Ας είναι η \( f \) μια ομάδα με πέδιο ορισμού \( \mathbb{R} \).
Από το σχήμα μπορούμε να προβούμε τα εξής ασύρματα:
- \( F'(-\infty, x_0) \), \( F'(x_0, +\infty) \)
- Για \( x = x_0 \) η \( f \) εμφανίζει τοπικό μέσο στο \( F(x_0) \)

Παρατηρήσει: \( i \) Αν πτωμά το πέδιο ορισμού \( \mathbb{R} - \{x_0\} \)
τότε \( F'(-\infty, x_0), F'(x_0, +\infty) \)

\( ii \) \( f \) είναι συνεχής στο \( x_0 \)
(τα πλευρικά ορια σύμφωνα και είναι ίσα)

2) Παρατηρούμε ότι η \( f \) εχει πέδιο ορισμού \( \mathbb{R} \).

\( F'(-\infty, x_0), F'(x_0, +\infty) \) ομως η \( f \) δεν είναι
συνεχής στο \( x_0 \) \( (\lim_{x \to x_0} f(x) \neq F(x_0)) \)

Το \( x_0 \) δεν είναι ουτε τοπικό μέσο ουτε τοπικό
εξάρτημα
3) Η συνάρτηση έχει πέντε άκρες: 

\[ -\infty, x_3 \] \[ x_3, x_4 \] \[ x_4, x_5 \] \[ x_5, x_0 \] \[ x_2, +\infty \] 

- \( F \downarrow (\infty, x_3] \):
  - Τα τελικά καμψίματα λαμβάνονται για \( x = x_3, x = x_5 \)
  - Και τα τελικά μέγιστα λαμβάνονται για \( x = x_4 \)

- \( F \uparrow [x_3, x_4] \):
  - Παρατηρούμε ότι για \( x = x_3 \) λαμβάνουμε άκρα μέγιστα
1) Να βρεθεί το πεδίο συμμόρφωσης των παρακάτω συναρτήσεων:

a) \( f(x) = \frac{x^2 + 9x + 1}{x + 2} \)

β) \( f(x) = \frac{4}{x - 2} \)

γ) \( g(x) = x^2 - 3x + 2 \)

δ) \( g(x) = \tan(x - 2) \)

ε) \( \text{arctan}(x - 2) \)

δ') \( g(x) = \sqrt{x + 1} \)

α) Παρατηρούμε ότι ένα \( f(x) = x^3 + 2x + 7 \) όρα το \( \text{π.δ}(f) = (-\infty, +\infty) \)

β) Βλέπωμε ότι η συνάρτηση δεν \( \forall x_0 \in \mathbb{R} \) είναι ορθή στη \( x_0 = 2 \) δεν ορίζεται \( f(x_2) \) \( \Rightarrow \) η συνάρτηση μονοπλοκής είναι ορθή

γ') \( \text{π.ο}(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \)

δ) Γνωρίζω ότι ο λογαριθμός ορίζεται μονοπλοκή σε \( x > 0 \) και επειδή \( 1x^1, x^2 > 0 \) \( \Rightarrow \)

ε) \( x_0 \in \mathbb{R} \) \( \Rightarrow \) \( 0 \)

ε') \( \text{π.ο}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \)

θα πρέπει (από τον ορισμό του τετραγώνου πίθανο) το υποτέλειο να είναι δενόμο. Αρα

\[ x + 7 \geq 0 \iff x \geq -7 \]

\[ \text{π.ο}(f) = (-\infty, +\infty) \]
1) \[ f(x) = \begin{cases} 
 x^2 - 2 & x \leq 1 \\
 3x - 4 & 1 < x \leq 2 \\
 2x - 1 & x > 2 
\end{cases} \]

Παρατηρήστε (αν χρήστετε) τα άρθρα:

i) \( \lim_{x \to 0} f(x) \)

ii) \( \lim_{x \to 1} f(x) \)

iii) \( \lim_{x \to 2} f(x) \)

Αναλύση:

i) Επειδή η η\( x^2 \) γίνει \( f(x) = x^2 - 2 \)

\[ \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - 2) = 0^2 - 2 = -2 \]

ii) Παρατηρήστε ότι η \( f \) ευθετείται του 1 ακάματος τύπο

- Αν \( x < 1 \), τότε \( f(x) = x^2 - 2 \) οπότε

\[ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 2) = 1^2 - 2 = -1 \]

- Αν \( 1 < x < 2 \), τότε \( f(x) = 3x - 4 \), οπότε

\[ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x - 4) = 3 \cdot 1 - 4 = -1 \]

Επειδή \( \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \) είναι \( \lim_{x \to 1} f(x) = -1 \)

iii) \( \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x - 4) = 3 \cdot 2 - 4 = 2 \)

\( \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \)

Επειδή \( \lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) \) δεν υπάρχει το \( \lim_{x \to 2} f(x) \)
2) \[
\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 2}{x^2 + x} = \lim_{x \to -1} \frac{(\sqrt{x^2 + x} + 2)(\sqrt{x^2 + x} - 2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2 + x} + 2)} = \\
= \lim_{x \to -1} \frac{x + 5 - 4}{x(x+1)(\sqrt{x^2 + x} + 2)} = \lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x(x+1)(\sqrt{x^2 + x} + 2)} = \\
= \lim_{x \to -1} \frac{1}{x(x+1)(\sqrt{x^2 + x} + 2)} = \frac{1}{-1(1-1+5+2)} = -\frac{1}{4}
\]

3) \[
\lim_{x \to 0} (\eta_μ \cdot \text{ω} \cdot \frac{1}{x})
\]

(μδενίση επί γραμμή)

Ερευνάμε ως επι-ςης \(-1 \leq \text{ω} \cdot \frac{1}{x} \leq 1, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\)

\[\Rightarrow \quad -\mu x \leq \text{μν} \cdot \text{ομω} \cdot \frac{1}{x} \leq \mu x\]

Επειδή \(\lim_{x \to 0} (-\eta_μ) = \lim_{x \to 0} (\eta_μ) = 0\) απο το κριτήριο

περιβολής, έχουμε ότι \(\lim_{x \to 0} \text{μν} \cdot \text{ομω} \cdot \frac{1}{x} = 0\)
Na βρείετε τα όρια:

\[ i) \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{2x^2 - x - 1} \quad \text{ii) } \lim_{x \to -2} \left( \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{9}{x^2 - 2x} \right) \]


\[ \text{Λύση} \]

i) Επειδή \( \lim (2x^2 - x - 1) = 0 \) δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πολυώνυμων δια τα όρια (κανόνα πολυώνυμων: \( \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \) οπου \( P, Q \) πολυώνυμα) ώστε να δημιουργήσουμε οποιοδήποτε παράγοντα το \( x - 1 \)

- Σχήμα Horner (Διαρκεία πολυώνυμων)

\[
\begin{align*}
 x^3 - 6x + 5 &= (x-1)(x^2 + x - 5) \\
 2x^2 - x - 1 &= (x-1)(2x+1)
\end{align*}
\]

\[ \text{Αρα} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 5)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 5}{2x+1} = \frac{1^2 + 1 - 5}{2 \cdot 1 + 1} = -\frac{1}{3} \]

ii) \[ \lim_{x \to -2} \left( \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{9}{x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \to -2} \left( \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{9}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \to -2} \left( \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{9}{x(x-2)} \right) \]

\[ = \lim_{x \to -2} \left( \frac{-x^2}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \to -2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2 - 2} = -\frac{1}{4} \]
Δίνεται η συνάρτηση

\[ f(x) = \begin{cases} \alpha x^4 + 1 & x \leq 1 \\ 2\alpha x^3 + \beta x & x > -1 \end{cases} \]

Να βρεθούν οι τιμές \( \alpha, \beta \in \mathbb{R} \) ώστε να ισοπεδωθεί το οριο \( \lim_{x \to -1} f(x) \).

Λύση

Θα πρέπει \( \lim_{x \to -1} F(x) = \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \)

\[ F(-1) = \alpha^2 + 1 \]

\[ \lim_{x \to -1} F(x) = \lim_{x \to -1} 2\alpha x^3 + \beta x = -2\alpha - \beta^2 \]

Από \( i \) και \( ii \) συνεχίζετε

\[ \alpha^2 + 1 = -2\alpha - \beta^2 \]

\[ (\alpha + 1)^2 = -\beta^2 \]

\[ (\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 0 \]

Αναλύουμε \( \alpha + \beta \cdot \beta = 0 \)

\[ \begin{align*}
\alpha + 1 &= 0 \\
\alpha &= -1 \\
\beta &= 0
\end{align*} \]
Είναι η συνάρτηση \( F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + \mu x^2}}{x^2 + x}, & x > 0 \\ e^x + \lambda, & x \leq 0 \end{cases} \)

i) Να βρεθεί το \( \lambda \), ώστε η \( F \) να είναι σωστή στο \( x_0 = 0 \)

Λύση
- Για να είναι \( F \) σωστή, δύναμαι \( \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \)
- Όπως \( \lim_{x \to 0} F(x) = F(0) \)
- \( F(0) = e^0 + \lambda = 1 + \lambda \)
- \( \lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + \mu x^2}}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2(x^2 + 1) + \mu 2x}}{x(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x^4 + 1} + \mu 2)}{x(x+1)} \)
- \( \lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x^4 + 1} + \mu 2}{x(x+1)} = \frac{\sqrt{0^4 + 1} + \mu 2}{0+1} = \frac{\sqrt{1} + \mu 2}{1} = 1 \)

Αποκλειστικά να είναι σωστή, δύναμαι να έχει

\[ 1 + \lambda = 1 \implies \lambda = 0 \]
\[ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{-x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \]

Γνωρίζω ότι η ψηφιδωτή είναι σωρεία στο \( x = 0 \) και \( x = 0 \).

\[ \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 + e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0 \]

Το μετέπειτα θα γίνει ως προς την συνεχή ψηφιδωτή:

\[ f(x) = \begin{cases} \ln(x + 1) & x < 0 \\ e^{x^2} - 1 & x \geq 0 \end{cases} \]

\[ F(0) = e^{0} - 0 - 1 = e^0 - 1 = e - 1 \Rightarrow F(0) = 0 \]

\[ \lim_{x \to 0} \ln(x + 1) = \ln(1) = 0 = F(0) \]

Απαντάω σωρεία
Δίνεται καρτεσιανό σύνολο συνορισμένων οκτώ και σημείο Α με καρτεσιανές συντεταγμένες (2,4). Να βρεθούν οι πολίνες συντεταγμένες του Α (ρ,θ).

Λύση
- Αρκεί να βρούμε το ρ που είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων (AO), και το θ τη σκιά που σχετίζει το ΑΟ με τον αξόνα x.
- Το τρίγωνο ABO είναι ορθόγωνο. Το ΑΒ και OB είναι ομολογικά (αποστάσεις). Επομένως εφαρμόζοντας τη Διάφορη Θεώρηση δια να βρούμε το OA = ρ
- \(OB^2 + AB^2 = OA^2\)
- \((0)^2 + (4)^2 = OA^2\) \(\Rightarrow\)
- \(OA^2 = 4 + 16 = 20\) \(\Rightarrow\)
- \(OA = \sqrt{20} = \sqrt{2 \times 5} = 2\sqrt{5}\)
- Άρα \(ρ = OA = 2\sqrt{5}\)
- Για τα σημεία θα σημαίνει ότι υπάρχει ορθόγωνο τρίγωνο.
- Το πλευρά με σκιαίς \(θ = \frac{π}{2}\) \(\Rightarrow\) 10χιλέμι
- \(\frac{θ}{\pi} = \frac{2\sqrt{5}}{\pi}\) σπορείο
- \(θ = 2\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\)
- Άρα \((ρ,θ) = (2\sqrt{5},2\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right))\)