχουμε μοναδική παραγοντοποίηση! (Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ δεν διαιρούνται από κανένα άλλο στοιχείο της μορφής $a + ib\sqrt{5}$)



Dedekind

1831-1916

Εάν όμως θεωρήσουμε τα παρακάτω σύνολα/ιδεώδη, (ιδέα του Dedekind το 1871),

$$P = \langle 2, 1 + i\sqrt{5} \rangle$$

$$Q = \langle 3, 1 + i\sqrt{5} \rangle$$

$$R = \langle 3, 1 - i\sqrt{5} \rangle$$

τότε μπορούμε να δείξουμε ότι όλα είναι πρώτα ιδεώδη. Δηλαδή ότι αν ένα γινόμενο στοιχείων ανήκει για παράδειγμα στο P τότε ένα από τα δύο στοιχεία είναι αναγκαστικά μέλος του P .

Επίσης μπορεί να δείξει κανείς ότι

- $P^2 = \langle 2 \rangle$
- $QR = \langle 3 \rangle$,
- $PQ = \langle 1 + i\sqrt{5} \rangle$
- $PR = \langle 1 - i\sqrt{5} \rangle$

Για να δούμε για παράδειγμα γιατί ισχύει η πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι

- $4 = 2^2 \in P^2$
- $2 + 2i\sqrt{5} = 2(1 + i\sqrt{5}) \in P^2$
- $(1 + i\sqrt{5})^2 = -4 + 2i\sqrt{5} \in P^2$

και άρα $P^2 \subset \langle 2 \rangle$. Από τα παραπάνω όμως προκύπτει επίσης ότι $2 \in P^2$ και άρα $\langle 2 \rangle \subset P^2$.

Έτσι

$$\langle 6 \rangle = \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle = P^2(QR) = P^2QR$$

ενώ

$$\langle 6 \rangle = \langle 1+i\sqrt{5} \rangle \langle 1-i\sqrt{5} \rangle = (PQ)(PR) = P^2QR$$

και έχουμε μοναδική παραγοντοποίηση
στο επίπεδο των ιδεωδών!

Η όρος δακτύλιος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Hilbert το 1892.

Ο πρώτος αξιωματικός ορισμός του δακτυλίου από τον Fraenkel το 1914.

Οι αξιωματικές αρχές της θεωρίας των αντιμεταθετικών δακτυλίων δόθηκαν για πρώτη φορά από την Noether το 1921.



1882-1935

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014

Η Noether στην εργασία της του 1921 με τίτλο «Θεωρία Ιδεωδών σε δακτυλίους» έδειξε ότι αποτελέσματα του Hilbert (και άλλων) για πολυωνυμικούς δακτυλίους ισχύουν σε κάθε αφηρημένο δακτύλιο για τον οποίο ισχύει η αύξουσα συνθήκη ιδεωδών.

Το 1927 στην εργασία της «Αφηρημένη πρόοδος στην θεωρία ιδεωδών σε αλγεβρικά σώματα αριθμών και σώματα συναρτήσεων» χαρακτήρισε τους αφηρημένους αντιμεταθετικούς δακτυλίους για τους οποίους ισχύει η μοναδική παραγαντοποίηση ιδεωδών σε πρώτα ιδεώδη (βλ. Dedekind).



23/03/1882 - 14/04/1935

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014



«...Στον κόσμο της άλγεβρας με την οποία ασχολούνται εδώ και αιώνες οι πιο προικισμένοι μαθηματικοί, (η Noether) ανακάλυψε μεθόδους που αποδείχτηκαν τεράστιας σημασίας...

Τα καθαρά μαθηματικά με τον δικό τους τρόπο είναι η ποίηση των ιδεών της λογικής...

Σε αυτήν την προσπάθεια κατάκτησης της ομορφιάς της λογικής, έχουν ανακαλυφθεί τύποι του πνεύματος, τύποι αναγκαίοι για την βαθύτερη διεξόδυση στους νόμους της φύσης.»
Albert Einstein, in a tribute to Emmy Noether, New York Times, 1935

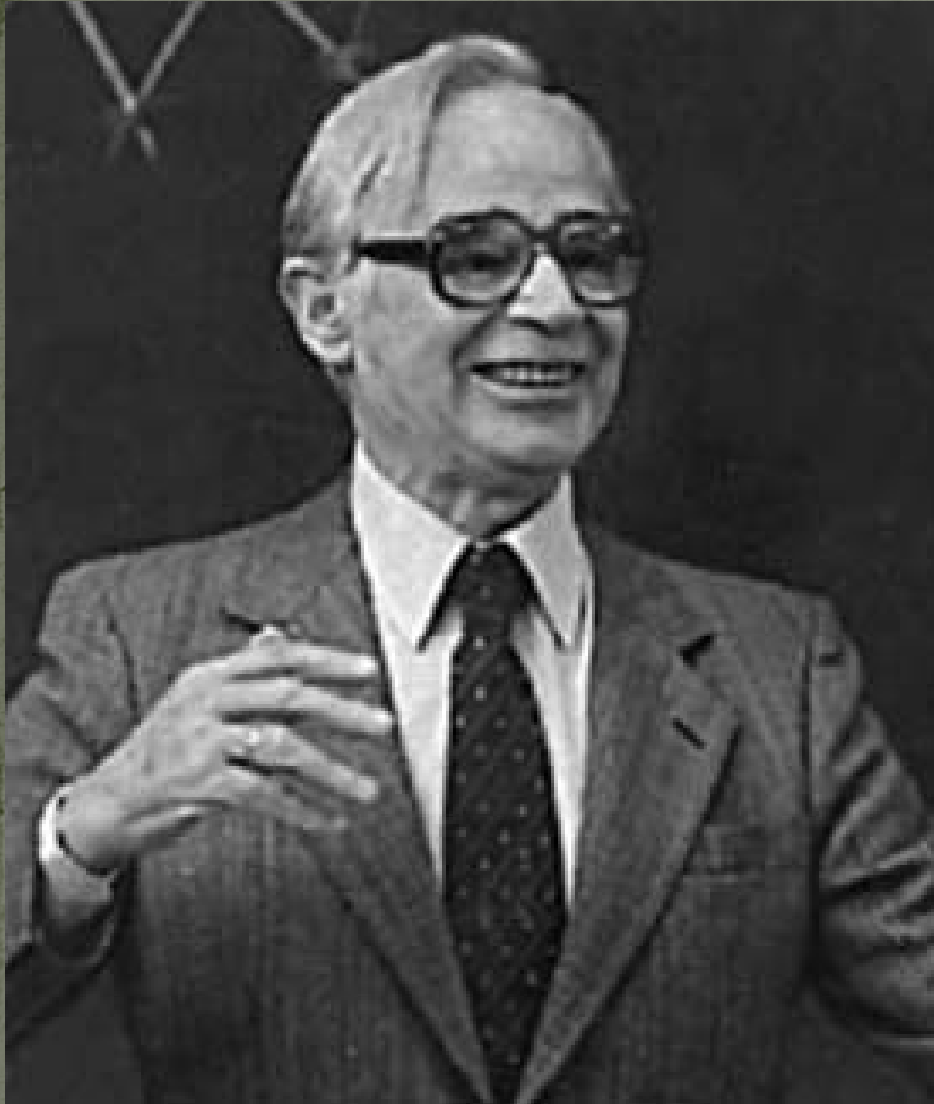


« Έλαβα χτες μια πολύ ενδιαφέρουσα εργασία από την Δεσποινίδα Noether για αναλλοίωτες συστημάτων. Έχω εντυπωσιασθεί ότι τέτοια πράγματα μπορούν να γίνουν κατανοητά με τέτοιο γενικό τρόπο. Η παλιά φρουρά στο Göttingen μπορεί να μάθει πολλά από την Δεσποινίδα Noether! »



Προσδιορισμός των ιδιοτήτων των συστημάτων που αποκτούν δομή ως προς κάποιες πράξεις. «αλγεβρικές δομές»: ομάδες, δακτύλιοι, άλγεβρες, modules--- γενικοί κανόνες οδηγούν σε γενικά συμπεράσματα

Το καινοτόμο που εισήγαγε η Noether είναι να ανακαλύπτει το μέγιστο που θα μπορούσε κάποιος να συμπεράνει από κάποιο σύνολο ιδιοτήτων ή αντίστροφα να προσδιορίζει το ελάχιστο σύνολο των αναγκαίων ιδιοτήτων που ευθύνονται για κάποια συμπεριφορά.



Van der Waerden
Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

«Για την Emmy Noether οι σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς, τις συναρτήσεις και πράξεις γίνονται σαφείς, ικανές για γενικεύσεις και παραγωγικές μόνο όταν τις αποσυνέδεε από τα συγκεκριμένα αντικείμενα όπου είχαν στηριχθεί και όταν τις είχε ανάγει σε γενικές εννοιολογικές σχέσεις...

...Η μαθηματική της πρωτοτυπία δεν μπορεί να συγκριθεί με κανενός άλλου.»



Alexandrov

Ήταν η Emmy που μας δίδαξε πως να σκεφτόμαστε με απλές και γενικές μαθηματικές έννοιες, για ομομορφισμούς ομάδες και δακτυλίους με πράξεις, ιδεώδη...

θεωρήματα όπως τα «θεωρήματα των ομομορφισμών και ισομορφισμών», έννοιες όπως η αύξουσα και φθίνουσα συνθήκη σε αλυσίδες υποομάδων και ιδεωδών όλα αυτά πρωτοεισήχθηκαν από την Emmy Noether και έχουν μπει στη καθημερινή πρακτική όλων των μαθηματικών κλάδων...

αρκεί να δει κανείς τη δουλειά του Pontryagin σε συνεχόμενες ομάδες, του Kolmogorov στην συνδυαστική τοπολογία, την δουλειά του Hopf στις συνεχείς συναρτήσεις κλπ για να νοιώσει την επιρροή των ιδεών της Emmy Noether ...η στο βιβλίο του Weyl



«Η αφηρημένη άλγεβρα
ξεκινά με την δημοσίευση
δύο εργασιών της Noether,
η πρώτη εργασία από
κοινού με τον Schmeidler,

η δεύτερη η μνημειώδης της
εργασία στη θεωρία των
ιδεωδών ... μπορεί να
θεωρηθεί ως η πρώτη
εργασία στον πλατύ τομέα
της αντιμεταθετικής
θεωρίας δακτυλίων.»

Jacobson

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014



«Η θεωρία των μη-αντιμεταθετικών αλγεβρών και αναπαραστάσεων δομήθηκε από την Emmy Noether με έναν νέο, ενωμένο, καθαρά εννοιολογικό τρόπο, κάνοντας χρήση όλων των αποτελεσμάτων που είχαν συγκεντρωθεί από τις ιδιοφυείς εργασίες δεκαετιών των Frobenius, Dickson, Wedderburn και άλλων.»

Weyl

Προς τιμήν της:

Δακτύλιοι και ομάδες της Noether.

Οι ιδέες της Noether εξελίχθηκαν στον κλάδο της Θεωρίας Κατηγοριών

Και οι παρατηρήσεις της οδήγησαν στην δημιουργία του κλάδου της αλγεβρικής τοπολογίας





Τιμητικές Διακρίσεις

- 1907 Διδακτορικό summa cum laude, Erlangen
- 1908 μέλος του Circolo matematico di Palermo
- 1909 μέλος της Deutsche Mathematiker Vereinigung (γερμανική μαθηματική εταιρία)
- 1932 βραβείο Alfred Ackermann-Teubner Memorial Prize for the Advancement of Mathematical Knowledge (μαζί με τον Artin) 500 Reichsmarks (περίπου 120 ευρώ σήμερα...)
- 1932 Ομιλία στο Διεθνές συνέδριο των Μαθηματικών Zurich International Congress of Mathematicians, 21 ομιλητές και 420 σύνεδροι (πρώτη φορά γυναίκα ομιλήτρια—η επόμενη φορά ήτανε το 1990 στο Kyoto)
- Εκδότης του Mathematische Annalen

Ακαδημαϊκές θέσεις

- 1908-1915 λέκτορας στο Πανεπιστήμιο του Erlangen (χωρίς πληρωμή). Επίσης είναι υπεύθυνη και μέντορας δύο διδακτορικών φοιτητών.
- 1916-1922 μέλος της ερευνητικής ομάδας του Hilbert στο Πανεπιστήμιο του Göttingen και στο διάστημα 1916-1919 είναι και λέκτορας (χωρίς πληρωμή)
- 1919 Privatdozent (λέκτορας ομιλητής που επιτρέπεται να πάρει δίδακτρα από σπουδαστές αλλά όχι από το πανεπιστήμιο) Πανεπιστήμιο του Göttingen
- 1922-1923 *nicht-beamteter ausserordentlicher Professor* (έκτακτη Καθηγήτρια—χωρίς μονιμότητα), χωρίς μισθό,) Πανεπιστήμιο του Göttingen.
- 1922-1923 *Lehrauftrag* για άλγεβρα με έναν μικρό μισθό (χωρίς προνόμια σύνταξης, ιατρικής ασφάλισης) (ο πρώτος και μοναδικός μισθός που έλαβε ποτέ από το Göttingen)
- 1933-1935 Επισκέπτης Καθηγητής, Bryn Mawr College.

Εκπαίδευση



- 1903 *Reifeprüfung*, *Königliches Realgymnasium*, (πτυχίου γυμνασίου) Nuremburg
- 1907 Διδακτορικό στα Μαθηματικά, Πανεπιστήμιο του Erlangen
- 1919 *habilitation*, (υψηλότητα) Πανεπιστήμιο του Göttingen



Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014



Erlangen



Paul Gordan
Ο βασιλιάς των αναλλοίωτων

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ



Max Noether

Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014



Göttingen

οι 3 εποχές του έργου της:

1. Εποχή της σχετικής εξάρτησης: 1907–1919
2. Εποχή έρευνας για την γενικευμένη θεωρία των ιδεωδών 1920–1926
3. Εποχή μελέτης των μη αντιμεταθετικών αλγεβρών, των αναπαραστάσεων τους με γραμμικές συναρτήσεις και αντιμεταθετικά τοπικά σώματα



Κρατικό Πανεπιστήμιο
Μόσχας, 1929
(Εβραία, Γυναίκα, και ειρηνίστρια)



Ζυριχη, 1932



Το Κολλέγιο του
Bryn Mawr, ΗΠΑ
1932-1935

Ο κύκλος των μαθητών της: «Τα αγόρια της Noether»

η Noether ως μέντορας,
γενναιοδωρία ιδεών,
διορατικότητα

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών
ΑΠΘ

Mathematics Genealogy Project

Emmy Amalie Noether

[Name:](#)

Ph.D. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg 1907 

Dissertation: Über die Bildung des Formensystems der ternären
biquadratischen Form

Mathematics Subject Classification: 06—Order, lattices, ordered algebraic
structures

Advisor: [Paul Albert Gordan](#)

Student(s):

Click [here](#) to see the students listed in chronological order.

Name	School	Year	Descendants
Max Deuring	Georg-August-Universität Göttingen	1931	471
Wilhelm Dörnte	Georg-August-Universität Göttingen	1927	
Hans Eiting	Georg-August-Universität Göttingen	1931	
Heinrich Görtel	Georg-August-Universität Göttingen	1928	145
Margaretha Hermann	Georg-August-Universität Göttingen	1928	
Yakov Levitzki	Georg-August-Universität Göttingen	1929	32
Otto Schilling	Philippa-Universität Marburg	1935	45
Ludwig Schwarz	Georg-August-Universität Göttingen	1933	
Erich Steuffer	Bryn Mawr College	1935	
Chung-Ize Tsai	Georg-August-Universität Göttingen	1934	
Warner Votaw	Georg-August-Universität Göttingen	1935	
Warner Water	Georg-August-Universität Göttingen	1929	8
Wolfgang Wilmann	Georg-August-Universität Göttingen	1938	
Ernst Witt	Georg-August-Universität Göttingen	1934	116

According to our current on-line database, Emmy Noether has 14 [students](#)
and 828 [descendants](#).

We welcome any additional information.

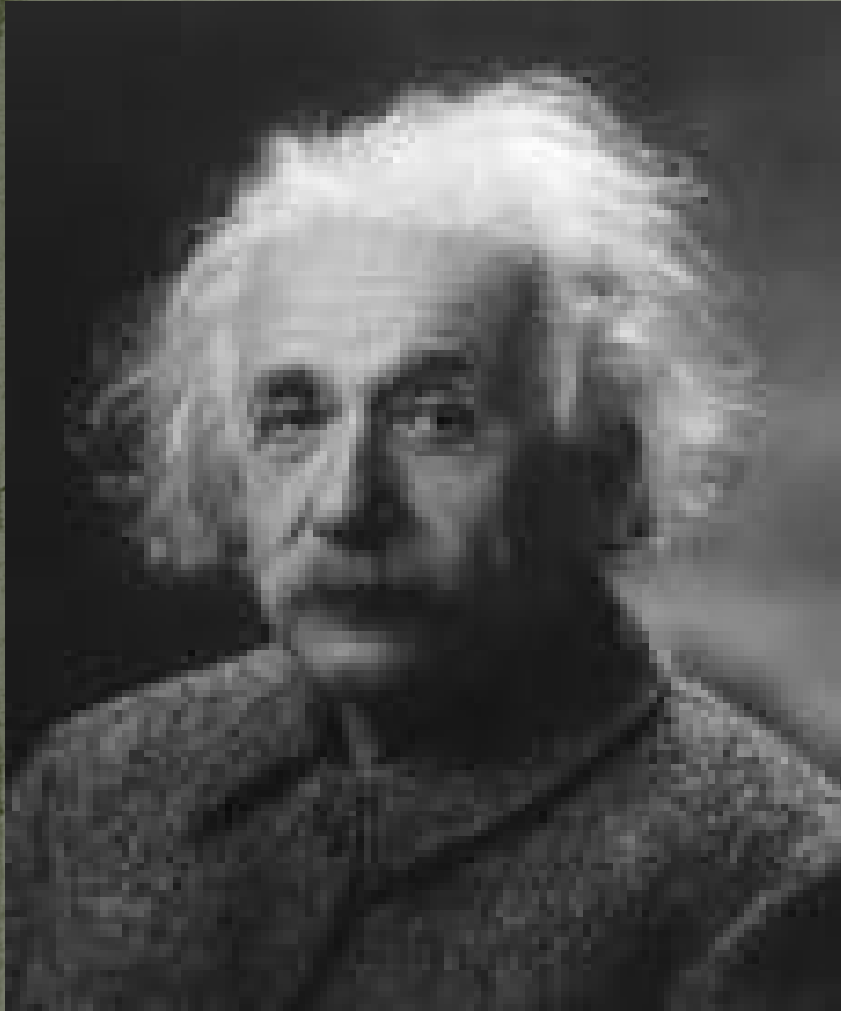
Ιστορία των Μαθηματικών
Εαρινό Εξάμηνο 2014



το παρατσούκλι «**Der
Noether**» ως ένδειξη
σεβασμού



προσωπικότητα
πληθωρική,
δεν νοιαζόταν για
την εμφάνισή της
ή για τους
τρόπους της



«Οι προσπάθειες των περισσότερων ανθρώπων εστιάζονται στην κατάκτηση του καθημερινού επιούσιου. Οι περισσότεροι από αυτούς που είτε χάρι στη τύχη είτε χάρι σε κάποιο ταλέντο δεν έχουν ανάγκη αυτόν τον καθημερινό αγώνα, αναλώνονται στη προσπάθεια μεγιστοποίησης υλικών αγαθών...

Υπάρχει, ευτυχώς, μια μειονότητα που αναγνωρίζει ότι οι ομορφότερες και πιο γεμάτες στιγμές που νοιώθει ο άνθρωπος δεν προέρχονται από εξωτερικούς παράγοντες, αλλά συνδέονται με καλλιέργεια συναισθημάτων, πράξεων και σκέψεων. Οι γνήσιοι καλλιτέχνες, οι ερευνητές και οι άνθρωποι της σκέψης είναι σε αυτή τη κατηγορία. Όσο σεμνή και να είναι η πορεία της ζωής τους, οι καρποί των προσπαθειών τους είναι οι πολυτιμότερες συνεισφορές που μια γενεά μπορεί να κάνει στις επόμενες....



Λίγες μέρες νωρίτερα μία διακεκριμένη μαθηματικός, η Καθηγήτρια Emmy Noether,...πέθανε στο πενήντοστό τρίτο έτος της ηλικίας της. Κατά την κρίση των ικανότερων εν ζωή μαθηματικών, η Δις Noether ήταν η πιο σημαντική δημιουργική μαθηματική ιδιοφυΐα που υπήρξε από τότε που άρχισε η ανώτερη εκπαίδευση των γυναικών έως σήμερα...»

Einstein