ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΛΗ12   2012-2013

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ο **ανάστροφος** πίνακας ενός $m\times n$ πίνακα $A=[a_{ij}]$ σημειώνεται με $A^T=[a_{ji}]$, (δηλαδή, οι γραμμές γίνονται στήλες και αντίστροφα).

Ιδιότητες: $\bullet\ (A^T)^T=A$ $\bullet\ (A+B)^T=A^T+B^T$

$\bullet\ (\lambda A)^T=\lambda A^T$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ $\bullet\ (AB)^T=B^TA^T$

Ένας $m\times n$ πίνακας $A=[a_{ij}]$ ονομάζεται **συμμετρικός** όταν ισχύει $a_{ij}=a_{ji}$ δηλ. $A^T=A$

Ο **αντίστροφος** ενός $n\times n$ τετραγωνικού πίνακα $A=[a_{ij}]$ (όταν υπάρχει) συμβολίζεται με A^{-1} και ισχύει $AA^{-1}=AA^{-1}=I_n$.

Ιδιότητες: Αν *A*, *B* αντιστρέψιμοι *n*×*n* πίνακες

$\bullet\ (A^{-1})^{-1}=A$ $\bullet\ (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

$\bullet\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $\bullet\ (A^k)^{-1}=(A^{-1})^k\ \ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

Ανάπτυγμα Laplace της ορίζουσας τετραγωνικού πίνακα $A=[a_{ij}]$ ως προς την i γραμμή ή την j στήλη: $\det(A)=|A|=$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad \text{όπου}$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα του *ij*-στοιχείου.

Ιδιότητες ορίζουσας ενός $n\times n$ πίνακα A:

- $\det(A^T)=\det(A)$
- $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$
- $\det(AB)=\det(A)\det(B)$
- $\det(A^k)=\left[\det(A)\right]^k$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$
- A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$

τότε $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A)$

όπου $adj(A)$ ο ανάστροφος του πίνακα με στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

* * * * * * * * * * * * * *

• Ένα μη κενό υποσύνολο U του πραγματικού διανυσματικού χώρου V είναι **υπόχωρος** του δ.χ. V αν και μόνο αν $\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$ και $\forall\ \boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$ ισχύει $k\,\boldsymbol{u}_1+\lambda\,\boldsymbol{u}_2\in U$.

• Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** όταν

$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0.$

• Ένα σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ του δ.χ. V είναι μία **βάση** του V αν και μόνο αν

I. τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

II. Ο δ.χ. V παράγεται από τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$

και τότε η **διάσταση** του V είναι $\dim V=k$.

• **Αν** *B*={ $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ } (διατεταγμένη) βάση του V *και* $x\in V$, τότε $x=\sum_{i=1}^{k}a_iu_i$, με μοναδικά $a_i\in\mathbb{R}$. Η στήλη $[a_1\ a_2\ldots\ a_k]^T$ λέγεται *στήλη συντεταγμένων του* x ως προς την Β *και* συμβολίζεται με $[x]_B$.

• Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης δ.χ. και U,W υπόχωροι του V. Τότε ισχύει:

$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$

• Για το **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων $U,W\subseteq V$ του δ.χ. V ισχύει $V=U\oplus W\ \Leftrightarrow$

$(V=U+W$ και $U\cap W=\{\boldsymbol{0}\}\ )\Leftrightarrow$

$(V=U+W$ και $\dim V=\dim U+\dim W$).

* * * * * * * * * * * * * *

Εσωτερικό γινόμενο Ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\boldsymbol{R}^n$ είναι μία συνάρτηση που σε κάθε ζεύγος $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$, αντιστοιχεί ένα πραγματικό αριθμό $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$ με τις ιδιότητες:

I. $(k\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})\circ\boldsymbol{z}=k(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{z})+\lambda(\boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{z})$,

$\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$, $\quad\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$

II. $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{x}$, $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$

III. $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}\geq 0$ **και** $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}=0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

• Το **μέτρο** του διανύσματος $\boldsymbol{x}$ ορίζεται από τον τύπο $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}}$.

• Η **γωνία** $\omega\in[0,\pi]$ των $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ ορίζεται από τον τύπο: $\cos\omega=\dfrac{\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}$.

Τα διανύσματα $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ λέγονται **κάθετα (ή ορθογώνια)** αν και μόνο αν $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=0$.

Για το εσωτερικό γινόμενο και το μέτρο των διανυσμάτων $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ιδιότητες:

I. $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=0\Leftrightarrow\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$

II. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$

III. $\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

IV. $|\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}|\leq\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$ (**Cauchy-Schwarz**)

• **Προβολή** $\boldsymbol{p}$ διανύσματος $\boldsymbol{x}$ στη διεύθυνση του $\boldsymbol{y}$ είναι $\boldsymbol{p}=\dfrac{\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\boldsymbol{y}.$

• Το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** ενός υπόχωρου $E\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι ο υπόχωρος $E^{\perp}=\left\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:\ \boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=0,\ \forall\ \boldsymbol{x}\in E\right\}$. Επιπλέον, $E\oplus E^{\perp}=\mathbb{R}^n$, $(E^{\perp})^{\perp}=E$.

• Μία βάση $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k\in\mathbb{R}^n$ ονομάζεται ορθοκανονική αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι ανά δύο κάθετα και μοναδιαία (δηλ. $\boldsymbol{u}_i\circ\boldsymbol{u}_j=0$ για $i\neq j$, και $\|\boldsymbol{u}_i\|=1$).

• Αν $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, τα διανύσματα

$\boldsymbol{\eta}_1=\xi_1$ και

$$\boldsymbol{\eta}_j=\xi_j-\frac{\xi_j\circ\boldsymbol{\eta}_1}{\boldsymbol{\eta}_1\circ\boldsymbol{\eta}_1}\boldsymbol{\eta}_1-\frac{\xi_j\circ\boldsymbol{\eta}_2}{\boldsymbol{\eta}_2\circ\boldsymbol{\eta}_2}\boldsymbol{\eta}_2-\cdots-\frac{\xi_j\circ\boldsymbol{\eta}_{j-1}}{\boldsymbol{\eta}_{j-1}\circ\boldsymbol{\eta}_{j-1}}\boldsymbol{\eta}_{j-1}$$

για $j=2,3,\ldots,n$

είναι κάθετα μεταξύ τους, τα δε διανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|},\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|},\quad \ldots,\boldsymbol{u}_n=\frac{\boldsymbol{\eta}_n}{\|\boldsymbol{\eta}_n\|}$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

• Ο πραγματικός $n\times n$ πίνακας A με την ιδιότητα $AA^T=A^TA=I$, ή ισοδύναμα $A^{-1}=A^T$, ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Αν A ορθογώνιος, τότε ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο ισχύουν:

I. Οι στήλες του (και οι γραμμές του) αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\boldsymbol{R}^n$,

II. $|\det A|=1,$

III. $\|A\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|,$

IV. $A\boldsymbol{x}\circ A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$

V. Αντίστροφος ορθογωνίου και γινόμενο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

* * * * * * * * * * * * * *

Γραμμικές απεικονίσεις (μετασχηματισμοί)

Μία απεικόνιση $f:U\to V$ (U,V πραγματικοί διανυσματικοί χώροι) ονομάζεται **γραμμική** όταν $f(k\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})=k\,f(\boldsymbol{x})+\lambda\,f(\boldsymbol{y})$, $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$ και $\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$. (Αν $U=V$ λέγεται και **γραμ. μετασχηματισμός** του U). Το σύνολο $\ker f=\{\boldsymbol{x}\in U:\ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}\subseteq U$ ονομάζεται **πυρήνας** της f και είναι υπόχωρος του U.

Το σύνολο $\operatorname{Im} f=\{\boldsymbol{y}\in V:\ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}\in U\}\subseteq V$ λέγεται **εικόνα** της f και είναι υπόχωρος του V.

Η $f:U\to V$ λέγεται **ένα-προς-ένα** (1-1) αν $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U\quad f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

Η $f:U\to V$ λέγεται **επί** αν $f(U)=V$.

• Για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ ισχύουν:

I. $\dim U=\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f$

II. Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν $\ker f=\{\boldsymbol{0}\}$.

III. Αν B_1={ $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ } διατεταγμένη βάση του U και B_2={ $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ } διατεταγμένη βάση του V, από τις ισότητες

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_1)&=a_{11}\boldsymbol{v}_1+a_{21}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{v}_m\\ f(\boldsymbol{u}_2)&=a_{12}\boldsymbol{v}_1+a_{22}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{v}_m\\ &\ \,\vdots\\ f(\boldsymbol{u}_n)&=a_{1n}\boldsymbol{v}_1+a_{2n}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{v}_m\end{aligned}$$

ορίζεται ο $m\times n$ πίνακας **αναπαράστασης** της f

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},$$

και $A\left[\boldsymbol{x}\right]_{B_1}=\left[f(\boldsymbol{x})\right]_{B_2}$, για κάθε $\boldsymbol{x}\in U$.

• Αν για τους διανυσματικούς χώρους ισχύει $\dim U=\dim V=n$, τότε για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

I. f αντιστρέψιμη (υπάρχει η f^{-1})

II. f είναι 1-1

III. $\ker f=\{\boldsymbol{0}\}$

IV. f είναι επί

* * * * * * * * * * * * * *

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα πίνακα

Για έναν $n\times n$ πίνακα A οι **ιδιοτιμές** λ_i του πίνακα είναι οι n ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

Αν ο A είναι τριγωνικός ή διαγώνιος, τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, $i=1,2,\ldots,n$, τα αντί-στοιχα **ιδιοδιανύσματα** είναι οι μη-μηδενικές λύσεις $\boldsymbol{x}=\left[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\right]^T$ του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_i)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_i)x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda_i)x_n&=0\end{aligned}$$

• Για τις ιδιοτιμές του A ισχύουν:

$\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=(-1)^na_0$

και $\quad trA=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=-a_{n-1}$,

όπου a_0,a_{n-1} οι αντίστοιχοι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$.

Αν λ_i ιδιοτιμή και $\boldsymbol{x}_i$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A, τότε λ_i^k, $\boldsymbol{x}_i$ είναι **ιδιοποσά** του A^k.

Οι ιδιοτιμές πραγματικού συμμετρικού πίνακα είναι αριθμοί πραγματικοί, τα δε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα.

• Ο $n\times n$ πίνακας A λέγεται **διαγωνοποιήσιμος**, όταν είναι **όμοιος** με διαγώνιο πίνακα D, δηλ. όταν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος, ώστε $A=PDP^{-1}$. Ο διαγώνιος πίνακας D έχει διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A και ο P είναι πίνακας με στήλες αντίστοιχα ιδιο-διανύσματα που αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

• Ο πίνακας *A* διαγωνοποιείται όταν:

• Για κάθε ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας *k* υπάρχουν ακριβώς *k* γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ή, αλλιώς, η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής ισούται με την αλγεβρική της πολλαπλότητα (και αντιστρόφως)

• Έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές.

• Είναι συμμετρικός πραγματικός. Τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q, τέτοιος ώστε

$A = Q\,diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\,Q^T$.

- Αν $f(\lambda)$ είναι πολυώνυμο, τότε

$f(A) = P\,f(D)\,P^{-1} = P\,diag\big(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)\big)\,P^{-1}$

- Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = \mathbb{O}\ .$$

Αν $\upsilon(\lambda)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(\lambda)$ δια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$, τότε $f(A) = \upsilon(A)$.

* * * * * * * * * * * * *

Τετραγωνικές μορφές

Το πολυώνυμο των πραγματικών μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_n$ της μορφής $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$ και A $n \times n$ συμμετρικός πίνακας, ονομάζεται **τετραγωνική μορφή**. Αν $A = Q diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q^T$, τότε η $F(\boldsymbol{x})$ μετασχηματίζεται στη **διαγώνια μορφή**

$$F(\boldsymbol{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2\ ,$$

όπου $\boldsymbol{y} = [y_1\ y_2\ \dots\ y_n]^T = Q^T \boldsymbol{x}$.

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0\ (<0)$ η F λέγεται **θετικά (αρνητικά) ορισμένη**, αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \ge 0\ (\le 0)$ λέγεται **θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη**, ενώ, σε κάθε άλλο συνδυασμό προσήμων των λ_i ονομάζεται **αόριστη**.

* * * * * * * * * * * * *

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y \end{aligned} \quad \text{ή} \quad y = f(x),\ x \in A\ ,$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης f

$C_f = \{\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ M(x,y)\ \tau o\upsilon\ \varepsilon\pi / \delta o\upsilon\ xy : y = f(x)\}$

- Συνάρτηση f **γνησίως αύξουσα** στο A
$f(x_1) < f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- Συνάρτηση f **γνησίως φθίνουσα** στο A
$f(x_1) > f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- **Άνω φραγμένη** συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$

Υπάρχει αριθμός s (άνω φράγμα της f) με την ιδιότητα: $f(x) \le s$, $\forall\ x \in A$.

(Ανάλογα ορίζεται η κάτω φραγμένη).

Φραγμένη λέγεται η συνάρτηση αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

- 1-1 συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ αν $x_1 \ne x_2$, τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$,

ισοδύναμα: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Σύνθεση της $f : A \to \mathbb{R}$ με την $g : B \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$ για τα οποία $f(x) \in B$.

Αντίστροφη συνάρτηση μιας 1-1 συνάρτησης f είναι η $f^{-1} : f(A) \to A$, που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ στο μοναδικό x , για το οποίο ισχύει $y = f(x)$, δηλ. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

✓ *Όριο συνάρτησης στο* x_0 *- Πλευρικά όρια*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

✓ *Κριτήριο παρεμβολής*:

Αν $g(x) \le f(x) \le h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και στην περίπτωση που $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

✓ $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\ ,\quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

✓ *Συνέχεια*

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

* * * * * * * * * * * * *

Παράγωγος συνάρτησης ($A = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$)

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη τότε f συνεχής
- Αν f δεν είναι συνεχής τότε f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Ιδιότητες παραγώγων: Αν *f*, *g* παραγωγίσιμες

- $\big(cf(x)\big)' = c\big(f(x)\big)'$, $\quad c \in \mathbb{R}$
- $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = \big(f(x)\big)' \pm \big(g(x)\big)'$
- $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ g(x) \ne 0$
- Αν επιπλέον $f' \ne 0$ και f αντιστρέψιμη τότε η αντίστροφη f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'},$$

- Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ είναι

$$\big(f(g(x))\big)' = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Παράγωγοι συνήθων συναρτήσεων

$(c)' = 0$, $c \in \mathbb{R}$	$\left(x^k\right)' = k\,x^{k-1}$, $k \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \cos(x)$	$(\cos x)' = -\sin(x)$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(a^x\right)' = \ln(a) \cdot a^x$, $a \ne 1 > 0$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Κανόνας l' Hospital

Πρώτη διατύπωση: Αν $f(a) = g(a) = 0$ και $f'(a), g'(a)$ υπάρχουν και $g'(a) \ne 0$, τότε

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Δεύτερη διατύπωση : Αν $f(x_0) = g(x_0) = 0$, με $f(x), g(x)$ διαφορίσιμες στο (a,b), και $g'(x) \ne 0$, εκτός πιθανώς του $x_0 \in (a,b)$,

τότε $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ο κανόνας ξαναχρησιμοποιείται αν ισχύουν οι ίδιες συνθήκες και για τις παραγώγους των $f(x), g(x)$.

- Οι απροσδιόριστες μορφές $\dfrac{\pm\infty}{\mp\infty},\ \infty - \infty,\ \infty \cdot 0$ μπορούν να μετατραπούν ως εξής

$\infty / \infty : \ \dfrac{f}{g} = \dfrac{1/g}{1/f}$ $\qquad 0 \times (\pm\infty) : \ fg = \dfrac{f}{1/g}$

$\infty - \infty : \ f - g = \dfrac{1/g - 1/f}{1/fg}$

- Οι απροσδιόριστες μορφές $0^0,\ +\infty^0,\ 1^\infty$ μετατρέπονται με βάση τη σχέση

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a}(g(x)\ln f(x))},\quad f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Εφαρμογές των παραγώγων στην σχεδίαση της γραφικής παράστασης C_f της $f : A \to \mathbb{R}$.

✓ *Από <u>πρώτη παράγωγο</u>*

- Αν $f'(x) > 0,\ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f γνησίως αύξουσα.
- Αν $f'(x) < 0,\ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f γνησίως φθίνουσα.
- Αν $f'(x_0) = 0$, για κάποιο $x_0 \in A$ και υπάρχει ε>0 : $f'(x) > 0$, $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ και $f'(x) < 0$, $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου. Ανάλογα για σημείο τοπ. ελαχίστου.

✓ *Από <u>δεύτερη παράγωγο</u>*

- Αν $f''(x) > 0,\ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα *I*.
- Αν $f''(x) < 0,\ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα *I*.
- Αν υπάρχει ε>0 με $f''(x) > 0$ για $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ και $f''(x) < 0$ για $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ (ή αντίστροφα), τότε το x_0 είναι σημείο καμπής.
- **α)** Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

β) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

✓ *<u>Ασύμπτωτες</u>*

- *Κάθετη* ασύμπτωτη η ευθεία $x = a \in \mathbb{R}$, αν

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

- *Οριζόντια* ασύμπτωτη η ευθεία $y = b$, $b \in \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ ή $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$
- *Πλάγια ασύμπτωτη* της C_f στο $\pm\infty$ η ευθεία $y = ax + b$, αν $\lim_{x \to \pm\infty}\big(f(x) - ax - b\big) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

* * * * * * * * * * * * *

Σημαντικά θεωρήματα

Έστω συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

✓ *Bolzano:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

✓ *Ενδιάμεσης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \ne f(b)$, τότε, για κάθε αριθμό ρ μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \rho$.

✓ *Μέγιστης - ελάχιστης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Επιπλέον υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ έτσι ώστε $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$, $\forall x \in [a,b]$.

✓ *Θεώρημα μέσης τιμής* (ΘΜΤ)*:* Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

✓ *Rolle:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) , και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = 0$.

✓ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) , και $f'(x) = 0,\ \forall\ x \in (a,b)$, τότε $f(x) = c.$

✓ *Cauchy:* Αν οι $f(x), g(x)$ είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[a,b]$, διαφορίσιμες στο (a,b) και $g'(x) \ne 0$, $\forall x \in (a,b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (a,b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

✓ *Darboux:* Αν f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με $f'(a) > f'(b)$ και $c \in \mathbb{R}$ με $f'(b) < c < f'(a)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = c.$ (παρόμοια, αν $f'(a) < f'(b)$).

Εφαρμογή του ΘΜΤ για την προσέγγιση ρίζας
Αν η εξίσωση $x = f(x)$ έχει ρίζα a, με f παραγωγίσιμη στο $[a-h, a+h]$, και $|f'(x)| < m < 1$, $\forall x \in [a-h, a+h]$, τότε για αυθαίρετο $x_0 \in [a-h, a+h]$ η ακολουθία $x_n = f(x_{n-1}),\quad n = 1,2,...$, συγκλίνει στη ρίζα a.

* * * * * * * * * * * *

Ορισμένο ολοκλήρωμα
- Κάθε συνεχής f είναι ολοκληρώσιμη
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
- ΘΜΤ: f συνεχής, τότε για κάποιο $\xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγος (παράγουσα)

$$F(x)+c = \int f(x)dx \Leftrightarrow \big(F(x)+c\big)' = f(x)$$

Ιδιότητες

$$\int df(x) = f(x)+c$$

$$\int \big(c_1 f(x) + c_2 h(x)\big)dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int h(x)dx$$

Μεθοδολογίες Ολοκλήρωσης
<u>Αντικατάσταση</u>

$x = g(t)$, $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$

<u>Παραγοντική Ολοκλήρωση</u>

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Πίνακας Ολοκληρωμάτων
- $\int kdx = kx + c$
- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \in \mathbb{R} - \{-1\}$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{adx}{x^2+a^2} = \tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c = arc\tan(\frac{x}{a}) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c = arc\sin(\frac{x}{a}) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

Θεμελιώδη θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού
I. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

II. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε $\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

* * * * * * * * * * * *

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

(α' είδους) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

ή $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

(β' είδους) $\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

(b ιδιόμορφο σημείο)

$$\int_{a^+}^b f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^b f(x)dx$$

(a ιδιόμορφο σημείο)

(γ' είδους) = συνδυασμός α', β' είδους

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^c f(x)dx + \lim_{e\to0^+}\int_c^{b-e} f(x)dx$$

με $a < c < b$ (a, b ιδιόμορφα σημεία)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{a^-} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^c f(x)dx + \lim_{e\to0^+}\int_c^{a-e} f(x)dx$$

(a ιδιόμορφο σημείο)

$$\int_{a^+}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

(a ιδιόμορφο σημείο)

Εσωτερικό ιδιόμορφο σημείο $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_a^{c-e} f(x)dx + \lim_{e\to0^+}\int_{c+e}^b f(x)dx$$

η πρωτεύουσα τιμή του Cauchy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\left(\int_a^{c-e} f(x)dx + \int_{c+e}^b f(x)dx\right)$$

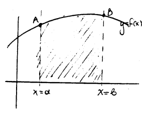
(c ιδιόμορφο σημείο)

Ο **μετασχηματισμός Laplace** μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι $L\{f(t)\}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$, για κάθε τιμή του x για την οποία το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

* * * * * * * * * * * *

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων

$$E = \int_a^b f(x)dx,\ \ f(x)\ge0$$

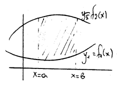


$$S = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$$

$$E_{ox} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$$

$$V_{ox} = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$E = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$$



$$V_{ox} = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx$$

* * * * * * * * * * * *

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ-ΣΕΙΡΕΣ
- **Ακολουθία** είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών. Συμβολισμός: $a_n = a(n)$.

Πρόοδοι
<u>*Αριθμητική*</u>: $a_{n+1} = a_n + \omega$, $\alpha_n = a_1 + (n-1)\cdot\omega$

<u>*Άθροισμα n όρων α.π.*</u>: $S_n = \frac{n\cdot[2a_1 + (n-1)\cdot\omega]}{2}$

<u>*Γεωμετρική*</u>: $a_{n+1} = \lambda a_n$ ή $a_n = \lambda^{n-1}\cdot a_1$

<u>*Άθροισμα n πρώτων όρων γ.π.*</u>: $S_n = a_1\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$, $\lambda \ne 1$.

<u>*Γεωμετρικός μέσος*</u>: Αν a, b, c είναι 3 διαδοχικοί όροι γ.π. τότε $b^2 = a\cdot c$.

Σημαντικά όρια ακολουθιών
Το $x\in\mathbb{R}$ παραμένει σταθερό καθώς το $n\to\infty$ (στους τύπους που υπάρχει x)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$	$\lim_{n\to\infty}x^n = 0,\ \ \lvert x\rvert<1$
$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1,\ \ x>0$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$.

Φραγμένες ακολουθίες
- *άνω φραγμένη*: υπάρχει $M\in\mathbb{R}$: $a_n \le M, \forall n\in\mathbb{N}$.
- *κάτω φραγμένη*: υπάρχει $m\in\mathbb{R}$: $m \le a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.
- *Φραγμένη*: συγχρόνως άνω και κάτω φραγμένη, δηλ. υπάρχουν $m, M\in\mathbb{R}: m\le a_n\le M,\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

✓ Μια ακολουθία απολύτως φραγμένη είναι φραγμένη και αντιστρόφως.
✓ Μία φραγμένη ακολουθία δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη.

Μονότονες ακολουθίες
Μία ακολουθία a_n, $n\in\mathbb{N}$ ονομάζεται
- **αύξουσα,** αν ισχύει $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
- **φθίνουσα,** αν ισχύει $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
- **μονότονη,** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες-Σύγκλιση
✓ Μία μονότονη ακολουθία δε συγκλίνει κατ' ανάγκη.
✓ Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$.
✓ Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
✓ Αν $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ και $|a_n| \le |\beta_n|$, $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$.
✓ Αν $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = \lambda < 1$, τότε $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$.

* * * * * * * * * * * *

Ειδικές Κατηγορίες Σειρών

α) Γεωμετρικές Σειρές: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$.
- αν $|r| < 1$: συγκλίνει. Άθροισμα: $\frac{1}{1-r}$,
- αν $r \ge 1$: απειρίζεται θετικά
- αν $r \le -1$: κυμαίνεται, το όριό της δεν υπάρχει.

β) p-Σειρές: $\varsigma(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,
- αν $p > 1$: συγκλίνει • αν $p \le 1$: αποκλίνει

γ) Τηλεσκοπικές: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = b_n - b_{n+1}$

Συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Άθροισμα: $b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$.

δ) Εναλλάσσουσες Σειρές: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$ ή $a_n < 0$ για όλα τα $n = 0,1,2,...$

ε) Αναπτύγματα Taylor: Αν η συνάρτηση f και οι πρώτες τις παράγωγοι $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και αν η $f^{(n)}$ είναι διαφορίσιμη στο (a,b), τότε για $\xi\in(a,x)$ ισχύει

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

όπου $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ είναι το υπόλοιπο της πολυωνυμικής προσέγγισης n-βαθμού.
Όταν $a = 0$, τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται και ανάπτυγμα Maclaurin.

Συνήθεις σειρές Taylor ($a = 0$)
για $x\in\mathbb{R}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

και για $-1< x < 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\arctan x = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

ε) Σειρές Fourier: Έστω $f:[-L,L]\to\mathbb{R}$ που επεκτείνεται $2L$ –περιοδικά. Η σειρά Fourier της f δίνεται από

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

όπου $a_0 = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ ,\ n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\ ,\ n = 1,2,\ldots$$

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

I. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **δεν** συγκλίνει.

II. α) Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, τότε για κάθε $k,\lambda \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(ka_n + \lambda b_n) = k\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

β) Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ δεν συγκλίνει.

III. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

IV. (Απλό κριτήριο **σύγκρισης**) Έστω $0 \le a_n \le b_n$.

- αν $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει.

V. (Γενικευμένο κριτήριο **σύγκρισης**) Έστω $0 \le a_n$, $0 < b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$. Τότε οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ είτε συγκλίνουν είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

VI. (Κριτήριο **λόγου - d' Alembert**) Έστω $a_n \neq 0$ για $n \ge n_0$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$. Τότε:

- αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda > 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει
- αν $\lambda = 1$, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VII. (Κριτήριο **ρίζας - Cauchy**). Έστω $a_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lambda$

- αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda > 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει
- αν $\lambda = 1$, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VIII. (Κριτήριο **Leibnitz**) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Αν η ακολουθία (a_n) είναι θετική, φθίνουσα και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η σειρά συγκλίνει.

IX. (Κριτήριο **ολοκληρώματος**) Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι θετική και φθίνουσα τότε $I = \int_1^{+\infty} f(x)dx$ και $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγχρόνως συγκλίνουν ή αποκλίνουν και αν συγκλίνουν ισχύει: $I < S < I + f(1)$.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Συνδυασμοί : $C_r^n = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

✓ Δεσμευμένη Πιθανότητα $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

✓Ανεξάρτητα ενδεχόμενα: $P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$.

Αν $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i\neq j$ και $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$,

✓ Ολική Πιθανότητα:

$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + \cdots + P(A_n)P(B/A_n)$

✓ Τύπος Bayes: $P(A_k/B) = \dfrac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}$

Τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) είναι μια συνάρτηση $X(\cdot)$ με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η **μέση τιμή** μίας τ.μ. συμβολίζεται με $E(X)$ ή με μ_X και δίνεται από: $E(X) = \sum_x xf(x)$ για τις διακριτές τ.μ., και από: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$. για τις συνεχείς τ.μ., όπου $f(x)$ η **συνάρτηση πιθανότητας** (σ.π.) (περίπτωση διακριτής τ.μ.) ή η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.) (περίπτωση συνεχούς τ.μ.).

Η **διασπορά** για τις διακριτές τ.μ. δίνεται από:

$$\mathrm{var}(X) = E\left[(X-\mu_x)^2\right] = \sum_x (x-\mu_x)^2 f(x)$$

και για τις συνεχείς τ.μ. από:

$$\mathrm{var}(X) = E\left[(X-\mu_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 f(x)\,dx$$

Ισχύει: $\mathrm{var}(X) = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2$.

Η **τυπική απόκλιση** μιας τ.μ. X συμβολίζεται με σ_X και είναι η (θετική) τετραγωνική ρίζα της **διασποράς** της X, δηλαδή: $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$.

Έστω X τ.μ. (διακριτή ή συνεχής). Εάν ορίσω άλλη τυχαία μεταβλητή $Y = aX + b$ τότε ισχύει:

$$E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$Var(Y) = Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

Κατανομές τυχαίων μεταβλητών

Διωνυμική: $B(n,p): f(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$k = 0,1,\ldots,n$

$E(X) = np,\quad Var(X) = np(1-p).$

Poisson $P(\lambda)$ **:** $f(k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!},\ \ k = 0,1,\ldots$

$E(X) = \lambda$, $\quad Var(X) = \lambda$

Γεωμετρική:

$$G(p): f(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$E(X) = 1/p,\quad Var(X) = (1-p)/p^2$

Αρνητική διωνυμική:

$f(k) = \binom{k-1}{\nu-1}p^{\nu}(1-p)^{k-\nu},\ k = \nu, \nu+1,\ldots$

$E(X) = \nu/p$, $\quad Var(X) = \nu(1-p)/p^2$

Υπεργεωμετρική: $\quad f(k) = \dfrac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$k = 0,\ldots,\min(n,N_1)$, $\quad N_1 + N_2 = N$

$E(X) = n\dfrac{N_1}{N}$, $\quad Var(X) = n\dfrac{N_1}{N}\dfrac{N_2}{N}\dfrac{N-n}{N-1}$

Ομοιόμορφη: $U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$E(X) = (a+b)/2$ **,** $\quad Var(X) = (b-a)^2/12$

Κανονική $\quad N(\mu,\sigma^2)$ **:** $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$-\infty < x < \infty$

$E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

Εκθετική $\quad E(a): f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x \ge 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

$E(X) = 1/a$, $\quad Var(X) = 1/a^2$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες με $E(X_i) = \mu$. $Var(X_i) = \sigma^2$, τότε $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$ ή $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ $\ n \ge 30$.

* * * * * * * * * * * *

Χρήσιμες ταυτότητες και σχέσεις:

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \ldots + b^n$

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots$
$\quad + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}),\quad n = 1,2,3,\ldots$

$(1+a)^n \ge 1 + na,\quad a > 0,\quad n = 1,2,3,\ldots$

* * * * * * * * * * * *

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι ($x\in\mathbb{R}$)

$\sin(x) = -\sin(-x),\qquad \cos(x) = \cos(-x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\quad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$

$\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$

$\tan(x\pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\cdot\tan y}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, $\quad 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\dfrac{x\pm y}{2}\cos\dfrac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\ \cos\dfrac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\ \sin\dfrac{x-y}{2}$

$\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0,\quad \cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$

$\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$

$\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \ \sin(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

* * * * * * * * * * * *

Σύνολο μιγαδικών $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y\in\mathbb{R}\}$

✓ *Συζυγής:* $\bar{z} = x - iy$

✓ *Αντίστροφος:* $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

✓ *Μέτρο μιγαδικού αριθμού:*

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ και $r^2 = |z|^2 = z\cdot\bar{z}$

✓ *Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού*

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου θ *πρωτεύον όρισμα.*

✓ *Θεώρημα De Moivre*

$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$, n ακέραιος

✓ Οι n διακεκριμένες **ρίζες** της εξίσωσης $x^n = z$, $n\in\mathbb{N}$, (που λέγονται και n -οστές ρίζες του z), δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots n-1 .$$