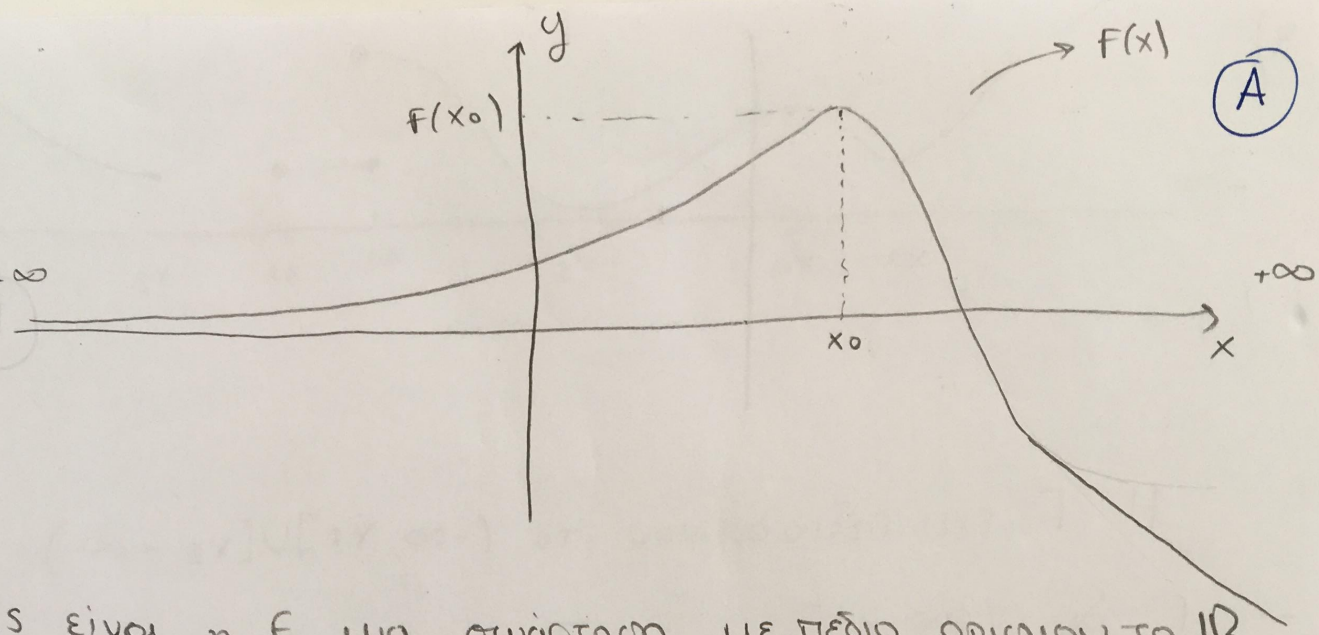
1)



Αν είναι η F μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

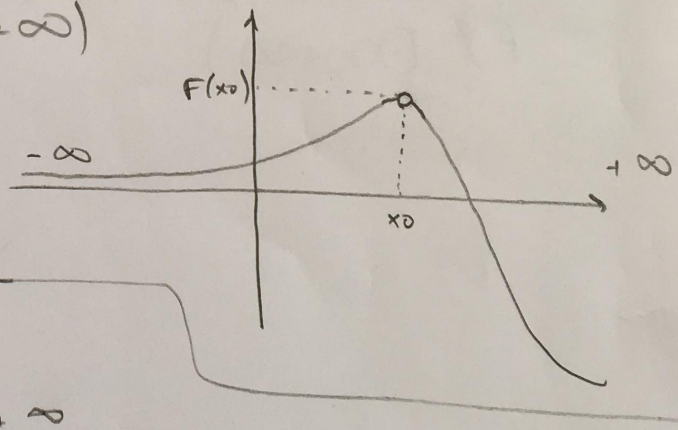
Από το σχήμα μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- $F \nearrow (-\infty, x_0]$, $F \searrow [x_0, +\infty)$
- Για $x = x_0$ η F εμφανίζει <u>τοπικό</u> μέγιστο το $F(x_0)$

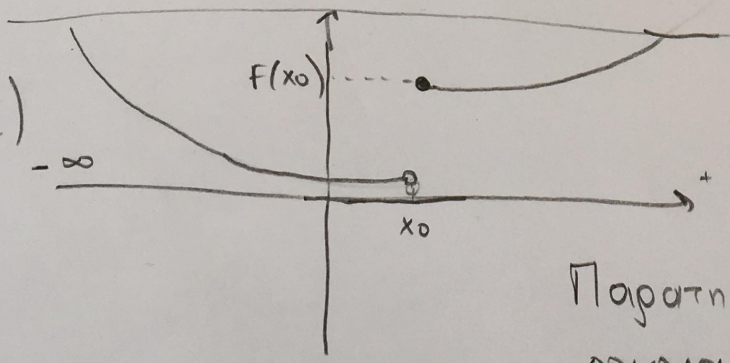
<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: i) Αν ήταν το πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{x_0\}$

τότε $F \nearrow (-\infty, x_0)$, $F \searrow (x_0, +\infty)$

ii) Η F είναι συνεχής στο x_0 (τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα)



2)

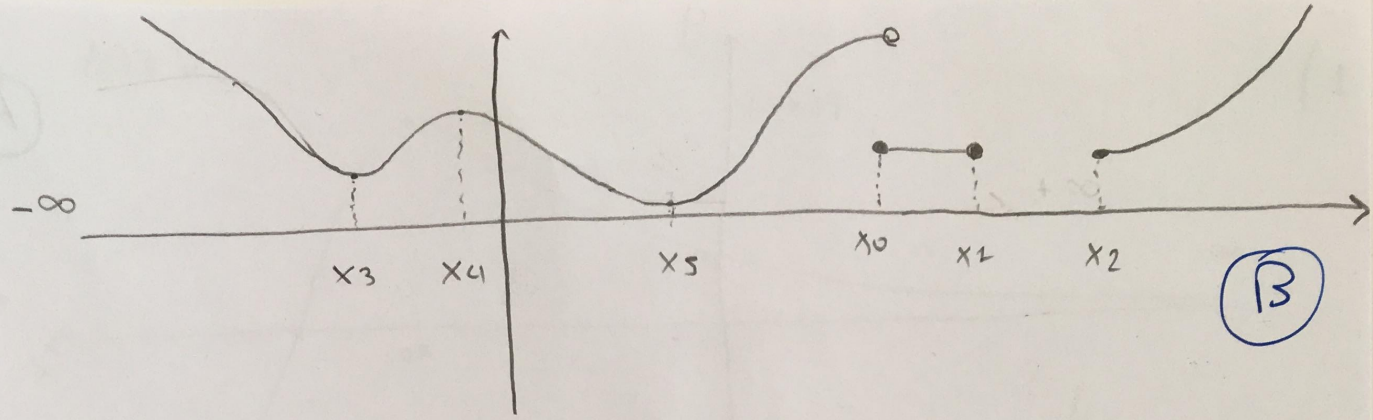


Παρατηρούμε ότι η F έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$F \searrow (-\infty, x_0)$, $F \nearrow [x_0, +\infty)$ όμως η F δεν είναι συνεχής στο x_0 $\left(\lim_{x \to x_0^-} F(x) \neq F(x_0) \right)$

Το x_0 δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο

3)



B

Η F έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$

- F ↘ $(-\infty, x_3]$
  F ↗ $[x_3, x_4]$
  F ↘ $[x_4, x_5]$
  F ↗ $[x_5, x_0)$
  F σταθερή στο $[x_0, x_1]$
  F ↗ $[x_2, +\infty)$

Τα τοπικά ελάχιστα λαμβάνονται για $x = x_3$, $x = x_5$ και τα τοπικά μέγιστα για $x = x_4$

Παρατηρούμε επίσης ότι για $x = x_5$ λαμβάνουμε <u>ολικό</u> μέγιστο

1) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 + 2x + 7$

β) $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

γ) $f(x) = \ln(x^2), \ln(|x|)$

δ) $g(x) = \sqrt{x+7}$

ε) $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

δ) $g(x) = \arctan(x-2)$

α) Παρατηρούμε ότι $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $f(x_0) = x_0^3 + 2x_0 + 7$
άρα το $\pi.\delta(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

β) Βλέπαμε ότι η συνάρτηση για $\forall x_0 \in \mathbb{R} - \{2\}$
$f(x_0) = \dfrac{4}{x_0 - 2}$ και για $x_0 = 2$ δεν ορίζεται
($\frac{4}{0} \rightarrow$ δεν υφίσταται ως αριθμός μόνο έως όριο)
άρα $\pi.o(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

γ) Γνωρίζαμε ότι ο λογαριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$ και επειδή $|x|, x^2 > 0$ για
$\forall x_0 \in \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
έχαμε $f(x_0) = \ln(x_0^2)$ ή $\ln(|x_0|)$ άρα
$\pi.o.f = \mathbb{R} - \{0\}$

δ) Θα πρέπει (από τον ορισμο της τετραγωνικης ρίζας) το υπόριζο να είναι θετικό. Άρα
$x + 7 \geq 0 \iff$
$x \geq -7$ άρα $\pi.o(f) = [-7, +\infty)$

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \le 1 \\ 3x - 4 & 1 < x < 2 \\ 2x - 1 & x > 2 \end{cases}$

2

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ iii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ΛΥΣΗ

i) Επειδή, κοντά στο 0 είναι $f(x) = x^2 - 2$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - 2) = 0^2 - 2 = -2$$

ii) Παρατηρούμε ότι η f συστέρωθεν του 1 αλλάζει τύπο

- Αν $x < 1$, τότε $f(x) = x^2 - 2$ οπότε

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 2) = 1^2 - 2 = -1$$

- Αν $1 < x < 2$ τότε $f(x) = 3x - 4$, οπότε

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x - 4) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ είναι $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

iii) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim (3x - 4) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

2) $$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} =$$

3

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x+5-4}{x(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{1}{x(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{1}{-1(\sqrt{-1+5}+2)} = -\frac{1}{4}$$

3) $\lim_{x\to 0} \left(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}\right)$ (μηδενική επί φραγμένη)

πεδίο ορισμού F

Εφαρμόζουμε ως εξής $-1 \le \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} \le 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$

$\Longleftrightarrow -\eta\mu x \le \eta\mu x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \le \eta\mu x$

Επειδή $\lim_{x\to 0}(-\eta\mu x) = \lim_{x\to 0}(\eta\mu x) = 0$ από το κριτήριο

παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} \eta\mu x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} = 0$.

Να βρείτε τα όρια:

4

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-6x+5}{2x^2-x-1}$ ii) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{4}{x^2-4} \right)$

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2-x-1)=0$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου για τα όρια

(Κανόνας πηλίκου: $= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ όπου P, Q πολυωνυμικές συναρτήσεις)

Παρατηρούμε ότι για $x=1$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος οπότε αυτοί έχουν κοινό παράγοντα το $x-1$

- Σχήμα Horner (Διαίρεση πολυωνύμων)

$$x^3-6x+5=(x-1)(x^2+x-5)$$
$$2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$$

Άρα $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-6x+5}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x-5)}{(x-1)(2x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-5}{2x+1} = \dfrac{1^2+1-5}{2\cdot 1+1} = -1$

ii) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{4}{x^2-4} \right) = \lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{4}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} + \dfrac{4}{(x-2)(x+2)} \right)$

$= \lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{\cancel{x+2}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} \right) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{-2-2} = -\dfrac{1}{4}$

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^4 + 1 & x \le -1 \\ 2ax^3 + \beta^2 x & x > -1 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

5

ΛΥΣΗ

- Θα πρέπει $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = f(-1)$

$\boxed{f(-1) = a^2 + 1}$ i)

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} 2ax^3 + \beta^2 x = -2a - \beta^2$ ii)

Άρα από i) και ii) έχουμε

$a^2 + 1 = -2a - \beta^2 \Leftrightarrow$

$(a+1)^2 = -\beta^2 \Leftrightarrow$ (Αθροίσμα θετικών όρων πάν δίνει πάντα 0)

$(a+1)^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$ Αυτό ισχύει αν-ν

$\left.\begin{array}{l} a+1=0 \\ \text{και} \\ \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=-1 \\ \beta = 0 \end{array}}$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2} + \eta\mu 2x}{x^2+x} & , x>0 \\ e^x + \lambda & , x \leq 0 \end{cases}$

6

i) Να βρεθεί το λ, ώστε η F να είναι συνεχής στο $x_0=0$

ΛΥΣΗ

- Για να είναι η F συνεχής στο $x_0=0$ θα πρέπει $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0)$

- $F(0) = e^0 + \lambda = 1+\lambda$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2} + \eta\mu 2x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2(x^2+1)} + \eta\mu 2x}{x(x+1)} =$

επειδή έχουμε τον κλάδο της F(x) όπου είναι $x>0$ θα είναι $|x|=x$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|\cdot\sqrt{x^2+1} + \eta\mu 2x}{x(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cancel{x}\cdot\sqrt{x^2+1} + \eta\mu 2x}{\cancel{x}(x+1)} = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \eta\mu 2x}{x+1} = \dfrac{\sqrt{0^2+1} + \eta\mu 2\cdot 0}{0+1}$

$= \dfrac{\sqrt{1}+0}{1} = 1$

Άρα για να είναι συνεχής θα πρέπει να ισχύει

$1+\lambda = 1 \iff \boxed{\lambda = 0}$

ΝΑΟ η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 όταν

7

i) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

ΛΥΣΗ

Για να είναι συνεχής θα πρέπει $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$

$$- \lim_{x \to 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u \to \infty} \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+e^{u}} = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{u(1+e^{u})} = 0$$

- Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση:

i) $F(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \ln(x^2+1) & x < 0 \\ e^{2x} + x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

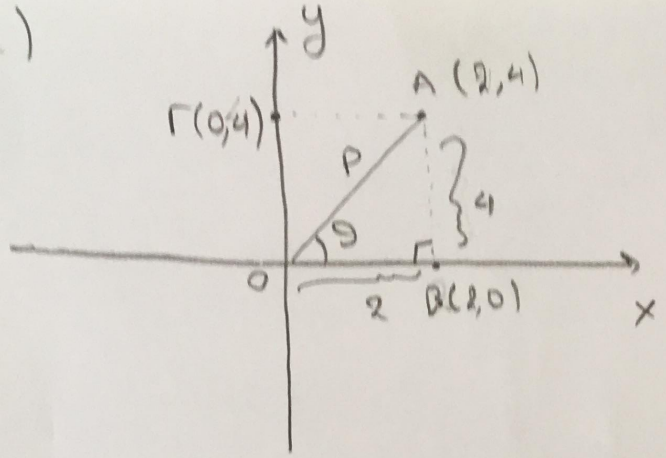
$$- F(0) = e^{2 \cdot 0} + 0 - 1 = e^{0} + 0 - 1 = e^{0} - 1 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$F(0) = 0$

$$- \lim_{x \to 0^-} \eta\mu x + \ln(x^2+1) = \underbrace{\cancel{\eta\mu(0)}}_{0} + \ln(0^2+1) = \ln(1) = 0 = F(0)$$

Άρα είναι συνεχής

1)



Δίνεται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy και σημείο A με καρτεσιανές συντεταγμένες (2,4). Να βρεθούν οι πολικές συντεταγμένες του A (ρ,θ).

8

ΛΥΣΗ

- Αρκεί να βρούμε το ρ που είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων (AO), και το θ η γωνία που σχηματίζει το AO με τον άξονα x.

Το τρίγωνο $A\hat{B}O$ είναι ορθογώνιο. Τα AB και OB είναι γνωστά (αποστάσεις) Επομένως εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα για να βρούμε το $OA = \rho$

- $OB^2 + AB^2 = OA^2 \iff$

$(2)^2 + (4)^2 = OA^2 \iff$

$OA^2 = 4 + 16 = 20 \iff$

$OA = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

Άρα $\rho = OA = 2\sqrt{5}$

- Τώρα για το θ, ξέρουμε ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο το ημίτονο μιας γωνίας $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ισχύει

$$\eta\mu\theta = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\eta\mu\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \iff \boxed{\theta = \tau o\xi\eta\mu \frac{2\sqrt{5}}{5}}$ Άρα $(\rho,\theta) = (2\sqrt{5}, \tau o\xi\eta\mu \frac{2\sqrt{5}}{5})$