1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 8)$, β) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^3 - 8}{x - 2}$

γ) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+6}$

Λύση:

α) $\lim\limits_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 8) = 3.(-1)^3 - 4(-1) + 8 = -3 + 4 + 8 = 9$

β) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^3 - 8}{x - 2} = \frac{3.0^2 - 8}{0 - 2} = 4$

γ) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+6} = \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$

2. Αν $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -3$ και $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 4$. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{2.f(x) + g(x)}{\sqrt{g(x)}}$$

Λύση:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{2.f(x) + g(x)}{\sqrt{g(x)}} = \frac{\lim (2.f(x) + g(x))}{\lim\limits_{x \to \alpha} \sqrt{g(x)}}, \text{ για } x \to \alpha, \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{2.f(x) + g(x)}{\sqrt{g(x)}} = \frac{2 \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) + \lim\limits_{x \to \alpha} g(x)}{\sqrt{\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)}} =$$

$$= \frac{2(-3) + 4}{\sqrt{4}} = \frac{-6 + 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

3 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$

Λύση:

α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$

β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} (x+5) = 1+5=6.$

4 Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^4-16}$

Λύση:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^4-16} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3-2^3}{(x^2)^2-4^2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{(x^2-4)(x^2+4)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{4+4+4}{4(4+4)} =$$

$$= \frac{3.4}{4.8} = \frac{3}{8}.$$

5 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ β) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

Λύση:

α) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{((\sqrt{x})^2-3^2)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{1}{\sqrt{x}+3} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{9}+3} = \dfrac{1}{3+3} = \dfrac{1}{6}.$

β) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{((\sqrt{2x-1})^2-3^2)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x-1-9}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+3} = \dfrac{2}{3+3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

6 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<2\\ 2x+1, & x\geq 2\end{cases}$$

i) Να υπολογίσετε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Λύση:

i) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(1-x^2) = 1-4 = -3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(2x+1) = 4+1 = 5$

ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

7 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leq 3\\ 4x-2, & x>3\end{cases}$$

i) Να βρείτε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Λύση:

i) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2+1) = 3^2+1 = 10$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(4x-2) = 4\cdot 3-2 = 10$

ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 10 \Rightarrow$ υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ και είναι ίσο με 10.

8) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 2\eta\mu x+35, & x\le \frac{\pi}{6} \\ \lambda^2+x-\frac{\pi}{6}, & x>\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του λ ($\lambda\in\mathbb{R}$) για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)$

Λύση:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}(2\eta\mu x+35)=2\eta\mu\frac{\pi}{6}+35=2\cdot\frac{1}{2}+35=36$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+}\left(\lambda^2+x-\frac{\pi}{6}\right)=\lambda^2+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\lambda^2$$

Για να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)$ θα πρέπει

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}^+} f(x)$ δηλαδή θα πρέπει να

ισχύει $\lambda^2=36 \Longleftrightarrow \lambda=6$ ή $\lambda=-6$.

9) Να υπολογίσετε τα όρια α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^{11}+3x^5+2002)$ και β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^5+5x^3+10}{6x^9+4x-3}$

Λύση:

α) $$\lim_{x\to+\infty}(-5x^{11}+3x^5+2002)=\lim_{x\to+\infty}(-5x^{11})=-5\lim_{x\to+\infty}(x^{11})=(-5)(+\infty)=-\infty$$

β) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5+5x^3+10}{6x^9+4x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{6x^9}=\frac{3}{6}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5}{x^9}=\frac{3}{6}\lim_{x\to-\infty}x^{-4}=$$

$$=\frac{3}{6}\cdot 0=0.$$

10) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{2002}}{e^x}$$

Λύση:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{2002}}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x \cdot x^{2002}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x \cdot \lim_{x\to-\infty} x^{2002} =$$

$$= (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

Προσοχή!!! Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$
και $\lim_{x\to-\infty} x^\nu = +\infty$ αν ν είναι άρτιος

11) Να εξετάσετε αν πρός τη συνέχεια στο σημείο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} e^x+2, & x\le 0 \\ \ln(x+1)+2x, & x>0 \end{cases}$ και $x_0=0$

β) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2}, & x\neq -2 \\ -4, & x=-2 \end{cases}$ για $x_0=-2$

Λύση:

α) $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}(e^x+2) = e^0+2 = 1+2 = 3$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(\ln(x+1)+2x) = \ln(0+1)+2.0 = \ln 1 = 0$

Επειδή $\lim_{x\to0^-} f(x) \neq \lim_{x\to0^+} f(x) \Rightarrow$ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0} f(x)$
και επομένως η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) $\lim\limits_{x \to} g(x) = \lim\limits_{x \to} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim\limits_{x \to} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} =$

$= \lim\limits_{x \to} (x-2) = -2-2 = -4.$

Συνεπώς ισχύει $\lim\limits_{x \to} g(x) = g(-2)$ και σύμφωνα με τον ορισμό η $g(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

12 Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(x^2+9)$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u>

Η συνάρτηση $g(x) = x^2+9$, είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική

Η συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x$, είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $f(x) = (h \circ g)(x)$, $x \in \mathbb{R}$

η $f(x)$ θα είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως <u>σύνθεση</u> συνεχών συναρτήσεων.

13) Για ποιές τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση 8

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + 5, & x < 1 \\ x^2 - 3x + 4, & x \geq 1 \end{cases}$$

Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Για $x < 1$ η $f(x) = \alpha x + 5$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική
Για $x > 1$ η $f(x) = x^2 - 3x + 4$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική

Για $x = 1$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

Όμως ισχύει:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (\alpha x + 5) = \alpha + 5 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 3x + 4) = 1 - 3 + 4 = 2.$$

Επειδή είναι: $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 4 = 2$.

Συνεπώς πρέπει: $\alpha + 5 = 2 \Longleftrightarrow \alpha = -3$.

(14) Δίνεται η συνάρτηση:

(9)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x}, & x<0 \\ -3+b, & x=0 \\ e^x-\alpha, & x>0 \end{cases}$$

όπου $\alpha, b \in \mathbb{R}$

i) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

ii) Την τιμή του α ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

iii) Αν $\alpha=4$, να υπολογίσετε τον αριθμό b ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Λύση:

i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x(x^2-4x+3)}{x(x-1)} =$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} = \dfrac{3}{-1} = -3.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (e^x-\alpha) = e^0-\alpha = 1-\alpha$

ii) Για να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ θα πρέπει

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow -3 = 1-\alpha \Leftrightarrow \alpha = 4.$

iii) Για να είναι συνεχής στο $x_0=0$ θα πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Συνεπώς $-3+b=-3 \Leftrightarrow$

$b=0.$

15 Να βρεθούν οι πολικές συντεταγμένες του σημείου $(\sqrt{3}, 1)$

Λύση:

$r = \sqrt{3+1} = 2$ και $\vartheta =$ τοξημ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

Χρήσιμα

$+\infty + \vartheta = +\infty \quad \vartheta \in \mathbb{R}$
$-\infty + \vartheta = -\infty$
$+\infty - \vartheta = +\infty$
$-\infty - \vartheta = -\infty$

$+\infty \cdot \vartheta = +\infty \quad \vartheta \in \mathbb{R}$
$-\infty \cdot \vartheta = -\infty$
$-\infty \cdot (-\vartheta) = +\infty$
$+\infty \cdot (-\vartheta) = -\infty$

$\vartheta^{+\infty} = +\infty \quad \vartheta \in \mathbb{R}$
$\vartheta^{-\infty} = 0^+$
$(+\infty)^{\vartheta} = +\infty$
$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
$\sqrt[\nu]{+\infty} = +\infty, \ \nu \in \mathbb{N}$
$\log_{\vartheta}(+\infty) = +\infty$ αν $\vartheta > 1$ και $= -\infty$ αν $0 < \vartheta < 1$.

$+\infty \pm 0 = +\infty$
$-\infty \pm 0 = -\infty$ και $1/\infty = 0$
$1/0^+ = +\infty$
$1/0^- = -\infty$

$$\sum_{i=1}^{n} c x_i = c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (c x_i + d y_i) = c \sum_{i=1}^{n} x_i + d \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + c) = \sum_{i=1}^{n} x_i + (n \cdot c)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + c = \sum_{i=1}^{n} x_i + c$$

Просохи!!!

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)\right)^2 \neq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{y_i}\right) \neq \frac{\sum x_i}{\sum y_i}, \quad i = 1 \ldots n.$$